Calcul 42S

Unité : Les Intégrales : Test les intégrales indéfinies, définies et les équations différentielles

Nom : ____________________ / Date : ____________________

1. Trouve les intégrales indéfinies suivantes

/22

a) $\int (2x+1)(x-1)dx$

$\int (2x^2 - x - 1)dx$

$\frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x + K$

/2

b) $\int (x^2-7)^2dx$

$\int (x^2-7)(x^2-7)dx$

$\int (x^4 - 14x^2 + 49)dx$

$\frac{x^5}{5} - \frac{14x^3}{3} + 49x + K$

/2

c) $\int \frac{cos3x}{sin^5 3x}dx$

$u = \sin 3x$

$\frac{du}{3\cos 3x} = dx$

$\int \frac{\cancel{\cos 3x}}{u^5} \frac{du}{3\cancel{\cos 3x}}$

$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{3}\int u^{-5}du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-4}}{-4}\right)$

$= -\frac{1}{12\sin^4 3x} + K$

/2

d) $\int \frac{12x+4}{(3x^2+2x-5)^3}dx$

$u = 3x^2+2x-5$

$\frac{du}{6x+2} = dx$

$\int \frac{2\cancel{(6x+2)}}{u^3} \cdot \frac{du}{\cancel{6x+2}} = 2\int u^{-3}du$

$= \cancel{2}\frac{u^{-2}}{-\cancel{2}} + K$

$= \frac{-1}{(3x^2+2x-5)^2} + K$

/2

e) $\int 2x^3e^{x^4}dx$

$u = x^4$

$\frac{du}{4x^3} = dx$

$\int \cancel{2}\cancel{x^3}e^u \frac{du}{\cancel{2}\cancel{4}\cancel{x^3}}$

$= \frac{1}{2}\int e^u du$

/2

$= \frac{e^{x^4}}{2} + K$

f) $\int \frac{lnx^4}{x}dx$ $2\ln^2 x + K$

$u = \ln x$

1) $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ $x\,du = dx$ $\int \frac{u^4}{\cancel{x}}\cancel{x}du$

$= \frac{u^5}{5} + K$ $= \frac{\ln x^5}{5} + K$

/2 $2\ln$

2) $\int \frac{\ln x^4}{x}dx = 4\int \frac{\ln x}{x}dx$ $4\int \frac{u\,du\cancel{x}}{\cancel{x}}$ $\frac{4u^2}{2} = du$

$u = \ln x$ $du\,x = dx$ $4\int u$ $2\ln^2$

Calcul 42S

Unité : Les Intégrales : Test les intégrales indéfinies, définies et les équations différentielles

g) $\int 3^{5x} dx$

$u = 5x$

$\frac{du}{5} = dx$

$\int 3^u \frac{du}{5}$

$\frac{1}{5}\int 3^u du$

$\frac{1}{5}\frac{3^{5x}}{\ln 3}$

$$\boxed{= \frac{3^{5x}}{5\ln 3} + K}$$

/2

h) $\int \frac{2x^4+3}{x^3} dx$

$\int\left(\frac{2x^4}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right)dx = \int(2x + 3x^{-3}$ d

$$\boxed{= x^2 - \frac{3}{2x^2} + K}$$

/2

i) $\int \frac{4x+3}{x-2} dx$

$x-2\overline{)4x+3}$ quotient 4, $+\frac{11}{x-2}$

$-(4x-8)$

11

$\int\left(4 + \frac{11}{x-2}\right)dx$

/2

$$\boxed{= 4x + 11\ln|x-2| + K}$$

j) $\int \frac{8x^3+18x^2+5x+28}{2x+5} dx$

$2x+5\overline{)8x^3+18x^2+5x+28}$ quotient $4x^2 - x + 5 + \frac{3}{2x+5}$

$-(8x^3+20x^2)$

$-2x^2+5x$

$-(-2x^2-5x)$

$10x+28$

$-(10x+25)$

3

$\int\left(4x^2 - x + 5 + \frac{3}{2x+5}\right)dx$

/3

$$\boxed{= \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{3}{2}\ln|2x+5| + K}$$

$\int \frac{3dx}{2x+5}$ $\frac{3}{u}$

$u = 2x+5$

$\frac{du}{2} = dx$

$\int \frac{3}{u}\frac{du}{2}$

$\frac{3}{2}\int\frac{1}{u}$

$\frac{3}{2}\ln|2x+5$

2. Évaluer les intégrales définies suivantes. /14

a) /2

$$\int_0^3 (x^2 + x + 5)dx$$

$\left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 5x\right|_0^3$

$= \left(\frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 5(3)\right) - \left(\frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} + 5(0)\right)$

$\frac{54}{6} + \frac{27}{6} + \frac{90}{6} = \frac{171}{6} =$

$= 57/2$

b) /3

$$\int_1^6 \sqrt{x+3}\, dx$$

$\int_1^6 (x+3)^{\frac{1}{2}}dx$

$\left.\frac{2}{3}(x+3)^{3/2}\right|_1^6$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{6+3}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{1+3}\right)^3$

$= \frac{54}{3} - \frac{16}{3} = \frac{38}{3} = 12{,}667$

Calcul 42S

Unité : Les Intégrales : Test les intégrales indéfinies, définies et les équations différentielles

c) /3

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^3}\,dx \qquad u = 1+x^3 \qquad \frac{du}{3x^2} = dx$$

$$\int_0^1 \frac{\cancel{x^2}}{u^3}\frac{du}{3\cancel{x^2}} = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{-3}\,du$$

$$= \frac{u^{-2}}{-6}\Big|_0^1 = \frac{-1}{6(1+x^3)^2}\Big|_0^1$$

$$\frac{-1}{6(1+1^3)^2} - \left(\frac{-1}{6(1+0^3)^2}\right) = \frac{-1}{24} + \frac{4}{24} = \frac{3}{24} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

$\frac{1}{6}$

$= 0,125$

d) /3

$$\int \frac{4}{x^2} \qquad \int 4x^{-2} \qquad \frac{4x^{-1}}{-1} = \frac{-4}{x}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx = 3\ln x - \left(-\frac{4}{x}\right)\Big|_1^2$$

$$3\ln x + \frac{4}{x}\Big|_1^2$$

$$= \left(3\ln 2 + \frac{4}{2}\right) - \left(3\overset{0}{\ln 1} + \frac{4}{1}\right)$$

$$\boxed{= 0,079}$$

$$= 3\ln 2 - 2$$

e) /3

$$\int_1^2 \left(4x\sqrt{12x^2+6}\right) dx \qquad u = 12x^2+6 \qquad \frac{du}{24x} = dx$$

$$\int_1^2 \cancel{4}\cancel{x}(u)^{\frac{1}{2}}\frac{du}{\cancel{24}\,6\,\cancel{x}} = \frac{1}{6}\int_1^2 u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{6} \cdot u^{3/2} \cdot \frac{2}{3}\Big|_1^2 = \frac{\left(\sqrt{12x^2+6}\right)^3}{9}\Big|_1^2$$

$$= \frac{\left(\sqrt{12(2)^2+6}\right)^3}{9} - \left(\frac{\left(\sqrt{12(1)^2+6}\right)^3}{9}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{54}\right)^3}{9} - \frac{\left(\sqrt{18}\right)^3}{9} = \frac{\left(\sqrt{54}\right)^3 - \left(\sqrt{18}\right)^3}{9} = \boxed{= 35,606}$$

Calcul 42S

Unité : Les Intégrales : Test les intégrales indéfinies, définies et les équations différentielles

3. Résous l'équation différentielle suivante : $\frac{dy}{dx} = x\sqrt{y}$ et F(3) = 25 /3

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = x\,dx$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int x\,dx$$

$$\frac{2\sqrt{y}}{2} = \frac{x^2}{2} + k$$

$$(\sqrt{y})^2 = \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + k$$

$$y = \frac{x^4}{16} + k$$

$$25 = \frac{3^4}{16} + k$$

$$k = 19{,}9375$$

$$y = \frac{x^4}{16} + 19{,}9375$$

4. Trouve l'équation d'une courbe selon la forme y = ? passant par le point (0,3) et dont la pente en tout point (x, y) est donnée par /3

$$\frac{xy}{1 + x^2}$$

Indice : N'oubliez pas vos lois de log!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2}$$

$$u = 1 + x^2$$

$$\frac{du}{2x} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$\ln y = \int \frac{\cancel{x}}{u}\,\frac{du}{2\cancel{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + k$$

$$\ln 3 = \frac{1}{2}\ln|1+0^2| + k$$

$$\ln 3 = k$$

$$\ln y = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \ln 3$$

$$\ln y = \ln\left(|1+x^2|^{\frac{1}{2}} \cdot 3\right)$$

$$y = 3\sqrt{1+x^2}$$

5. Une voiture accélère au taux de 0,5 m/s² à partir d'une position immobile. En combien de temps la voiture atteindra-t-elle la vitesse de 30 m/s ? Quelle sera alors la distance parcourue ? /4

$a = 0,5$

$v = 0,5t + k$

initiale $0 = 0,5(0) + k$

$k = 0$

$v = 0,5t$ 1

$d = \frac{0,5t^2}{2} + k$ 1

initiale $0 = \frac{0,5(0)^2}{2} + \cancel{k}$

$k = 0$ $d = t^2/4$

t à 30 m/s

$30 = 0,5t$

$60 \text{ sec} = t$ 1

distance à 60 sec

$d = \frac{(60)^2}{4}$ 1

$\boxed{d = 900m}$

6. Donne la position et l'accélération d'un objet au temps 9 secondes si la vitesse mesure $4t + 3\sqrt{t}$ cm/s. La position initiale de l'objet est 10 cm. /4

$v = 4t + 3(t)^{\frac{1}{2}}$

$d = \int 4t + 3t^{\frac{1}{2}} = 2t^2 + 2t^{3/2} + k$

$10 = 2(0)^2 + 2(0)^{3/2} + k$ 1

$10 = k$

$d = 2t^2 + 2(\sqrt{t})^3 + 10$

$d = 2(9)^2 + 2(\sqrt{9})^3 + 10$

$d = 162 + 54 + 10$ 1

$\boxed{d = 226cm}$

$a = 4 + \frac{3}{2\sqrt{t}}$ 1

$a = 4 + \frac{3}{2 \cdot \sqrt{9}}$ 1

$a = 4 + \frac{1}{2} = \boxed{4,5 cm/s^2}$

Calcul 42S

Unité : Les Intégrales : Test les intégrales indéfinies, définies et les équations différentielles

7. Deux objets partent du même point sur la même droite et leurs vitesses sont données par V1 = 6t + 5 et V2 = 9t – 10.

Calcule la distance qui les sépare lorsque leurs vitesses sont égales.

$6t+5=9t-10$

$15=3t$

$t=5$ ✓

$d_1 = 3t^2+5t+k$

$0 = 3(0)^2+5(0)+k \quad k=0$

$d_1 = 3t^2+5t$ ✓

$d_2 = 4{,}5t^2-10t+k$

$0 = 4{,}5(0)^2-10(0)+k \quad k=0$

$d_2 = 4{,}5t^2-10t$ ✓

$d_1 = 3(5)^2+5(5)$

$d_1 = 100$

$d_2 = 4{,}5(5)^2-10(5)$

$= 62{,}5$

✓

distance qui les sèpare

$d = 100 - 62{,}5 = \boxed{37{,}5}$

#8. $a(t) = 4\cos 2t$ ~~$u = \cos 2t$~~

a) $v = \int 4\cos 2t\,dt \quad v = 2\sin 2t + k_1$ $v(0)=1$

$v(0) = 2\sin 2(0) + k_1 = 1 \quad \boxed{k_1 = 1}$

$v = 2\sin 2t + 1$

b) $s = \int (2\sin 2t + 1)\,dt$ $s(0)=0$

$s = -\cos 2t + t + k_2$

$0 = -\cos 2(0) + 0 + k_2 \quad k_2 = 1$

$0 = -(1) + k_2$

$s = -\cos 2t + t + 1$

c) particule au repose

$v(t) = 0$

$0 = 2\sin 2t + 1$

$-\frac{1}{2} = \sin 2t$

$2t = \frac{7\pi}{6} \quad \boxed{t = \frac{7\pi}{12}} \quad 2t = \frac{11\pi}{6} \quad t = \frac{11\pi}{12}$