Mathématique
Pré-Calcul 40S

Pratique et Devoir de Classe
Fonction Exponentielle et Logarithmique

Nom :

Table des matières

Les Identités Trigonométriques

Pratique de Classe

Pratique Leçon 1 : Les Identités inverses, les identités des quotients, l'identité de Pythagore et leurs valeurs non permises

1. a) Détermine les valeurs non permises, en degrés et radians, dans **l'équation**

$$cotanx = \frac{cosx}{sinx}$$

b) Vérifie que x = 45° et x = $\frac{\pi}{6}$ sont des solutions de l'équation.

2. a) Détermine les valeurs non permises pour $[0, 2\pi]$ dans l'expression :

$$\frac{sec\theta}{tan\theta}$$

b) Simplifie l'expression.

3. a) Simplifier l'identité pour le prouver.

$$\mathbf{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

b) Vérifie numériquement que l'équation $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ est vraie lorsque $x = \frac{3\pi}{4}$.

Pratique Leçon 2 : Les identités de la somme, de la différence et de l'angle double

1. Évalue.

a) $\cos 40^{\circ} \cos 50^{\circ} - \sin 40^{\circ} \sin 50^{\circ}$

b) $\sin\frac{5\pi}{14}\cos\frac{9\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14}\sin\frac{9\pi}{14}$

c) $1 - 2\sin^{2} 30^{\circ}$

d) $2\cos^{2} 90^{\circ} - 1$

e) $4 sin\frac{5\pi}{12} cos\frac{5\pi}{12}$

2. Détermine la valeur exacte de chaque expression.

a) $\cos 165^{\circ}$

b) $\tan \frac{11\pi}{12}$

3.

Soit $\sin \alpha = \frac{-4}{5}$ et $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ où α et β se trouvent dans le troisième quadrant.

a. Trouve les coordonnées de $P(\alpha - \beta)$.

b. Dans quel quadrant se trouve le côté terminal de $(\alpha - \beta)$?

Pratique Leçon 3 : Démontrer des identités

1.

a) Détermine les valeurs non permises de $\frac{\tan x \cos x}{\text{cosec } x} = 1 - \cos^2 x$.

b) Vérifie que l'équation peut être une identité, soit graphiquement à l'aide de la technologie, soit en remplaçant x par une valeur.

c) Démontre que l'identité est vraie pour toute valeur permise.

2.

Démontre que $\frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1} = \tan x$ pour toute valeur permise de x.

3.

Démontre que $\frac{1}{1 + \sin x} = \frac{\sec x - \sin x \sec x}{\cos x}$ pour toutes les valeurs permises de x.

4.

Démontre que $\frac{\sin 2x - \cos x}{4 \sin^2 x - 1} = \frac{\sin^2 x \cos x + \cos^3 x}{2 \sin x + 1}$ pour toutes les valeurs permises de x.

Pratique Leçon 4 : Résoudre des équations trigonométriques à l'aide d'identités

1\. Résous algébriquement chaque équation dans l'intervalle $0 \leq x < 2\pi$.

a) $\sin 2x - \cos x = 0$

b) $2 \cos x + 1 - \sin^2 x = 3$

2\. Résous algébriquement l'équation $\sin^2 x = \frac{1}{2} \tan x \cos x$ pour $0° \leq x < 360°$.

3.

Résous algébriquement l'équation $\cos 2x = \cos x$. Indique la ou les solutions générales, exprimées en radians.

4.

Résous algébriquement $3 \cos x + 2 = 5 \sec x$. Indique les solutions générales, exprimées en radians.

Devoir Identité Trigonométriques

1. Simplifie l'expression suivante :

$$cos^2x(1 + \ cot^2x)$$

a) sin^2x b) cos^2x c) cot^2x d) sec^2x

c)

2. L'expression (cotθ)(secθ) est équivalent à :

a) cscθ b) sinθ c) $\frac{cos\theta}{sin^2\theta}$ d) $\frac{sin\theta}{cos^2\theta}$

a)

3.

L'expression $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$ est équivalente à : a) secθ b) cscθ c) 1 − tanθ d) cotθ

b)

4.

Exprime $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta}$ sous forme d'une expression trigonométrique simple.

$$\frac{1}{\sin\theta} \div \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{1}{\cancel{\sin\theta}} \times \frac{\cancel{\sin\theta}}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta}$$

= sec$\boldsymbol{\theta}$

5.

Exprime $\dfrac{\cot\theta}{\csc\theta}$ en termes d'une fonction trigonométrique unique.

$$\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \div \frac{1}{\sin\theta} = \cos\theta$$

$$\frac{\cos\theta}{\cancel{\sin\theta}} \cdot \frac{\cancel{\sin\theta}}{1}$$

9.

6.

a) Exprime $\dfrac{\csc^2\theta - 1}{1 - \sin^2\theta}$ en termes de $\csc\theta$ uniquement.

Simplifie complètement ta réponse.

$$\frac{\frac{1}{\sin^2\theta} - 1}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta} \div \cos^2\theta$$

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \csc^2\theta$$

b) Détermine la valeur exacte de l'expression ci-dessus si $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.

$$\csc^2\frac{\pi}{6} = 4$$

$$\sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

7.

Détermine toutes les valeurs non permises de θ dans l'intervalle $[0,\ 2\pi]$.

$$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}+\csc\theta+\cot\theta$$

Explique ton raisonnement.

Pour déterminer les valeurs non permises, le dénominateur doit être égal à zéro.

1 point pour l'explication

Les dénominateurs de cette expression sont « $1+\cos\theta$ » et « $\sin\theta$ » $\left(\text{puisque } \csc\theta=\dfrac{1}{\sin\theta} \text{ et } \cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$.

1 point (0,5 point pour avoir identifié chaque restriction)

$\therefore 1+\cos\theta=0$ $\qquad$ $\sin\theta=0$

$\cos\theta=-1$ $\qquad$ $\theta=0,\ \pi,\ 2\pi$

$\theta=\pi$

$\therefore$ les valeurs non permises de θ dans l'intervalle $[0,\ 2\pi]$ sont $0,\ \pi$ et 2π.

1 point pour toutes les valeurs non permises de θ (0,5 point pour chaque équation)

3 points

8.

Une valeur non permise de x pour la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\cos x+1}$ est :

a) -1 $\qquad$ b) 0 $\qquad$ c) π $\qquad$ d) $\frac{3\pi}{2}$

c)

9.

Identifie une valeur non permise de x pour l'expression $\dfrac{1}{\cos 2x}$.

a) 0 $\qquad$ b) $\dfrac{\pi}{4}$ $\qquad$ c) $\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ d) π

b)

10.

Dans l'intervalle $0 \leq \theta < 2\pi$, identifie les valeurs non permises de θ pour l'identité trigonométrique :

$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$$

$\therefore$ l'identité ci-dessus est non-permise quand $\cos\theta = 0$ ou $\sin\theta = 0$.

1 point pour avoir identifié les valeurs non permises (0,5 point pour $\cos\theta = 0$; 0,5 point pour $\sin\theta = 0$)

$\cos\theta \neq 0$

$\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\sin\theta \neq 0$

$\theta \neq 0, \pi$

1 point pour avoir isolé θ (0,5 point pour chaque branche)

2 points

$\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

11.

Dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, détermine les valeurs non permises de θ dans l'expression $\csc\theta(\cos\theta + 1)$.

$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ — 1 point pour la substitution d'une bonne identité

$\sin\theta \neq 0$ — 0,5 point pour $\sin\theta \neq 0$

$\theta = 0, \pi, 2\pi$ — 0,5 point pour les valeurs conséquentes non permises

2 points

12.

a) Vérifie que l'équation $\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$ est vraie pour $x = \dfrac{\pi}{3}$.

a)

$\dfrac{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{3}}$	$\dfrac{\sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\sin\frac{\pi}{3}}$
$\dfrac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$
$\dfrac{1-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}$
$\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$	$\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{1}{2}$	

MG = MD

1 point pour les valeurs exactes (0,5 point pour $\sin\frac{\pi}{3}$; 0,5 point pour $\cos\frac{\pi}{3}$)

1 point pour la simplification (0,5 point pour MG; 0,5 point pour MD)

2 points

b) Explique pourquoi vérifier l'équation pour $x = \dfrac{\pi}{3}$, ne suffit pas pour conclure que l'équation est une identité.

b) Si on démontre que c'est vrai pour une valeur, ceci ne veut pas dire que c'est vrai pour toutes les valeurs.

1 point

13. Évalue

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)-\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan(4\pi)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot -\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot 0 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

14. Trouve les valeurs exactes.

a) $\cos 33^{o} \cos 27^{o} - \sin 33^{o} \sin 27^{o}$

$\cos(33^{\circ}+27^{\circ}) = \cos 60^{\circ}$

$\cos 60^{\circ} = \frac{1}{2}$

b) $\cos\frac{17\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{12} + \sin\frac{17\pi}{12}\sin\frac{2\pi}{12}$

$\cos\left(\frac{17\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}\right) = \cos\frac{15\pi}{12} = \cos\frac{5\pi}{4}$

$\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. Trouve la valeur exacte de $\cos^{2}75^{o} - \sin^{2}75^{o}$.

$\cos(2\cdot 75^{\circ}) = \cos 150^{\circ}$

$\cos 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

16. L'expression $1 - 2\sin^{2}70^{o}$ est équivalent à :

a) $\cos 35^{o}$ b) $\sin 35^{o}$ c) $\cos 140^{o}$ d) $\sin 140^{o}$

c)

17. Évalue les expressions :

a) $\sin 45^{o}\cos 15^{o} - \cos 45^{o}\sin 15^{o}$

$\sin(45^{\circ} - 15^{\circ}) = \sin 30^{\circ}$

$\sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$

b) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{2\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{2\pi}{12}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right) = \sin\frac{3\pi}{12}$

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

18. Détermine la valeur exacte de :

$$\frac{\tan 70^{\circ} - \tan 10^{\circ}}{1 + \tan 70^{\circ}\tan 10^{\circ}}$$

$\tan(70^{\circ} - 10^{\circ}) = \tan 60^{\circ}$

$\tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$

19. Trouve la valeur exacte de :

a)

$$\cos\frac{17\pi}{12}$$

$\cos\left(\frac{15\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right)$

$\cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{4}\cos\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

b)

$$\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right).$$

$$\sin\left(\frac{10\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)$$

1 point pour la combinaison

$$\sin\frac{19\pi}{12} = \sin\frac{5\pi}{6}\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{6}\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2 points (0,5 point pour chaque valeur exacte)

3 points

$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

20. Trouve la valeur exacte de :

a)

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \tan\left(\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

b)

$$\tan\left(-\frac{23\pi}{12}\right) = \tan\left(-\frac{20\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{5\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(-\frac{5\pi}{3}\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) \cdot \tan\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$$

21. Détermine la valeur exacte de :

a)

$$4\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Méthode 1

$$\begin{aligned}
4\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) &= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \\
&= 4\left[\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}\right] \\
&= 4\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\
&= 4\left[\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\right] \\
&= -\sqrt{2} - \sqrt{6}
\end{aligned}$$

Méthode 2

$\frac{11\pi}{12}$ a un angle de référence de $\frac{\pi}{12}$.

0,5 point pour le bon angle de référence

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

0,5 point pour la substitution dans la bonne identité

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

1 point pour les valeurs exactes

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Étant donné que $\frac{11\pi}{12}$ se trouve dans le quadrant II, alors cosinus est négatif.

$$\therefore 4\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 4\left(\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)$$

$$= -\sqrt{6} - \sqrt{2}$$

1 point pour le concept que $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ est < 0

3 points

b)

$\sin\frac{13\pi}{12}$

$$\sin\frac{13\pi}{12} = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

1 point pour la combinaison

$$= \left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

2 points pour les valeurs exactes (0,5 point pour chaque)

$$= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

3 points

c)

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \quad \sin\left(\frac{8\pi}{12} - \frac{3\pi}{12}\right)$$

=

$$= \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

22.

Évalue :

$$2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$$

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 1

d) $\sqrt{2}$

b)

23.

Étant donné que $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, où α se trouve dans le quadrant II, et que $\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$, où β se trouve dans le quadrant III,

a) trouve la valeur exacte de $\tan(\alpha - \beta)$.

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cos^2\alpha$

$\dfrac{4-2}{4} = \cos^2\alpha$

$\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \sqrt{\cos^2\alpha}$

$-\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\alpha$

$\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$

$1 - \left(\dfrac{-5}{13}\right)^2 = \sin^2\beta$

$\sin\beta = -\dfrac{12}{13}$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \div \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -1$

$\tan\beta = \sin\beta / \cos\beta = -\dfrac{12}{13} \div \dfrac{-5}{13} = \dfrac{12}{5}$

$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}$

$= \dfrac{-1 - \frac{12}{5}}{1 + \left(-1 \cdot \frac{12}{5}\right)} = \dfrac{\frac{-5-12}{5}}{\frac{5-12}{5}}$

$= \dfrac{-17}{5} \div \dfrac{-7}{5}$

$= \dfrac{17}{7}$

b) trouve la valeur exacte de $\cot(\alpha - \beta)$.

$\cot(\alpha-\beta) = \dfrac{1}{\tan(\alpha-\beta)} = \dfrac{7}{17}$

24.

Si $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ où α se trouve dans quadrant I et $\cos\beta = \frac{2}{5}$ où β se trouve dans quadrant IV, trouve :

a) $\cos(\alpha - \beta)$

b) $\sin(2\alpha)$

$1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \cos^2\alpha$

$\pm\sqrt{\frac{9-1}{9}} = \sqrt{\cos^2\alpha}$

$\pm\frac{\sqrt{8}}{3} = \cos\alpha$

$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \cos\alpha$

$1-\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \sin^2\beta$

$\pm\sqrt{\frac{25-4}{25}} = \sqrt{\sin^2\beta}$

$\pm\frac{\sqrt{21}}{5} = \sin\beta$

$-\frac{\sqrt{21}}{5} = \sin\beta$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$

25.

Étant donné que $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, où α se trouve dans le premier quadrant, et que $\sec\beta = \frac{7}{4}$, où β se trouve dans le quatrième quadrant, détermine la valeur exacte de $\sin(\alpha + \beta)$.

$\sin a = \frac{4}{5}$

$\cos a = \frac{3}{5}$

$\sec\beta = \frac{7}{4}$

$\cos\beta = \frac{4}{7}$

$1-\left(\frac{4}{7}\right)^2 = \sin^2\beta$

$\pm\sqrt{\frac{49-16}{49}} = \sqrt{\sin^2\beta}$

$\sin\beta = -\sqrt{33}/7$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{7} + \frac{3}{5}\cdot-\frac{\sqrt{33}}{7}$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{16-3\sqrt{33}}{35}$

26.

Étant donné que $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ et que $\sin\alpha < 0$, trouve la valeur exacte de $\tan(2\alpha)$.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \div \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan 2\alpha = \frac{2\cdot -\frac{\sqrt{7}}{3}}{1-\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{2\sqrt{7}}{3}}{9-\frac{7}{9}}$$

$$\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\sqrt{\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{16-9}{16}} \qquad \sin\alpha = \frac{-\sqrt{7}}{4} \qquad = \frac{-\frac{2\sqrt{7}}{3}}{\frac{74}{9}} = -\frac{2\sqrt{7}}{3}\cdot\frac{9}{74}$$

27.

Si cos α = $\dfrac{5}{13}$ et tan β = $\dfrac{3}{4}$ et que α et β ne se trouvent pas dans le 1[er] quadrant, trouve tan (α – β).

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$= \frac{-\frac{12}{5}-\frac{3}{4}}{1+-\frac{12}{5}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{48}{20}-\frac{15}{20}}{\frac{20-36}{20}}$$

$$\sin\alpha = -\frac{12}{13} \qquad = -\frac{63}{20} \div -\frac{16}{20}$$

$$\tan\alpha = -\frac{12}{5} \qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{63}{16}$$

b) trouve la valeur exacte de $\cot(\alpha - \beta)$.

$$\cot(\alpha-\beta) = \frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}$$

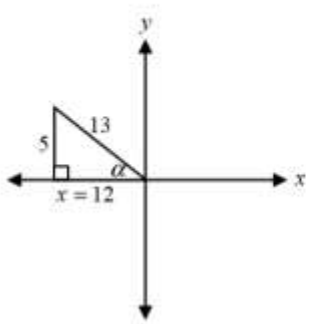
$$= \frac{16}{63}$$

28.

Étant donné que $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, où α se trouve dans le quadrant II, et que $\cos\beta = \frac{2}{5}$, où β se trouve dans le quadrant IV, trouve la valeur exacte de :

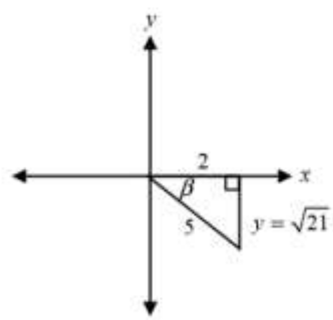
a) $\cos(\alpha + \beta)$

a)



$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + 25 &= 169 \\ x^2 &= 144 \\ x &= \pm 12 \\ x &= -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ 4 + y^2 &= 25 \\ y^2 &= 21 \\ y &= \pm\sqrt{21} \\ y &= -\sqrt{21} \end{aligned}$$



0,5 point pour la valeur de x
0,5 point pour la valeur de y

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{2}{5}\right) - \left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right) \\ &= -\frac{24}{65} + \frac{5\sqrt{21}}{65} \\ &= \frac{5\sqrt{21} - 24}{65} \end{aligned}$$

0,5 point pour $\cos\alpha$
0,5 point pour $\sin\beta$

1 point pour la substitution dans la bonne identité

3 points

b) $\sin 2\alpha$

b) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2\left(\frac{5}{13}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$

$= -\frac{120}{169}$

1 point pour la substitution dans la bonne identité

1 point

29.

Étant donné que $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ et que $\csc\beta = -3$, où α et β se terminent dans le quadrant III, calcule la valeur exacte de $\sin(\alpha - \beta)$

$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cos\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= -\frac{3}{5} \cdot -\frac{2\sqrt{2}}{3} - \left(\frac{-4}{5} \cdot -\frac{1}{3}\right)$

$= \frac{6\sqrt{2}}{15} - \frac{4}{15}$

$= \frac{6\sqrt{2}-4}{15}$

30.

Donne un exemple en utilisant des valeurs de A et B, en degrés ou en radians, pour vérifier que $\cos(A + B) = \cos A + \cos B$ **n'est pas** une identité.

Méthode 1

Soit $A = 45^\circ$ et $B = 90^\circ$.

M.G.	M.D.
$\cos\left(45^\circ + 90^\circ\right)$	$\cos 45^\circ + \cos 90^\circ$
$\cos\left(135^\circ\right)$	$\cos 45^\circ + \cos 90^\circ$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} + 0$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

1 point pour la simplification de $\cos(A + B)$
1 point pour la simplification de $\cos A + \cos B$

2 points

M.G. $\neq$ M.D. $\therefore$ $\cos(A + B) = \cos A + \cos B$ n'est pas une identité.

Méthode 2

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

Soit $A = 60^\circ$ et $B = 30^\circ$.

$$\begin{aligned}\cos\left(60^\circ + 30^\circ\right) &= \cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{2}\ \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

1 point pour la simplification de $\cos(A + B)$

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B &= \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

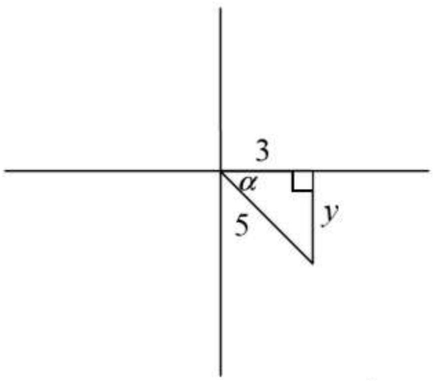
1 point pour la simplification de $\cos A + \cos B$

2 points

Ces deux solutions ne sont pas égales $\therefore$ $\cos(A + B) = \cos A + \cos B$ n'est pas une identité.

31.

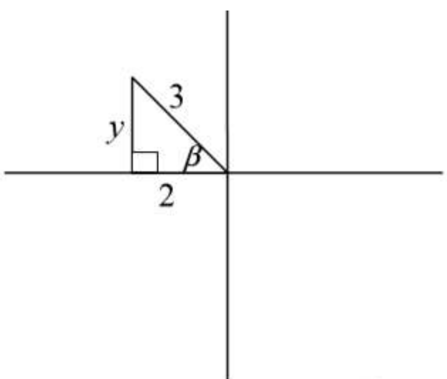
Étant donné $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, α se trouvant dans le quadrant IV, et $\cos\beta = -\frac{2}{3}$, β se trouvant dans le quadrant II, détermine la valeur exacte de $\sin(\alpha - \beta)$.



$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$9 + y^2 = 25$$
$$y^2 = 16$$
$$y = \pm 4$$
$$y = -4$$

0,5 point pour la valeur de y

$$\sin\alpha = -\frac{4}{5}$$



$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$4 + y^2 = 9$$
$$y^2 = 5$$
$$y = \pm\sqrt{5}$$
$$y = \sqrt{5}$$

0,5 point pour la valeur de y

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \\ &= \frac{8 - 3\sqrt{5}}{15}\end{aligned}$$

0,5 point pour $\sin\alpha$
0,5 point pour $\sin\beta$

1 point pour la substitution dans la bonne identité

3 points

32. Prouve les identités suivantes :

a)

$$\cot\theta + \frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = (\csc\theta)(\sec\theta)$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - \cancel{2}\sin^{\cancel{2}}\theta)}{\cancel{2}\cancel{\sin\theta}\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

✓

b)

$$\frac{2}{1-\tan^2\theta} = \frac{2-2\sin^2\theta}{\cos 2\theta}$$

CG

$$= \frac{2}{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{2}{\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= 2\cos^2\theta / \cos 2\theta$$

CD

$$= \frac{2(1-\sin^2\theta)}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{2\cos^2\theta}{\cos 2\theta}$$

c)

$$\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x} = \cot x$$

Méthode 1

$\text{M.G.} = \dfrac{1+2\cos^2 x-1}{2\sin x\cos x}$	1 point pour l'identité 0,5 point pour l'identité
$= \dfrac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$	
$= \dfrac{\cos x}{\sin x}$	1 point pour la simplification
$= \cot x$	0,5 point pour l'identité
$= \text{M.D.}$	**3 points**

Méthode 2

M.G. $= \dfrac{1+1-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$	0,5 point pour l'identité 0,5 point pour l'identité
$= \dfrac{2-2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$	
$= \dfrac{1-\sin^2 x}{\sin x\cos x}$	0,5 point pour la simplification
$= \dfrac{\cos^2 x}{\sin x\cos x}$	0,5 point pour l'identité
$= \dfrac{\cos x}{\sin x}$	0,5 point pour la simplification
$= \cot x$	0,5 point pour l'identité
= M.D.	**3 points**

Méthode 3

M.G. $= \dfrac{1+\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}$	0,5 point pour l'identité 0,5 point pour l'identité
$= \dfrac{2\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$	0,5 point pour l'identité $\left(1-\sin^2 x=\cos^2 x\right)$
$= \dfrac{\cos x}{\sin x}$	1 point pour la simplification
$= \cot x$	0,5 point pour l'identité
= M.D.	**3 points**

d)

$\sin x + \cot x \cos x = \csc x$

$= \sin x + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \cos x$

$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x}$

$= \frac{1}{\sin x}$

$= \frac{1}{\sin x}$ ✓

e)

$$\frac{\tan\theta + \cot\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos^2\theta}$$

$= \dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$

$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta} \div \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{\cancel{\cos\theta}\sin\theta} \cdot \cancel{\cos\theta}$

$= 1/\sin\theta = \csc\theta$

$\frac{\cancel{\sin\theta}}{\sin^2\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta}$

$= \csc\theta$ ✓

f)

$$\frac{\sin^2 x}{\sec x + 1} = \cos x - \cos^2 x$$

Méthode 1

$$\begin{aligned}
\text{M.G.} &= \frac{1-\cos^2 x}{\dfrac{1}{\cos x}+1} \\
&= \frac{1-\cos^2 x}{\dfrac{1+\cos x}{\cos x}} \\
&= \left(1-\cos^2 x\right)\left(\frac{\cos x}{1+\cos x}\right) \\
&= (1-\cos x)(1+\cos x)\left(\frac{\cos x}{1+\cos x}\right) \\
&= (1-\cos x)(\cos x) \\
&= \cos x - \cos^2 x \\
&= \text{M.D.}
\end{aligned}$$

1 point pour la bonne substitution des identités
1 point pour les stratégies algébriques
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

Méthode 2

$$\begin{aligned}
\text{M.G.} &= \frac{\sin^2 x}{\sec x + 1} \cdot \frac{(\sec x - 1)}{(\sec x - 1)} \\
&= \frac{\sin^2 x(\sec x - 1)}{\sec^2 x - 1} \\
&= \frac{\sin^2 x(\sec x - 1)}{\tan^2 x} \\
&= \frac{\sin^2 x(\sec x - 1)}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \cos^2 x(\sec x - 1) \\
&= \cos^2 x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) \\
&= \cos x - \cos^2 x \\
&= \text{M.D.}
\end{aligned}$$

1 point pour la bonne substitution des identités
1 point pour les stratégies algébriques
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

33.

a) Prouve l'identité suivante pour toutes les valeurs permises de θ.

$$\frac{1+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 3$$

Méthode 1

a)

MG	MD
$\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$	$\tan^2\theta+3$
$\sec^2\theta+2$	
$\tan^2\theta+1+2$	
$\tan^2\theta+3$	

$\therefore$ MG = MD

1 point pour la stratégie algébrique appropriée
1 point pour la substitution d'identité appropriée

2 points

Méthode 2

a)

MG	MD
$\dfrac{1+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$	$\tan^2\theta+3$
	$\sec^2\theta-1+3$
	$\sec^2\theta+2$
	$\dfrac{1}{\cos^2\theta}+2$
	$\dfrac{1}{\cos^2\theta}+\dfrac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$
	$\dfrac{1+2\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$\therefore$ MG = MD

1 point pour la bonne substitution d'identité
1 point pour la bonne stratégie algébrique

2 points

b) Détermine toutes les valeurs non permises de θ.

b) $\cos^2\theta = 0$

$\cos\theta = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$

$\therefore$ les valeurs non permises de θ

sont $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

ou

$90^\circ + 180k,\ k \in \mathbb{Z}.$

0,5 point pour $\cos^2\theta = 0$

0,5 point pour n'importe quelle valeur non permise de θ

1 point pour toutes les valeurs non permises de θ

2 points

34. Prouve les identités suivantes pour les valeurs permises :

a)

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cos 2\theta$$

Méthode 1

Membre de gauche	Membre de droite
$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta$
$\frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$	
$\frac{1}{\sec^2\theta} - \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}$	
$\cos^2\theta - \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta}}$	
$\cos^2\theta - \sin^2\theta$	
$\cos 2\theta$	

1 point pour la substitution des bonnes identités
1 point pour les stratégies algébriques
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

Méthode 2

Membre de gauche	Membre de droite
$\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta$
$\dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$	
$\dfrac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$	
$\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$	
$\cos^2\theta-\sin^2\theta$	
$\cos 2\theta$	

1 point pour la substitution des bonnes identités
1 point pour les stratégies algébriques
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

Méthode 3

Membre de gauche	Membre de droite
$\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$	$\cos 2\theta$
$\dfrac{1-\left(\sec^2\theta-1\right)}{\sec^2\theta}$	
$\dfrac{2-\sec^2\theta}{\sec^2\theta}$	
$\dfrac{2-\dfrac{1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$	
$\dfrac{\dfrac{2\cos^2\theta-1}{\cos^2\theta}}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$	
$2\cos^2\theta-1$	
$\cos 2\theta$	

1 point pour la substitution des bonnes identités
1 point pour les stratégies algébriques
1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité

3 points

b)

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\sin 2x$$

$= 2\dfrac{\sin x}{\cos x} \div \sec^2 x$

$= \dfrac{2\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cos^{\cancel{2}} x$

$= 2\sin x\cos x$

$= \sin 2x$

c)

$$\frac{\tan\theta + \cot\theta}{\sec\theta} = \frac{\sin\theta}{1 - \cos^2\theta}$$

C6

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cancel{\cos\theta}\sin\theta} \cdot \cancel{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}$$

CD

$$= \frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta}$$ ✓

35.

Prouve l'identité suivante pour toutes les valeurs permises de θ.

$$\frac{1}{1+\cos\theta} = \csc^2\theta - \frac{\cot\theta}{\sin\theta}$$

Méthode 1

Membre de gauche	Membre de droite	
$\frac{1}{1+\cos\theta}$	$\csc^2\theta - \frac{\cot\theta}{\sin\theta}$	
	$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\sin\theta}$	1 point pour la bonne substitution des identités
	$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{1}{\sin\theta}$	
	$\frac{1}{\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$	1 point pour les stratégies algébriques
	$\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$	
	$\frac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$	1 point pour le processus logique lors de la preuve d'identité
	$\frac{1-\cancel{\cos\theta}}{(1-\cancel{\cos\theta})(1+\cos\theta)}$	**3 points**
	$\frac{1}{1+\cos\theta}$	

Méthode 2

Membre de gauche	Membre de droite	
$\dfrac{1}{1+\cos\theta}\dfrac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$	$\csc^2\theta-\dfrac{\cot\theta}{\sin\theta}$	1 point pour les stratégies algébriques
$\dfrac{1-\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$		
$\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}$		1 point pour la bonne substitution des identités
$\dfrac{1}{\sin^2\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$		
$\csc^2\theta-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\dfrac{1}{\sin\theta}$		1 point pour le processus logique lors de la preuve d'identité
$\csc^2\theta-\dfrac{\cot\theta}{\sin\theta}$		**3 points**

36.

Prouve l'identité suivante pour toutes les valeurs permises de x.

$$\sec x + \tan x = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

Méthode 1

Membre de gauche	Membre de droite
$\sec x + \tan x$	
$\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$	1 point pour la substitution des bonnes identités
$\dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$	1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité
$\dfrac{1-\sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x}$	
$\dfrac{\cos^2 x}{(1-\sin x)\cos x}$	1 point pour les stratégies algébriques
$\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$	**3 points**

Méthode 2

$$\sec x + \tan x = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$$

Membre de gauche	Membre de droite	
	$\dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$	
	$\dfrac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$	1 point pour le processus logique lors de la preuve de l'identité
	$\dfrac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x}$	
	$\dfrac{\cos x(1 + \sin x)}{\cos^2 x}$	1 point pour la substitution des bonnes identités
	$\dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$	
	$\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$	1 point pour les stratégies algébriques
	$\sec x + \tan x$	**3 points**

37.

Résous l'équation suivante dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

$$3\sin^2 \theta + \cos\theta - 1 = 0$$

Écris tes réponses sous forme de valeurs exactes ou à 3 décimales près.

$3(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$

$3-3\cos^2\theta+\cos\theta-1=0$

$0=3\cos^2\theta-\cos\theta-2$

$0=(3\cos\theta+2)(\cos\theta-1)$

$\cos\theta=-\frac{2}{3}$ $\quad\cos\theta=1$ $\quad\theta=0, 2\pi$

$\theta_r=0,841$ $\quad\theta=\pi+\theta_r$ $\quad\theta=\pi-\theta_r$

$\theta = 2,301$

$\theta = 3,983$

$\theta = 0, 2,301, 3,983$ et 2π

38.

Résous l’équation suivante dans laquelle $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\cos 2\theta = -\frac{3}{4}$$

Donne la solution générale en radians à 3 décimales près.

$2\cos^2\theta - 1 \overset{+1}{=} -\frac{3}{4} + 1$

$\frac{2\cos^2\theta}{2} = \frac{1}{4/2}$

$\sqrt{\cos^2\theta} = \pm\sqrt{\frac{1}{8}}$

$\cos\theta = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\theta_r = 1{,}209$

$\theta = 1{,}209 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

et $\theta = 1{,}933 + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}$

39.

Résous l’équation suivante dans l’intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$\sec^2\theta - \tan\theta = 1$$

$\sec^2\theta - 1 = \tan\theta$

$\tan^2\theta = \tan\theta$

$\tan^2\theta - \tan\theta = 0$

$\tan\theta(\tan\theta - 1) = 0$

$\tan\theta = 0 \qquad \tan\theta = 1$

$\theta = \pi \qquad \theta = \frac{5\pi}{4}$

40.

Détermine une valeur possible pour θ qui satisfait l'équation ci-dessous.

$$\cos\theta = \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) - 1$$

$\cos\Theta = \frac{1}{2} - 1$

$\cos\Theta = -\frac{1}{2}$

$\Theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

41.

Résous l'équation suivante dans l'intervalle $[0,\ 2\pi]$.

$$\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exprime tes réponses sous forme de valeurs exactes. $\left[0, \frac{36\pi}{18}\right]$

$\cos\Theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Theta = \frac{\pi}{6}$ $\Theta = \frac{11\pi}{6}$ $\Theta = \frac{13\pi}{6}$ $\Theta = \frac{23\pi}{6}$ $\Theta = \frac{25\pi}{6}$ $\Theta = \frac{35\pi}{6}$

$3x = \frac{\pi}{6}$ $3x = \frac{11\pi}{6}$ $3x = \frac{13\pi}{6}$ $3x = \frac{23\pi}{6}$ $3x = \frac{25\pi}{6}$ $3x = \frac{35\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}$

42.

a) Résous l'équation suivante où $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\sin 3\theta = \frac{1}{2}$$

Exprime tes réponses en radians.

b) Combien de solutions y a-t-il pour $\sin 3\theta = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0,\ 4\pi]$?

$3\theta = x$ $\quad \sin x = \frac{1}{2}$ $\quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ $\quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

$\theta = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} n$

$n \in \mathbb{Z}$

$+ \frac{12\pi}{18} n$

$\theta = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18},$ $\quad \left[0, \frac{72\pi}{18}\right]$

$\frac{37\pi}{18}, \frac{41\pi}{18}, \frac{49\pi}{18}, \frac{53\pi}{18}, \frac{61\pi}{18}, \frac{65\pi}{18}$

43.

Résous l'équation suivante algébriquement où $180^\circ \le \theta \le 360^\circ$.

$$2\sin^2\theta + 5\cos\theta + 1 = 0$$

$2\left(1-\cos^2\theta\right) + 5\cos\theta + 1 = 0$ 1 point pour l'identité

$2 - 2\cos^2\theta + 5\cos\theta + 1 = 0$

$2\cos^2\theta - 5\cos\theta - 3 = 0$

$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 3) = 0$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ $\cos\theta = 3$ 1 point pour avoir isolé $\cos\theta$

$\theta_r = 60^\circ$ $\therefore$ aucune solution 1 point pour avoir indiqué aucune solution

$\theta = 240^\circ$ 1 point pour avoir isolé θ

4 points

44. Résous l'équation suivante algébriquement où $[-180^0, 360^0]$

sin2x + sinx = 0

$2\sin x\cos x + \sin x = 0$

$\sin x(2\cos x + 1) = 0$

$\sin x = 0$ $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

$x_r = 60^\circ$

$x = -180^\circ, 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

$x = -120^\circ, 120^\circ, 240^\circ$

45.

Explique l'erreur qui a été faite en résolvant l'équation suivante :

$$\sin 2\theta = \cos \theta L \text{ où } \theta \in \mathbb{R}$$

$$\sin 2\theta = \cos\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta = \cos\theta$$

$$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$2\sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

L'élève a divisé par $\cos\theta$ au lieu de factoriser par $\cos\theta$.

1 point

ou

Il y a 2 autres solutions qui viennent de l'équation $\cos\theta = 0$.

ou

L'élève ne peut pas diviser les deux côtés par $\cos\theta$ parce que $\cos\theta$ pourrait être égale à 0.

46.

Résous l'équation suivante algébriquement pour x, où $0 \leq x \leq 2\pi$.

$$2\cos^2 x = -3\sin x$$

$2\left(1-\sin^2 x\right) = -3\sin x$ — 1 point pour l'identité

$$2 - 2\sin^2 x = -3\sin x$$

$$0 = 2\sin^2 x - 3\sin x - 2$$

$$0 = (2\sin x + 1)(\sin x - 2)$$

$\sin x = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\cancel{\sin x = 2}$ — 1 point pour avoir isolé $\sin x$

Pas de solution — 1 point pour avoir indiqué pas de solution

$x = \dfrac{7\pi}{6}$ — 1 point pour avoir isolé x (0,5 point pour chaque valeur)

$x = \dfrac{11\pi}{6}$

4 points

47.

Résous algébriquement l'équation suivante dans l'intervalle $[0,\ 2\pi]$.

$$\cos 2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$$

$\left(1-2\sin^2\theta\right) - 3\sin\theta - 2 = 0$ — 1 point pour la substitution d'une bonne identité

$$-2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 1 = 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta + 1 = 0$$

$$(2\sin\theta + 1)(\sin\theta + 1) = 0$$

$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $\sin\theta = -1$ — 1 point pour avoir isolé $\sin\theta$ (0,5 point pour chaque branche)

$\theta = \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$ $\qquad$ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ — 2 points pour les solutions
(1 point pour chaque branche; 0,5 point pour chaque valeur dans la branche gauche)

4 points