

Mathématique

Pré-Calcul 40S

Revue

Permutation, Combinaison et Binôme de Newton

Nom : _____

Date : _____

1. Il y a 9 filles et 7 garçons dans une classe de mathématiques d'où 5 personnes doivent être choisies pour siéger à un comité.

a) Combien de comités différents de 5 personnes peut-on former si un des garçons, William, doit siéger au comité?

$$a) \quad {}_1 C_1 \cdot {}_{15} C_4 = 1365$$

1 point

b) Combien de comités différents de 5 personnes peut-on former s'il faut que 2 filles et 3 garçons siègent au comité?

$$b) \quad {}_9 C_2 \cdot {}_7 C_3 = 1260$$

0,5 point pour ${}_9 C_2$

0,5 point pour ${}_7 C_3$

1 point pour le produit des combinaisons

2 points

2. Un aréna de hockey a 5 portes.

Détermine le nombre de façons que tu peux entrer par une porte et sortir par une autre porte.

$$\underline{5} \cdot \underline{4} = 20 \text{ façons}$$

1 point

3.

Identifie laquelle des expressions suivantes représente le 5^e terme dans le développement de $(4x^2 - 2y^3)^{15}$.

a) ${}_{15} C_5 (4x^2)^{10} (-2y^3)^5$

c) ${}_{15} C_4 (4x^2)^{10} (-2y^3)^5$

b) ${}_{15} C_5 (4x^2)^{11} (-2y^3)^4$

d) ${}_{15} C_4 (4x^2)^{11} (-2y^3)^4$

d)

4.

Dans le développement du binôme $\left(\frac{1}{x^3} - 2x^2\right)^9$, détermine quel terme contient x^3 .

Méthode 1

$$x^3 = (x^{-3})^{9-k} (x^2)^k$$

$$x^3 = x^{-27+3k+2k}$$

$$3 = -27 + 3k + 2k$$

$$30 = 5k$$

$$6 = k$$

∴ le 7^e terme contient x^3

0,5 point pour la substitution

0,5 point pour avoir isolé k

1 point pour avoir identifié le 7^e terme (ou un terme conséquent avec la valeur de k)

2 points

Méthode 2

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^9, \left(\frac{1}{x^3}\right)^8 (x^2), \left(\frac{1}{x^3}\right)^7 (x^2)^2$$

$$x^{-27}, x^{-22}, x^{-17}$$

∴ le 7^e terme contient x^3

1 point pour avoir déterminé la régularité

1 point pour avoir identifié le 7^e terme (ou un terme conséquent avec la régularité)

2 points

5.

Résous algébriquement :

$${}_n P_3 = 4!(n-1)$$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 4!(n-1)$$

$$\frac{n \cancel{(n-1)} (n-2) \cancel{(n-3)}!}{\cancel{(n-3)}!} = 4! \cancel{(n-1)}$$

$$n(n-2) = 24$$

$$n^2 - 2n - 24 = 0$$

$$(n-6)(n+4) = 0$$

$$n = 6 \quad \cancel{n = -4}$$

0,5 point pour la substitution

1 point pour le développement des factoriels
0,5 point pour la simplification des factoriels

0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère
0,5 point pour la valeur de n

3 points

6.

Détermine et simplifie le quatrième terme dans le développement de $(2x^4 - 3y)^8$.

$$t_4 = {}_8C_3 (2x^4)^5 (-3y)^3$$

2 points (1 point pour ${}_8C_3$; 0,5 point pour chaque facteur conséquent)

$$= 56(32x^{20})(-27y^3)$$

$$= -48\,384x^{20}y^3$$

1 point pour la simplification (0,5 point pour le coefficient; 0,5 point pour les exposants)

3 points

7.

Il y a 6 différents livres qu'on distribue en parts égales entre trois personnes.

Identifie quelle expression représente le nombre de combinaisons possibles?

a) ${}_6C_2 \cdot {}_6C_2 \cdot {}_6C_2$

c) ${}_2C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot {}_2C_2$

b) ${}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2$

d) $3 \cdot {}_6C_2$

b)

8.

Justifie pourquoi le développement binomial de $(x + x^3)^7$ n'a pas un terme contenant x^{10} .

Méthode 1

$$(x)^7, (x^6)(x^3)^1, (x)^5(x^3)^2, \dots$$

$$x^7, x^9, x^{11}, \dots$$

1 point pour avoir déterminé le modèle

Les exposants augmentent de 2.

Donc, x^{10} n'est pas dans le modèle

1 point pour la justification

2 points

Méthode 2

$$x^{7-r} (x^3)^r = x^{10}$$

$$x^{7+2r} = x^{10}$$

$$7 + 2r = 10$$

$$2r = 3$$

$$r = \frac{3}{2}$$

Le développement binomial ne contient pas x^{10} parce que la valeur de r doit être un nombre entier.

2 points

0,5 point pour la substitution

0,5 point pour avoir isolé r

1 point pour la justification

2 points

9. Kiandra peut télécharger 24 différents films sur son ordinateur. Détermine le nombre de façons qu'elle peut choisir 15 films.

$${}_{24}C_{15} = 1\,307\,504 \text{ combinaisons}$$

1 point

10. Ishmael a 4 chiens, 5 chats et 3 chevaux. S'il les place tous dans une rangée, détermine le nombre de façons dont ils peuvent être placés si les animaux de même type doivent être groupés ensemble.

$$\frac{3!}{\text{types d'animaux}} \cdot \frac{4!}{\text{chiens}} \cdot \frac{5!}{\text{chats}} \cdot \frac{3!}{\text{chevaux}} = 103\,680 \text{ façons}$$

1 point pour avoir placé les animaux de même type ensemble
1 point pour l'arrangement des chiens, des chats et des chevaux

2 points

- 11.

Résous algébriquement :

$${}_n C_3 = n - 2$$

$$\frac{n!}{(n-3)!3!} = n-2$$

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}!}{\cancel{(n-3)}!3!} = \cancel{n-2}$$

$$n(n-1) = 6$$

$$n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n-3)(n+2) = 0$$

$$n = 3 \quad \cancel{n = -2}$$

0,5 point pour la substitution

1 point pour le développement des factorielles

0,5 point pour la simplification des factorielles

0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère
0,5 point pour la valeur de n

3 points

12.

Détermine quel terme contient $\frac{1}{x^6}$ dans le développement du binôme $\left(\frac{2}{x^3} + 3x^2\right)^7$.

Méthode 1

$$\left(x^{-3}\right)^{7-k} \left(x^2\right)^k = x^{-6}$$

$$x^{-21+3k} x^{2k} = x^{-6}$$

$$x^{-21+5k} = x^{-6}$$

$$-21 + 5k = -6$$

$$5k = 15$$

$$k = 3$$

\therefore le quatrième terme contient $\frac{1}{x^6}$

0,5 point pour la substitution

0,5 point pour avoir isolé k

1 point pour le quatrième terme (ou un terme conséquent avec la valeur de k)

2 points

Méthode 2

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^7, \left(\frac{1}{x^3}\right)^6 (x^2), \left(\frac{1}{x^3}\right)^5 (x^2)^2, \dots$$

$$\frac{1}{x^{21}}, \frac{1}{x^{16}}, \frac{1}{x^{11}}, \dots$$

∴ le quatrième terme contient $\frac{1}{x^6}$

1 point pour avoir déterminé la régularité

1 point pour le quatrième terme (ou un terme conséquent avec la régularité)

2 points

13.

Résous algébriquement :

$${}_n C_2 = 3n + 4$$

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} = 3n + 4$$

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 2!(3n+4)$$

$$n(n-1) = 2(3n+4)$$

$$n^2 - n = 6n + 8$$

$$n^2 - 7n - 8 = 0$$

$$(n-8)(n+1) = 0$$

$$n = 8 \quad \cancel{n = -1}$$

0,5 point pour la substitution dans l'équation

1 point pour le développement des factoriels
0,5 point pour la simplification des factoriels

0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère
0,5 point pour la valeur de n

3 points

14. Identifie le quatrième terme dans le développement de $(x + y)^5$.

a) $10x^4y$

c) $10x^2y^3$

b) $10x^3y^2$

d) $10xy^4$

c)

15. Justifie pourquoi les lettres du mot FRANCE ont un plus grand nombre d'arrangements possibles que les lettres du mot CANADA.

CANADA a des lettres qui se répètent qui, lorsqu'elles sont placées dans différents ordres, ne changent pas l'arrangement des lettres.

FRANCE : $6!$ CANADA : $\frac{6!}{3!}$

1 point

∴ France offre plus de possibilités d'arrangements.

16. Détermine combien de nombres à 4 chiffres, supérieurs à 4 000, peuvent être créés en utilisant les chiffres 2, 3, 4, 5 et 6 si les répétitions ne sont pas permises.

$$\frac{3}{4,5,6} \cdot \frac{4}{\text{options qui restent}} \cdot \frac{3}{\text{options qui restent}} \cdot \frac{2}{\text{options qui restent}} = 72$$

1 point pour la restriction de la 1^{re} position
1 point pour le principe fondamental du dénombrement

2 points

17. Il y a 20 garçons et 11 filles qui peuvent être sélectionnés pour former une équipe. Détermine le nombre de façons dont une équipe de 7 garçons et de 5 filles peut être formée.

$${}_{20}C_7 \cdot {}_{11}C_5 = 35\,814\,240$$

0,5 point pour ${}_{20}C_7$

0,5 point pour ${}_{11}C_5$

1 point pour le produit des combinaisons

2 points

18. Frank, Liam, Chan et Thao vont au cinéma.

Détermine le nombre de façons qu'ils peuvent s'asseoir dans une rangée de quatre chaises si Frank et Chan doivent s'asseoir un à côté de l'autre.

$$3!2!$$

0,5 point pour $3!$

0,5 point pour $2!$ écris comme un produit de factoriels

$$12$$

1 point

19.

Dans le développement du binôme $\left(x^2 - \frac{2}{y}\right)^8$, détermine le terme du milieu dans la forme simplifiée.

$$t_5 = {}_8 C_4 (x^2)^{8-4} \left(-\frac{2}{y}\right)^4 \quad \text{2 points (1 point pour } {}_8 C_4; 0,5 \text{ point pour chaque facteur consécutif)}$$

$$t_5 = 70x^8 \left(\frac{16}{y^4}\right)$$

$$t_5 = \frac{1120x^8}{y^4}$$

1 point pour la simplification (0,5 point pour le coefficient; 0,5 point pour les exposants)

3 points

20.

Résous algébriquement.

$${}_n P_2 = 9n$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 9n$$

0,5 point pour la substitution dans l'équation

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = 9n$$

1 point pour le développement des factoriels

$$n(n-1) = 9n$$

0,5 point pour la simplification des factoriels

$$n^2 - n = 9n$$

$$n^2 - 10n = 0$$

0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

$$n(n-10) = 0$$

0,5 point pour la valeur de n

$$\cancel{n=0} \quad n = 10$$

3 points

21.

Identifie la valeur de n dans l'équation ${}_n C_3 = {}_n C_6$.

- a) 3 b) 6 c) 9 d) 18
- c)

22.

Soit la 5^e rangée du triangle de Pascal. Détermine les valeurs de la prochaine rangée.

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 point