

Mathématique

Pré-Calcul 40S

Revue

Fonctions

Exponentielles et

Logarithmiques

Nom : _____

Date : _____

1.

Résous :

$$6(5)^{3x+2} = 9^{2-x}$$

$$\log [6(5)^{3x+2}] = \log 9^{2-x}$$

$$\log 6 + \log 5^{3x+2} = \log 9^{2-x}$$

$$\log 6 + (3x + 2) \log 5 = (2 - x) \log 9$$

$$\log 6 + 3x \log 5 + 2 \log 5 = 2 \log 9 - x \log 9$$

$$3x \log 5 + x \log 9 = 2 \log 9 - 2 \log 5 - \log 6$$

$$x(3 \log 5 + \log 9) = 2 \log 9 - 2 \log 5 - \log 6$$

$$x = \frac{2 \log 9 - 2 \log 5 - \log 6}{3 \log 5 + \log 9}$$

$$x = -0,087\ 707$$

$$= -0,088$$

0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

1 point pour la loi du logarithme du produit

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

0,5 point pour avoir rassemblé les termes avec x

0,5 point pour avoir isolé x

0,5 point pour avoir évalué le quotient des logarithmes

4 points

2.

Évalue :

$$\log_4 2$$

$$\frac{1}{2}$$

1 point

3.

Estime la valeur de $\log_2 5$.

Justifie ta réponse.

$$\left. \begin{array}{l} \log_2 4 = 2 \\ \log_2 8 = 3 \end{array} \right\}$$

0,5 point pour la justification

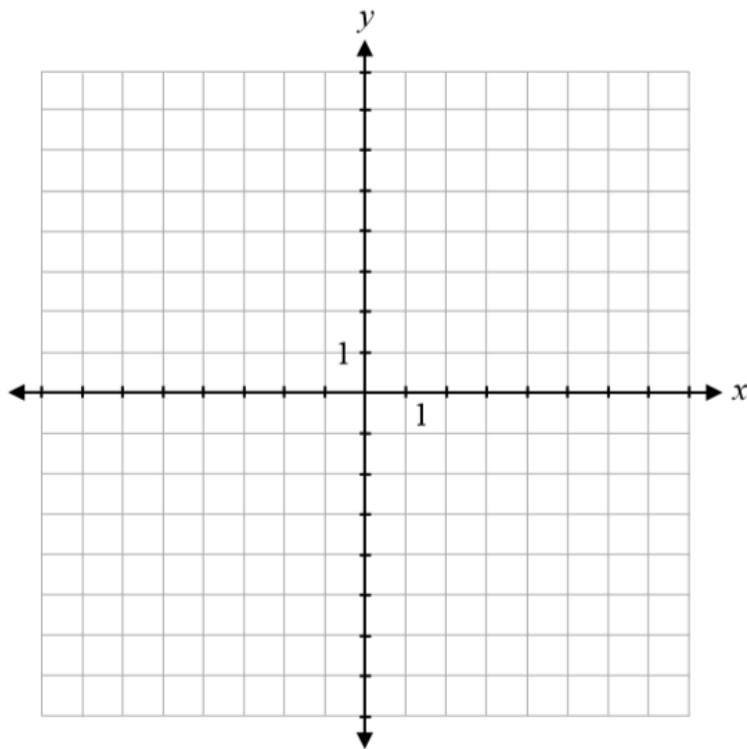
$$\therefore \log_2 5 \approx 2,3$$

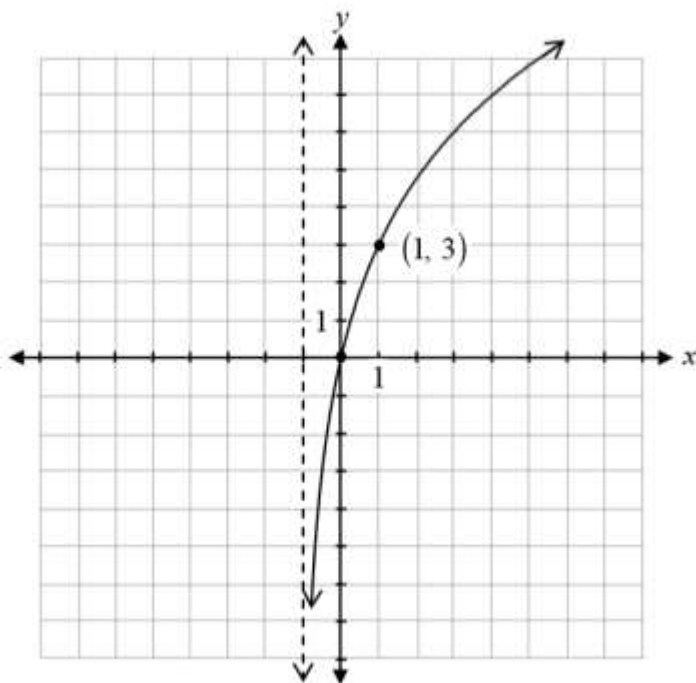
0,5 point pour la valeur estimée dans l'intervalle $[2,1; 2,4]$

1 point

4.

Trace le graphique de la fonction $f(x) = 3 \log_2 (x + 1)$.





1 point pour une fonction logarithmique croissante
 1 point pour l'étirement vertical
 1 point pour le comportement asymptotique à $x = -1$

3 points

5.

Résous :

$$4 \log_3 2 - \frac{1}{3} \log_3 8 = \log_3 a$$

Méthode 1

$$\log_3 2^4 - \log_3 8^{\frac{1}{3}} = \log_3 a$$

$$\log_3 16 - \log_3 2 = \log_3 a$$

$$\log_3 \left(\frac{16}{2} \right) = \log_3 a$$

$$\log_3 8 = \log_3 a$$

$$a = 8$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance (0,5 point pour chaque)

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

1 point pour avoir mis le signe d'égalité entre les arguments

3 points

Méthode 2

$$\log_3 2^4 - \log_3 8^{\frac{1}{3}} - \log_3 a = 0$$

$$\log_3 16 - \log_3 2 - \log_3 a = 0$$

$$\log_3 \left(\frac{16}{2a} \right) = 0$$

$$\log_3 \left(\frac{8}{a} \right) = 0$$

$$3^0 = \frac{8}{a}$$

$$1 = \frac{8}{a}$$

$$a = 8$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance (0,5 point pour chaque)

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

1 point pour la forme exponentielle

3 points

6.

À l'aide des lois des logarithmes, développe complètement l'expression :

$$\log_a \left(\frac{x^3}{y\sqrt{z}} \right)$$

$$\log_a \left(\frac{x^3}{y\sqrt{z}} \right) = \log_a x^3 - (\log_a y + \log_a \sqrt{z})$$

$$= 3 \log_a x - \left(\log_a y + \frac{1}{2} \log_a z \right)$$

$$= 3 \log_a x - \log_a y - \frac{1}{2} \log_a z$$

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient
1 point pour la loi du logarithme du produit

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance (0,5 point pour chaque)

3 points

7.

Étant donné $f(x) = 2^x + 1$, exprime l'équation de l'asymptote horizontale.

$$y = 1$$

1 point

8.

La banque de Sheeva lui prête 50 000 \$ à un taux d'intérêt annuel de 6 % composé mensuellement, pour acheter une voiture.

Étant donné que le dernier paiement sera un paiement partiel, détermine combien de paiements mensuels complets de 800 \$ que Sheeva devra verser.

Tu peux utiliser la formule ci-dessous.

$$PV = \frac{R \left[1 - (1 + i)^{-n} \right]}{i}$$

où PV = la valeur actuelle du montant emprunté

R = le montant de chaque paiement périodique

$i = \frac{\text{taux d'intérêt annuel (en décimale)}}{\text{le nombre de périodes de composition par année}}$

n = le nombre de paiements périodiques égaux

Exprime ta réponse sous forme d'un nombre entier.

$$50\,000 = \frac{800 \left[1 - \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{-n} \right]}{\frac{0,06}{12}}$$

0,5 point pour la substitution

$$250 = 800 \left[1 - (1 + 0,005)^{-n} \right]$$

$$0,3125 = 1 - 1,005^{-n}$$

$$-0,6875 = -1,005^{-n}$$

$$0,6875 = 1,005^{-n}$$

0,5 point pour la simplification

$$\log 0,6875 = -n \log 1,005$$

0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes
1 point pour la loi de logarithme d'une puissance

$$\frac{\log 0,6875}{-\log 1,005} = n$$

$$75,125\,880\,88 = n$$

0,5 point pour avoir isolé n

∴ 75 paiements mensuels complets seront nécessaires

3 points

9.

Résous :

$$7^{\log_7 2} = x$$

a) $x = 1$

b) $x = 2$

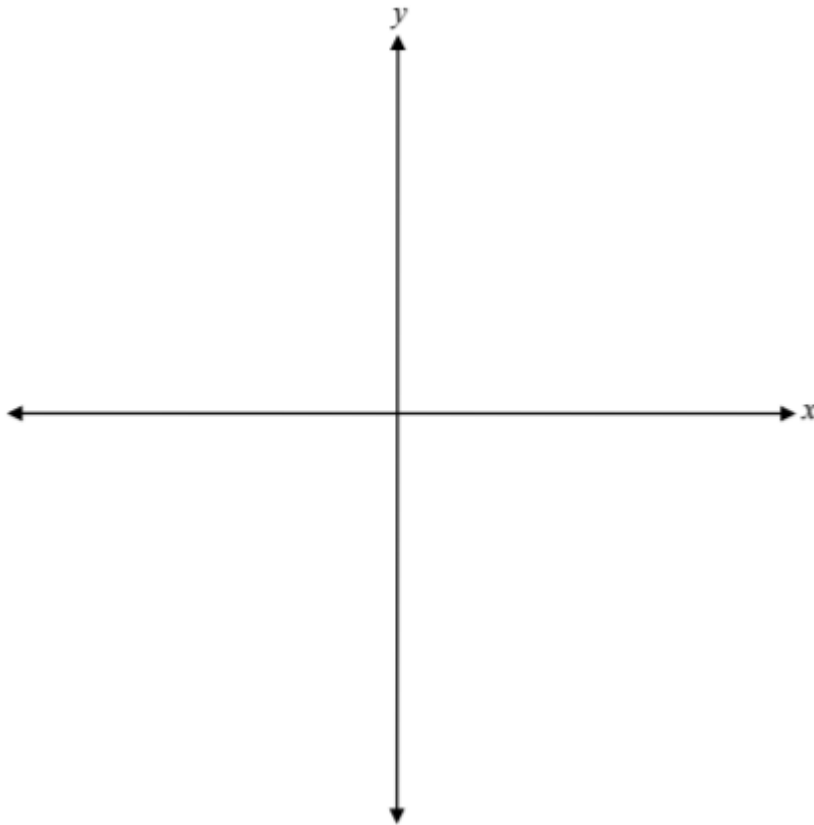
c) $x = 7$

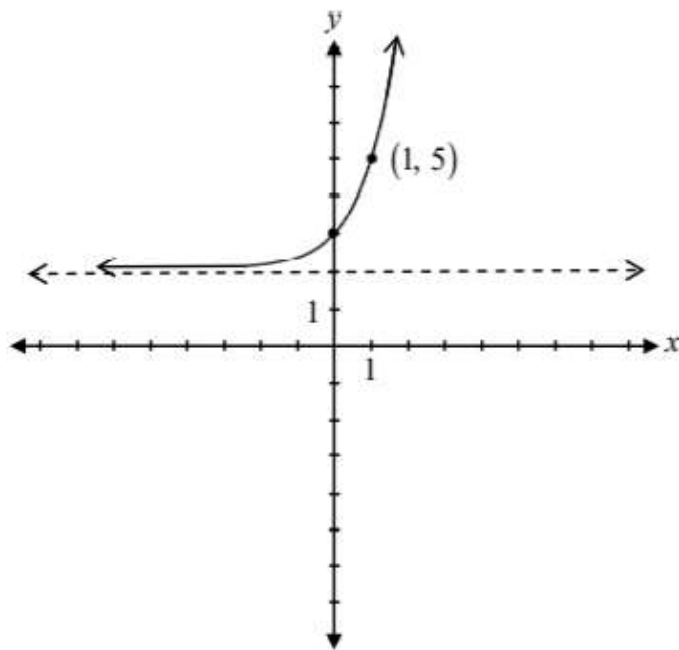
d) $x = 49$

b)

10.

Trace le graphique de $f(x) = 3^x + 2$.





1 point pour une fonction exponentielle croissante
 1 point pour le comportement asymptotique à $y = 2$

2 points

11.

Résous :

$$9^{2x+1} = 27^x$$

$$3^{2(2x+1)} = 3^{3x}$$

$$3^{4x+2} = 3^{3x}$$

$$4x + 2 = 3x$$

$$x = -2$$

1 point pour la conversion en une base commune

1 point pour la loi de l'exposant (0,5 point pour chaque côté)

0,5 point pour l'égalité des exposants

0,5 point pour avoir isolé x

3 points

12.

Peter investit 560 \$ par mois à un taux annuel de 4,2 %, composé mensuellement. Détermine combien d'investissements mensuels seront nécessaires afin que la valeur de l'investissement soit au moins 500 000 \$.

Exprime ta réponse sous forme d'un nombre entier.

Utilise la formule :

$$VF = \frac{R \left[(1 + i)^n - 1 \right]}{i}$$

où VF = la valeur future

R = le montant investi par période

$$i = \frac{\text{le taux d'intérêt annuel}}{\text{le nombre de périodes en une année}}$$

n = le nombre d'investissements

$$500\ 000 = \frac{560 \left[\left(1 + \frac{0,042}{12} \right)^n - 1 \right]}{\frac{0,042}{12}}$$

0,5 point pour la substitution

$$500\ 000 = \frac{560 \left[(1 + 0,0035)^n - 1 \right]}{0,0035}$$

$$500\ 000 = 160\ 000 \left(1,0035^n - 1 \right)$$

$$3,125 = 1,0035^n - 1$$

$$4,125 = 1,0035^n$$

0,5 point pour la simplification

$$\log 4,125 = \log 1,0035^n$$

0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

$$\log 4,125 = n \log 1,0035$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$n = \frac{\log 4,125}{\log 1,0035}$$

$$n = 405,584$$

0,5 point pour avoir isolé n

∴ 406 investissements mensuels seront nécessaires.

3 points

13.

Développe l'expression suivante à l'aide des lois des logarithmes.

$$\log\left(\frac{a}{b^4}\right)$$

$$\log a - \log b^4$$

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

$$\log a - 4 \log b$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

2 points

14.

Résous algébriquement l'équation suivante :

$$\log(x^2 + 5) - \log(x^2 + 1) = \log 3$$

$$\log\left(\frac{x^2 + 5}{x^2 + 1}\right) = \log 3$$

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

$$\frac{x^2 + 5}{x^2 + 1} = 3$$

0,5 point pour avoir mis le signe d'égalité entre les arguments

$$x^2 + 5 = 3(x^2 + 1)$$

$$x^2 + 5 = 3x^2 + 3$$

$$2 = 2x^2$$

$$1 = x^2$$

$$\pm 1 = x$$

0,5 point pour avoir isolé x

2 points

15.

Identifie la forme logarithmique de $5^x = 6$.

a) $\log_5 x = 6$

c) $\log_6 x = 5$

b) $\log_5 6 = x$

d) $\log_6 5 = x$

b)

16.

Si $\log 6 = p$, $\log 5 = r$ et $\log 2 = q$, exprime $\log 60$ en termes de p , q et r .

$$\log 60 = \log(6 \cdot 5 \cdot 2)$$

$$= \log 6 + \log 5 + \log 2$$

$$= p + r + q$$

0,5 point pour la combinaison

1 point pour la loi du logarithme du produit

0,5 point pour la substitution

2 points

17.

Justifie pourquoi 4,7 est une meilleure estimation que 4,3 pour la valeur de $\log_2 26$.

$$2^4 = 16 \quad 2^5 = 32$$

ou

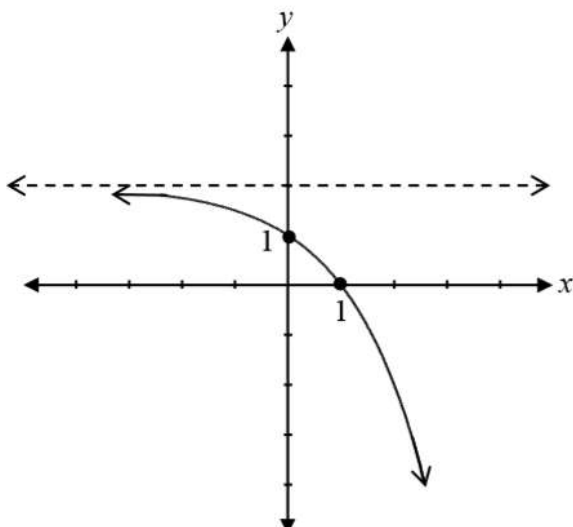
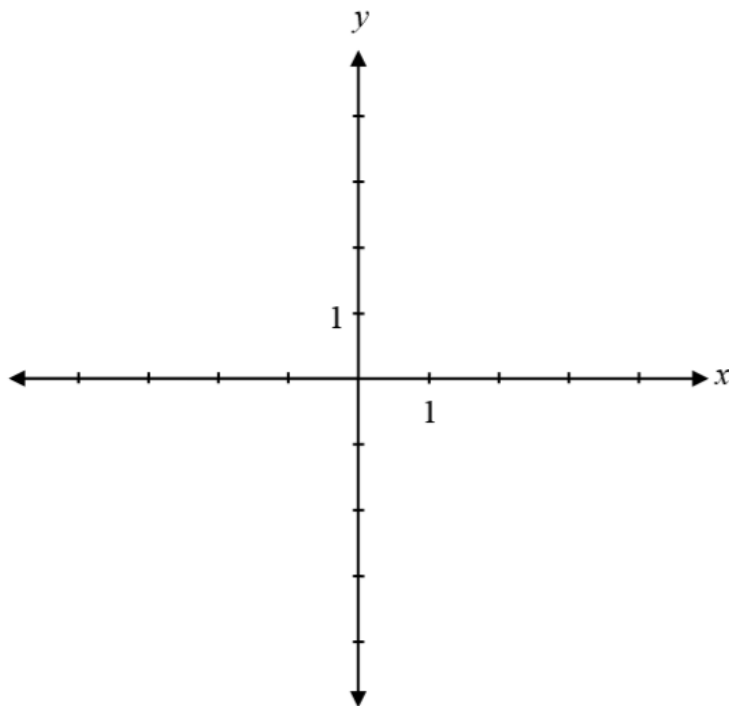
$$\log_2 16 = 4 \quad \log_2 32 = 5$$

26 est plus proche de 32 que 16; par conséquent $\log_2 26$ est plus proche de 5 que 4.

1 point

18.

Trace le graphique de $y = -2^x + 2$.



1 point pour la forme d'une fonction exponentielle
1 point pour la réflexion verticale
1 point pour le comportement asymptotique à $y = 2$

3 points

19.

Explique pourquoi le domaine de $y = \log_2(x - 1)$ est $x > 1$.

L'argument d'une fonction logarithmique doit être positif.

1 point

20.

Un système de filtration d'eau qui enlève les impuretés d'un échantillon d'eau peut être modélisé par $P = 0,25(0,55)^n$, où :

P = le pourcentage des impuretés encore présentes, dans la forme d'une décimale

n = le nombre de filtres

Détermine algébriquement combien de filtres seront nécessaires pour avoir moins de 1 % d'impuretés encore présentes dans l'échantillon d'eau. Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

$$0,01 = 0,25(0,55)^n$$

0,5 point pour la substitution

$$0,04 = (0,55)^n$$

$$\log(0,04) = n \log(0,55)$$

0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

$$\frac{\log(0,04)}{\log(0,55)} = n$$

0,5 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$n = 5,384\ 203$$

0,5 point pour avoir isolé n

\therefore Il faut 6 filtres.

2 points

21.

Identifie comment le graphique de $y = 3^x$ se transforme au graphique de $y = 3^{-x}$.

- a) réflexion par rapport à l'axe des x
- b) réflexion par rapport à l'axe des y
- c) réflexion par rapport à l'axe des x et l'axe des y
- d) réflexion par rapport à la droite $y = x$

a)

22.

Identifie l'équation $\log_a b = c$ sous forme exponentielle.

a) $h^c = a$ c) $a^b = c$

b) $a^c = b$ d) $c^a = b$

b)

23.

Décris comment la valeur de m dans l'équation $y = \log_3(x - m)$, $m \in \mathbb{R}$, affecte l'asymptote sur le graphique de $y = \log_3 x$.

L'asymptote verticale est déplacée horizontalement à la gauche ou à la droite de m unités de l'axe des y .

1 point

24.

Résous algébriquement.

$$25^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x+1}$$

$$\left(5^2\right)^x = \left(5^{-1}\right)^{-3x+1}$$

$$5^{2x} = 5^{3x-1}$$

$$2x = 3x - 1$$

$$x = 1$$

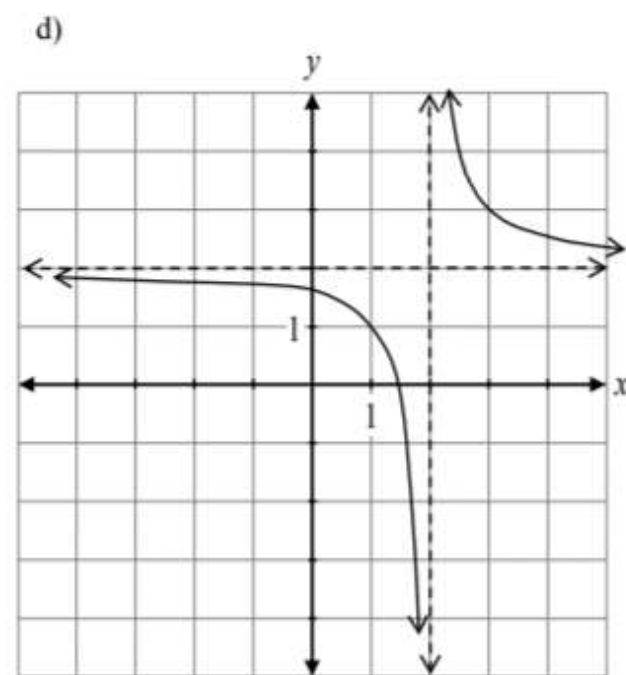
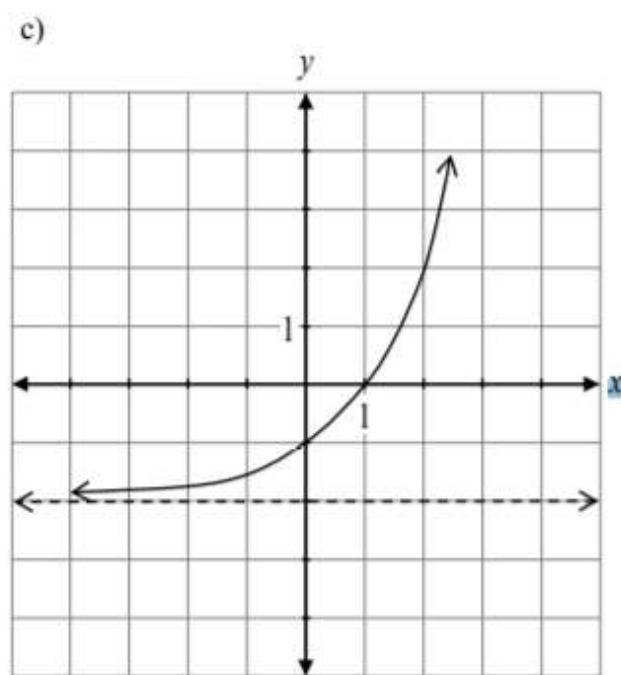
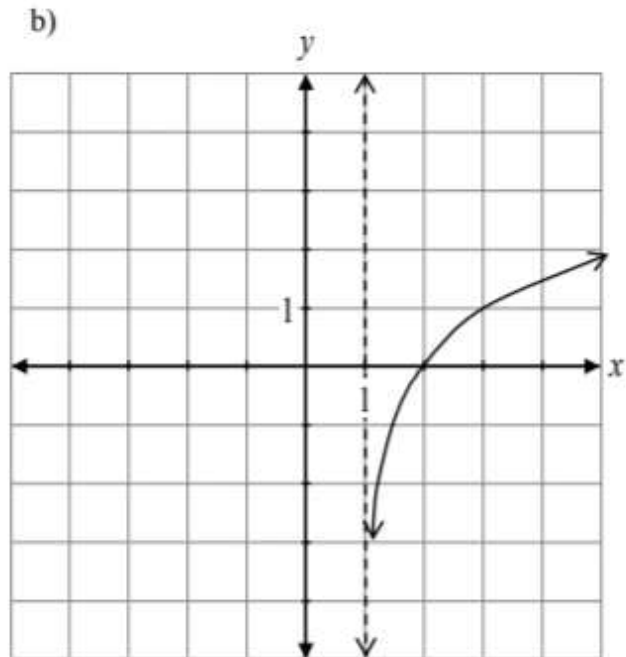
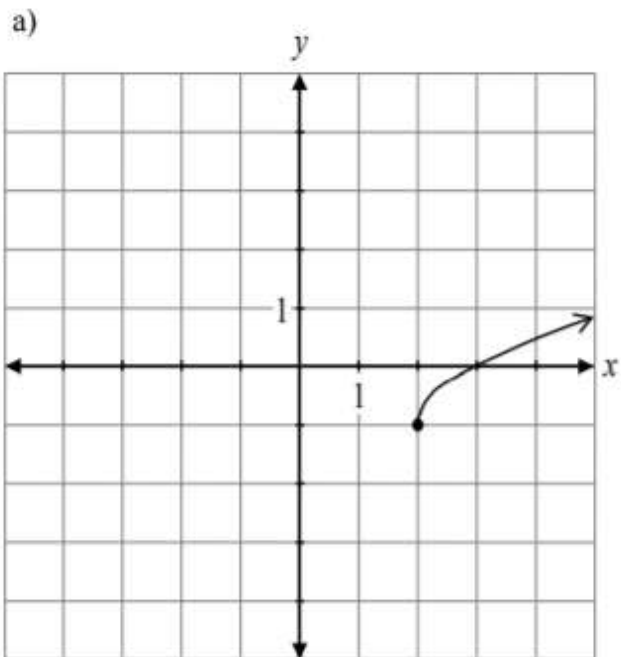
1 point pour avoir changé à une base commune

0,5 point pour la loi des exposants

0,5 point pour l'égalité des exposants

2 points

25. Détermine lequel des graphiques suivants représente une fonction logarithmique.



b)

26.

Résous algébriquement.

$$2 \log_a 3 + \log_a 4 = 2, \text{ où } a > 0$$

$$\log_a (3^2 \cdot 4) = 2$$

$$\log_a 36 = 2$$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance
1 point pour la loi du logarithme d'un produit

1 point pour la forme exponentielle

3 points

27.

Détermine l'abscisse à l'origine du graphique de $f(x) = e^x - 1$.

Méthode 1

$$0 = e^x - 1$$

0,5 point pour la substitution

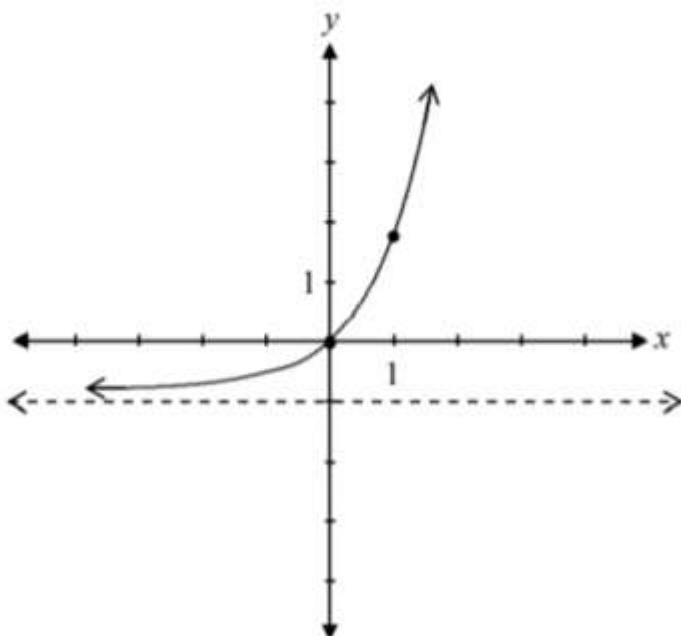
$$1 = e^x$$

$$x = 0$$

0,5 point pour avoir isolé x

1 point

Méthode 2



28.

Évalue.

$$\log_2 80 - \log_2 10$$

$$\log_2 \left(\frac{80}{10} \right)$$

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

$$\log_2 8$$

3

1 point pour avoir évalué le logarithme

2 points

29.

Résous l'équation suivante :

$$\log_3 (x+3) + \log_3 (x-5) = 2$$

$$\log_3 [(x+3)(x-5)] = 2$$

1 point pour la loi du logarithme d'un produit

$$(x+3)(x-5) = 3^2$$

1 point pour la forme exponentielle

$$x^2 - 2x - 15 = 9$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$(x-6)(x+4) = 0$$

$$x = 6 \quad \cancel{x = -4}$$

0,5 point pour avoir isolé x

0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

3 points

