Mathématique
Pré-Calcul 40S

Revue
Identités
Trigonométriques

Nom : ________________

Date : _______________

1.

Prouve l'identité suivante pour toutes les valeurs permises de θ :

$$\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\tan\theta} = \frac{1}{\cos\theta\tan\theta}$$

Membre de gauche	Membre de droite

Méthode 1

Membre de gauche	Membre de droite
$\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$	$\dfrac{1}{\cos\theta\tan\theta}$
$\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$	$\dfrac{1}{\cos\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$
$\sin\theta + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$	$\dfrac{1}{\sin\theta}$
$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$	
$\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}$	
$\dfrac{1}{\sin\theta}$	

1 point pour la bonne substitution des identités

1 point pour les stratégies algébriques

1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

Méthode 2

Membre de gauche	Membre de droite
$\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$	$\dfrac{1}{\cos\theta\tan\theta}$
	$\dfrac{1}{\cos\theta\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$
	$\dfrac{1}{\sin\theta}$
	$\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta}$
	$\dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$
	$\sin\theta + \cos\theta\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$
	$\sin\theta + \cos\theta\cot\theta$
	$\sin\theta + \dfrac{\cos\theta}{\tan\theta}$

1 point pour la bonne substitution des identités

1 point pour les stratégies algébriques

1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

2.

Évalue :

$$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 1

d) $\sqrt{2}$

b)

3.

Une valeur non permise de x pour la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+1}$ est :

a) -1 b) 0 c) π d) $\frac{3\pi}{2}$

c)

4.

Identifie la fonction trigonométrique qui est équivalente à $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}$.

a) $\sin\frac{2\pi}{7}$

b) $\sin\frac{7\pi}{12}$

c) $\cos\frac{2\pi}{7}$

d) $\cos\frac{7\pi}{12}$

b)

5.

Détermine la valeur exacte de $\tan 75^\circ$.

$$\tan 75^\circ = \tan\left(30^\circ + 45^\circ\right)$$

1 point pour la combinaison

$$= \frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(1)}$$

1 point pour les valeurs exactes (0,5 point pour chacune)

2 points

$$= \frac{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

ou

$$= \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}}$$

6.

Résous l'équation suivante algébriquement pour θ, où $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$2\cos 2\theta = 1$$

Méthode 1

$$2\left(2\cos^2\theta - 1\right) = 1$$

1 point pour la substitution d'une bonne identité

$$4\cos^2\theta - 2 = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{3}{4}$$

$$\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \qquad \theta = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

1 point pour avoir isolé $\cos\theta$ (0,5 point pour chaque valeur)

2 points (0,5 point pour chaque valeur de θ)

4 points

Méthode 2

$$2\left(1 - 2\sin^2\theta\right) = 1$$

1 point pour la substitution d'une bonne identité

$$2 - 4\sin^2\theta = 1$$

$$-4\sin^2\theta = -1$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

1 point pour avoir isolé $\sin\theta$ (0,5 point pour chaque valeur)

2 points (0,5 point pour chaque valeur de θ)

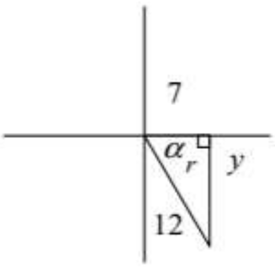
4 points

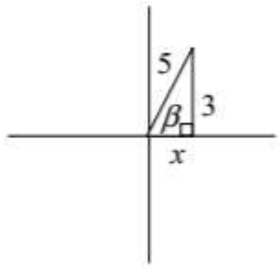
7.

Soit $\cos\alpha = \dfrac{7}{12}$ où α se trouve dans le quadrant IV, et $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$ où β se trouve dans le quadrant I, détermine la valeur exacte de :

a) $\sin(\alpha - \beta)$

a)





$$12^2 - 7^2 = y^2 \qquad 5^2 - 3^2 = x^2$$

$$95 = y^2 \qquad 16 = x^2$$

$$\pm\sqrt{95} = y \qquad \pm 4 = x$$

0,5 point pour la valeur de x
0,5 point pour la valeur de y

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{95}}{12}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{7}{12}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{-4\sqrt{95}}{60} - \frac{21}{60}$$

$$= \frac{-4\sqrt{95} - 21}{60}$$

0,5 point pour $\sin\alpha$
0,5 point pour $\cos\beta$
1 point pour la substitution dans la bonne identité

3 points

b) $\csc(\alpha - \beta)$

b) $\csc(\alpha - \beta) = \dfrac{60}{-4\sqrt{95} - 21}$

1 point

8.

Soit l'identité $\sec\theta + \cos\theta = \dfrac{2 - \sin^2\theta}{\cos\theta}$,

a) détermine les valeurs non permises de θ, dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) $\cos\theta = 0$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

1 point pour les valeurs non permises
(0,5 point pour chaque valeur)

1 point

b) prouve l'identité pour toutes les valeurs permises de θ.

Membre de gauche	Membre de droite

Méthode 1

b)

Membre de gauche	Membre de droite
$\sec\theta + \cos\theta$	$\dfrac{2-\sin^2\theta}{\cos\theta}$
$\dfrac{1}{\cos\theta} + \cos\theta$	
$\dfrac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}$	
$\dfrac{1+1-\sin^2\theta}{\cos\theta}$	
$\dfrac{2-\sin^2\theta}{\cos\theta}$	

1 point pour la substitution des bonnes identités

1 point pour les stratégies algébriques

1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

Méthode 2

Membre de gauche	Membre de droite
$\sec\theta + \cos\theta$	$\dfrac{2-\sin^2\theta}{\cos\theta}$
	$\dfrac{2-\left(1-\cos^2\theta\right)}{\cos\theta}$
	$\dfrac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta}$
	$\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$
	$\sec\theta + \cos\theta$

1 point pour la substitution des bonnes identités

1 point pour les stratégies algébriques

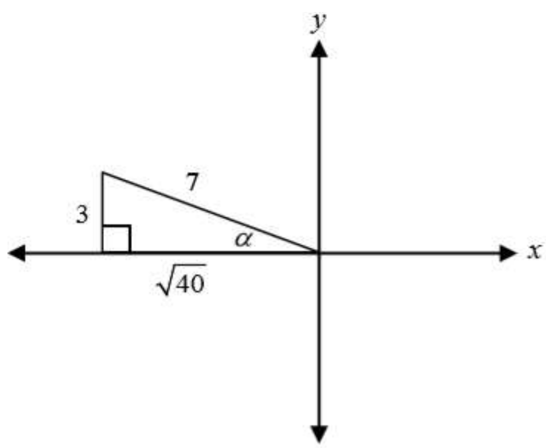
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

9.

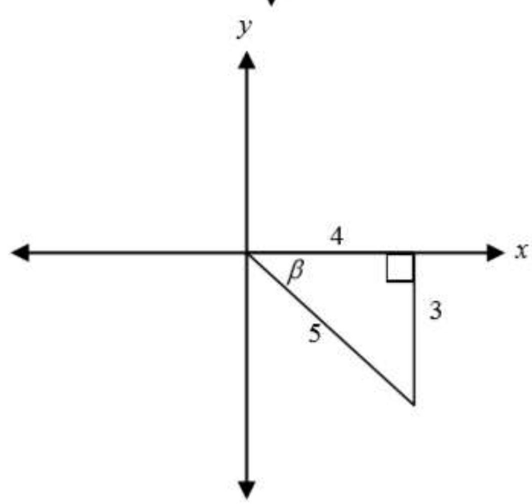
Si $\sin\alpha = \dfrac{3}{7}$, où α se trouve dans le quadrant II et $\cos\beta = \dfrac{4}{5}$, où β se trouve dans le quadrant IV, détermine la valeur exacte de :

a) $\sin(\alpha - \beta)$



$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + 9 = 49$$
$$x^2 = 40$$
$$x = \pm\sqrt{40}$$

0,5 point pour la valeur de x



$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$16 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 9$$
$$y = \pm 3$$

0,5 point pour la valeur de y

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ &= \left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{-\sqrt{40}}{7}\right)\left(\frac{-3}{5}\right) \\ &= \frac{12}{35} - \frac{3\sqrt{40}}{35} \\ &= \frac{12 - 3\sqrt{40}}{35} \text{ ou } \frac{12 - 6\sqrt{10}}{35}\end{aligned}$$

0,5 point pour $\cos\alpha$
0,5 point pour $\sin\beta$
1 point pour la substitution dans la bonne identité

3 points

b) $\cos 2\alpha$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$
$$= \left(\frac{-\sqrt{40}}{7}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^2$$
$$= \frac{40}{49} - \frac{9}{49}$$
$$= \frac{31}{49}$$

ou

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$
$$= 2\left(\frac{-\sqrt{40}}{7}\right)^2 - 1$$
$$= 2\left(\frac{40}{49}\right) - 1$$
$$= \frac{80}{49} - 1$$
$$= \frac{31}{49}$$

ou

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$
$$= 1 - 2\left(\frac{3}{7}\right)^2$$
$$= 1 - 2\left(\frac{9}{49}\right)$$
$$= 1 - \frac{18}{49}$$
$$= \frac{31}{49}$$

1 point pour la substitution d'une bonne identité

1 point

10.

Prouve l'identité suivante pour toutes les valeurs permises de θ.

$$\frac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta} = \cot\theta$$

Membre de gauche	Membre de droite

Membre de gauche	Membre de droite
$\dfrac{\sin 2\theta}{1-\cos 2\theta}$	$\cot\theta$
$\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1-\left(1-2\sin^2\theta\right)}$	
$\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}$	
$\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
$\cot\theta$	

1 point pour la substitution des bonnes identités
1 point pour les bonnes stratégies algébriques
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité.

3 points

11.

Résous $\cos 2\theta = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Méthode 1

$$1-2\sin^2\theta = 0$$

1 point pour l'identité d'angle double

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2}$$

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\sin\theta = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

1 point pour avoir isolé $\sin\theta$

$\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

1 point pour les valeurs de θ
(0,5 point pour chaque branche)

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \frac{\pi}{4}+\pi k\\ &= \frac{3\pi}{4}+\pi k\end{aligned}\right\}\text{où } k\in\mathbb{Z} \ \textbf{ou}\ \theta = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ \text{où } k\in\mathbb{Z}$$

1 point pour la solution générale

4 points

$$2\cos^2\theta - 1 = 0$$ 1 point pour l'identité d'angle double

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$ 1 point pour avoir isolé $\cos\theta$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$ 1 point pour les valeurs de θ
(0,5 point pour chaque branche)

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{4} + \pi k \\ &= \frac{3\pi}{4} + \pi k \end{aligned}\right\} \text{où } k \in \mathbb{Z} \textbf{ ou } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ \text{où } k \in \mathbb{Z}$$ 1 point pour la solution générale

4 points

Méthode 3

$$\cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$ 2 points pour les valeurs de 2θ (1 point pour chaque valeur)

$$\left.\begin{aligned} 2\theta &= \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\theta &= \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned}\right\} \text{où } k \in \mathbb{Z}$$ 1 point pour la solution générale

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi k$$ 1 point pour les valeurs de θ

4 points

12.

Détermine la valeur exacte de $\cos 15^\circ$.

$$
\begin{aligned}
\cos\left(15^\circ\right) &= \cos\left(60^\circ - 45^\circ\right) \\
&= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}
$$

1 point pour la substitution dans la bonne identité

2 points pour les valeurs (0,5 point pour chaque valeur exacte)

3 points