Leçon 5 : Les Séries géométrique convergente

Les séries géométriques infinies

Formule pour une série géométrique infinie convergente :

$$S_\infty = \frac{t_1}{1-r}, \text{ où } -1 < r < 1$$

Série convergente :

- Est une série infinie dont la suite des sommes partielles tend vers une valeur donnée par exemple, 1 + ½ + ¼ + 1/8 + …

Ex : Série 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 **r =1/2 = 0,5**
S4 = 7,5 **S9 = 7,9844** **S17 = 7,9999**

Cette série semble converger vers 8. Vérifie avec la formule d'une série géométrique infinie convergente.

$$S_\infty = \frac{t_1}{1-r}, \text{ où } -1 < r < 1$$

$$S_\infty = \frac{4}{1-0,5}$$

$$S_\infty = \frac{4}{0,5}$$

$$S_\infty = 8$$

Série divergente :

- Est une série infinie dont la suite des sommes partielles ne tend pas vers une valeur donnée par exemple, 2 + 4 + 8 + 16 + …

S4 = 60 S7 = 508 S10 = 4092

La série continue à croire, alors la série ne va pas converger vers un numéro.

1. Détermine si chaque série géométrique infinie est convergente ou divergente. Calcule la somme, si elle existe.

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots$ convergente

$4 + 8 + 16 + \ldots$ divergente

$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{5}}$ $S_\infty = \frac{1}{\frac{4}{5}}$

$S_\infty = 1 \div \frac{4}{5}$ $S_\infty = 5/4$

2.

On peut exprimer $0,\overline{584}$ sous la forme d'une série géométrique infinie :

$0,\overline{584} = 0,584\,584\,584\ ...$

$= 0,584 + 0,000584 + 0,000000584 + ...$

Détermine la somme exacte de cette série.

convergente

$r = \frac{1}{1000}$

$S_\infty = \frac{t_1}{1-r}$ $S_\infty = \frac{0,584}{1-\frac{1}{1000}}$ $S_\infty = 0,\overline{584}$

3. Calcule la somme de la série géométrique : 1 + ½ + ¼ + … convergente

$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $S_\infty = 1 \div \frac{1}{2}$

$S_\infty = 2$

4. Calcule la somme de la série géométrique : 5 + 10/3 + 20/9 + … convergente

$r = \frac{2}{3}$

$S_\infty = \frac{5}{1-2/3}$ $5 \div \frac{1}{3}$

$S_\infty = 15$

Pratique :

1. Détermine si chaque série géométrique infinie est convergente ou divergente. Indique la somme de la série, s'il y a lieu.

a) 1 – 1/3 + 1/9 - … convergente b) 2 – 4 + 8 - … divergente

$S_\infty = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 1 \div \frac{4}{3} = \boxed{\frac{3}{4}}$

2. Écrit 0,777… sous la forme d'une série géométrique.

0,777 + 0,000777 + 0,000000777 . . . .

3. Détermine la somme de la série géométrique.

T1 = -4 et r = 4/5

$S_\infty = \frac{-4}{1-\frac{4}{5}}$ $S_\infty = -4 \div \frac{1}{5}$

$\boxed{S_\infty = -20}$

Devoir Leçon 5 : Les Séries géométrique convergente

1. Indique si chaque série géométrique est convergente ou divergente.

a) $80 + 20 + 5 + 5/4$ $r = \frac{1}{4}$

convergente

b) $-30 + 20 - 40/3 + 80/9$

convergente

$-\frac{40}{3} \div 20$

$-\frac{40}{3} \times \frac{1}{20} = -\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$

2. Détermine la somme de chaque série géométrique, si elle existe.

a) t1 = 10 et 4 = -2/3

$S_\infty = \frac{10}{1-(-2/3)} = 6$

b) $10 + 10\sqrt{3} + 30 + 30\sqrt{3} + \ldots$

$r = \sqrt{3}$

divergente

c) $\frac{5}{3} - \frac{5}{9} + \frac{5}{27} - \frac{5}{81} + \cdots$

$r = \frac{1}{3}$

$S_\infty = \frac{5}{3} \div \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$

d) $8 + \frac{16}{3} + \frac{32}{9} + \frac{64}{27} + \cdots$ $r = \frac{2}{3}$

$S_\infty = \frac{8}{1-2/3} = 24$

3. Exprime chaque nombre sous la forme d'une série géométrique. Détermine la somme de la série.

a) $0,\overline{63}$

$0,636363$

$= 0,63 + 0,0063 + 0,000063 \ldots$

b) $7,\overline{45}$

$7,4545\ldots$

$7,45 + 7,0045 + 7,000045 \ldots$

c) $0,123\overline{456}$

$0,123456 + 0,123000456$

$+ 0,123000000456$ ---

4. Le terme général d'une suite géométrique infinie $tn = 7\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$. Détermine la somme de la série, si elle existe.

$r = \frac{1}{3}$ $t_1 = 7$

$S_\infty = \frac{7}{1-\frac{1}{3}}$ $S_\infty = 10,5$

5. La somme d'une série géométrique est $\frac{10}{3}$ et son premier terme est 5. Détermine sa raison géométrique.

$S_\infty = \frac{10}{3}$

$t_1 = 5$

$\frac{10}{3} = \frac{5}{1-r}$

$1-r = 5 \div \frac{10}{3}$

$1-r = \frac{15}{10}$

$1-r = 1,5$

$\boxed{r = -\frac{1}{2}}$

$-r = 0,5$

$r = -1/2$

6. La somme d'une série géométrique est $\frac{3\pi}{2}$ et sa raison géométrique est $\frac{1}{2}$. Détermine son premier terme.

$\frac{3\pi}{2} = \frac{t_1}{1-\frac{1}{2}}$

$\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = t_1$

$t_1 = 3\pi/4$

7. La balle tombe sur le sol d'une hauteur de 2,0 m. À chaque rebond, la balle atteint 75 % de la hauteur de laquelle elle est tombée. Calcule la distance totale parcourue par la balle jusqu'au moment où elle s'arrête.

$r = 0,75$

$t_1 = 2$

$S_\infty = \frac{2}{1-0{,}75}$

$\boxed{S_\infty = 8 \text{ m}}$

8. Détermine les valeurs de x pour lesquelles la série $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ converge.

$\frac{x}{1} = r$ $\qquad \frac{x^2}{x} = r$ $\qquad r = x$

$S_\infty = \frac{1}{1-x}$

9. La somme d'un série géométrique infinie est égale à trois fois son premier terme. Détermine sa raison géométrique.

$S_\infty = t_1 \cdot 3$

$3t_1 = \frac{t_1}{1-r}$

$1-r = \frac{\cancel{t_1}}{3\cancel{t_1}}$

$1-r = \frac{1}{3}$

$1-\frac{1}{3} = r$

$2/3 = r$