Mathématique Pré-Calcul 40S

Pratique et Devoir de Classe Fonction Exponentielle et Logarithmique

Nom :

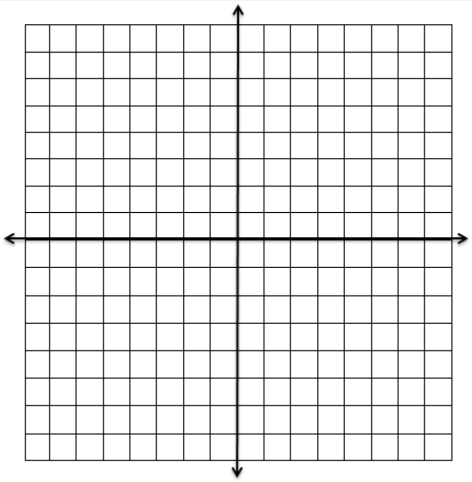
Table des Matières

Pratique de Classe

Pratique Leçon 1 : Les Caractéristiques des Fonctions Exponentielles

:

1. a) Trace le graphique de y = 3^x.



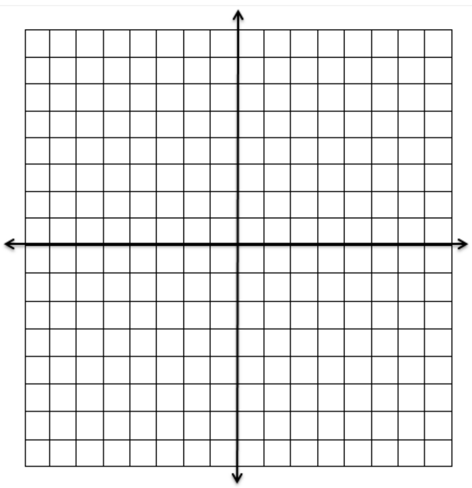
b) Détermine le domaine et l'image de la fonction ;

c) Détermine l'abscisse et l'ordonnée à l'origine du graphique, si elles existent ;

d) Détermine si le graphique représente une fonction croissante ou décroissante ;

e) Détermine l'équation de l'asymptote horizontale.

2. a) Trace le graphique de y = $\left(\frac{1}{3}\right)^x$.



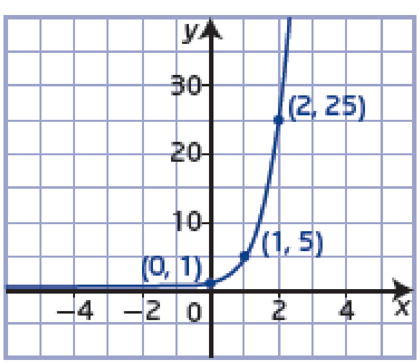
b) Détermine le domaine et l'image de la fonction ;

c) Détermine l'abscisse et l'ordonnée à l'origine du graphique, si elles existent ;

d) Détermine si le graphique représente une fonction croissante ou décroissante ;

e) Détermine l'équation de l'asymptote horizontale.

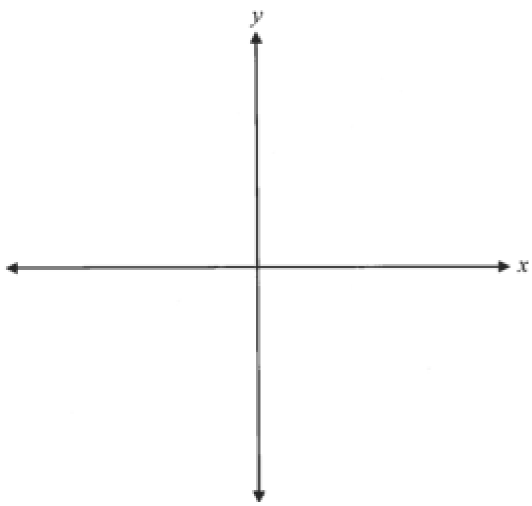
3. Quelle fonction de la forme y = b^x est représenté par le graphique ci-dessous ?



Pratique Leçon 2 : Les transformations des fonctions exponentielles

1. Trace les graphiques et détermine les propriétés (domaine, image, asymptote)

a) $f(x) = 4^{x+1} - 3$

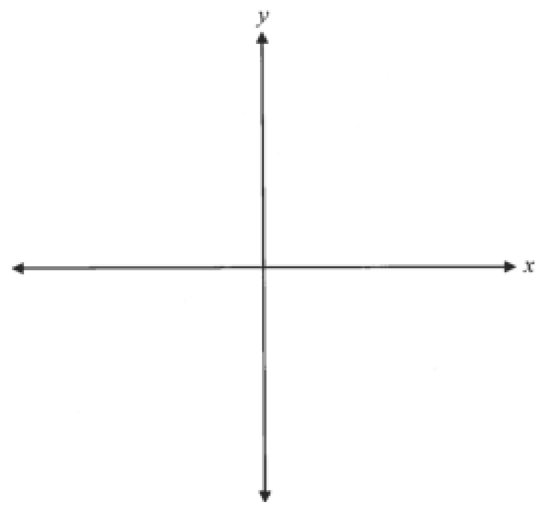


Domaine : ______________________________

Image : ________________________________

Asymptote : ____________________________

b) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} + 1$



____

____

____

2. Décris les transformations qu'il faut faire subir au graphique de chaque fonction exponentielle f(x) pour obtenir le graphique de la transformée. Écris chaque fonction transformée sous la forme.

$y = a(c)^{b(x-h)} + k$

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = f(x-2) + 1$

b) $f(x) = 5^x$, $y = -0{,}5f(x-3)$

Pratique Leçon 3 : La Résolutions d'équations Exponentielles

1. Écris chaque expression comme une base de 2.

a) 4^3 b) $\left(\frac{1}{8}\right)^3$ c) $8^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{16}\right)^3$

2. Résous chaque équation.

a) $2^{4x} = 4^{x+3}$ **b)** $9^{4x} = 27^{x-1}$

3.

$$V_f = V_I(1 + \frac{i}{n})^{nt}$$

VF : Valeur finale d'un placement
VI : Valeur initiale
i = taux d'intérêt par année
n : Taux de composition (Le nombre de fois que l'intérêt est calculé par année ou le nombre de paiement dans une année)
t : durée en années

a) Vos parents vous donnent 10 000 $ à investir et tu décides de l'investir pendant 30 ans à un taux de 4 % composé annuellement. Combien d'argent aurez-vous après le période de placement ?

b) Au lieu d'investir annuellement vous trouvez une banque qui vous donne un taux d'intérêt de 3 % composé mensuellement.

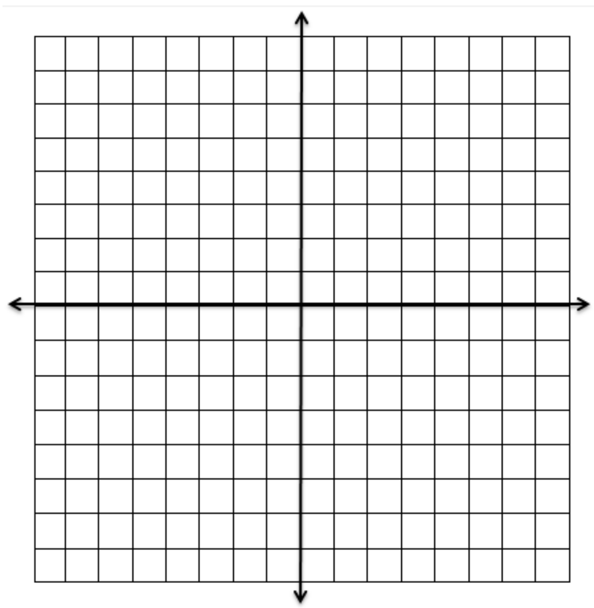
Pratique Leçon 4 : La fonction exponentielle naturelle

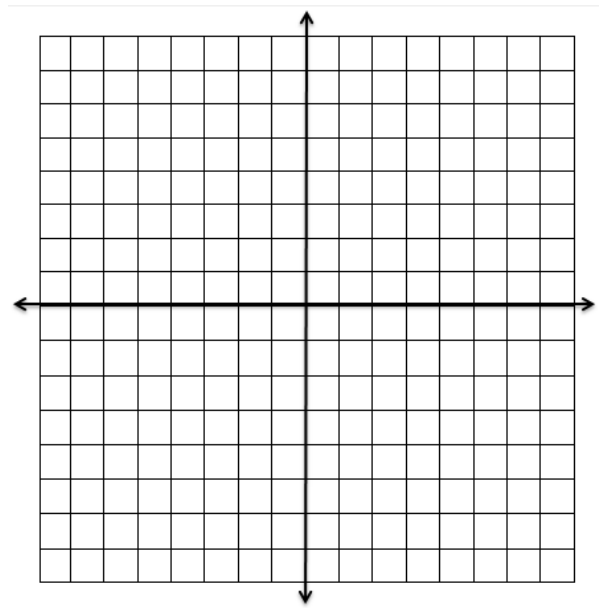
1. Trace le graphique de chacune des fonctions exponentielles suivantes et indique le domaine, l'image, l'ordonnée à l'origine et l'équation de l'asymptote.

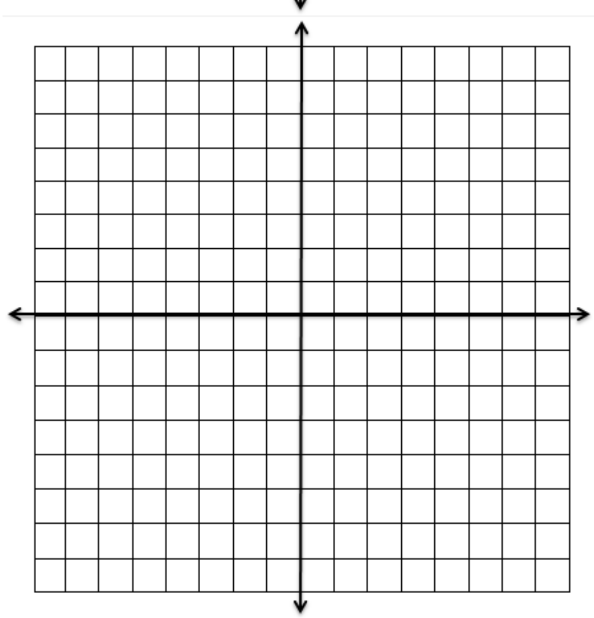
a) $y = e^x - 2$

b) $y = -e^{-x}$

c) $y = |e^x - 1|$







Pratique Leçon 1 : Les logarithmes

1. Évalue chaque logarithme.

a) $\log_2 32$ b) $\log_9 \sqrt[5]{81}$ c) log 1 000 000

d) $\log_3 9\sqrt{3}$ c) $\log_3 27 + \log_5 125$

2. Détermine la valeur de x.

a) $\log_4 x = -2$ **b)** $\log_{16} x = -\frac{1}{4}$ **c)** $\log_x 9 = \frac{2}{3}$

d) $\log_6 6^5$ b) $12^{\log_{12} 144}$ c) $\log_5 25 = \log_5 x$

3. a) Détermine la fonction réciproque de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

b) Trace le graphique de f(x) et celui de sa réciproque. Indique les caractéristiques suivantes de la **réciproque** et de son graphique :

- le domaine et l'image.

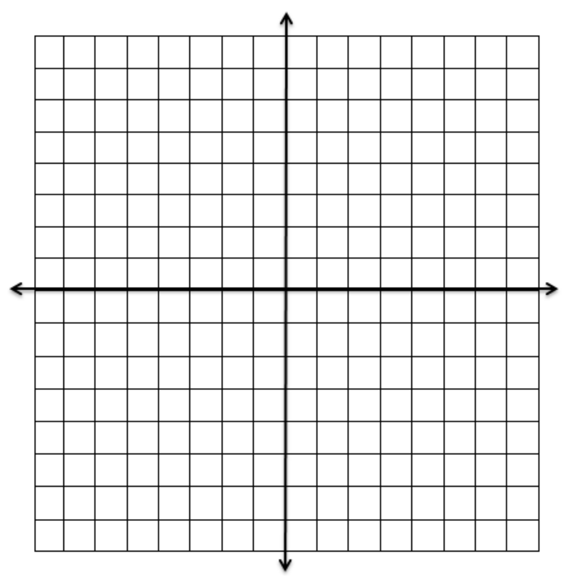
Domaine : ___________________________

Image : _____________________________

l'abscisse à l'origine du graphique, s'il y a lieu :

- l'ordonnée à l'origine du graphique, s'il y a lieu :

- l'équation de toute asymptote :



4. Estime la valeur de $\log_3 32$, au dixième près.

5. Quelle expression a la plus grande valeur ?

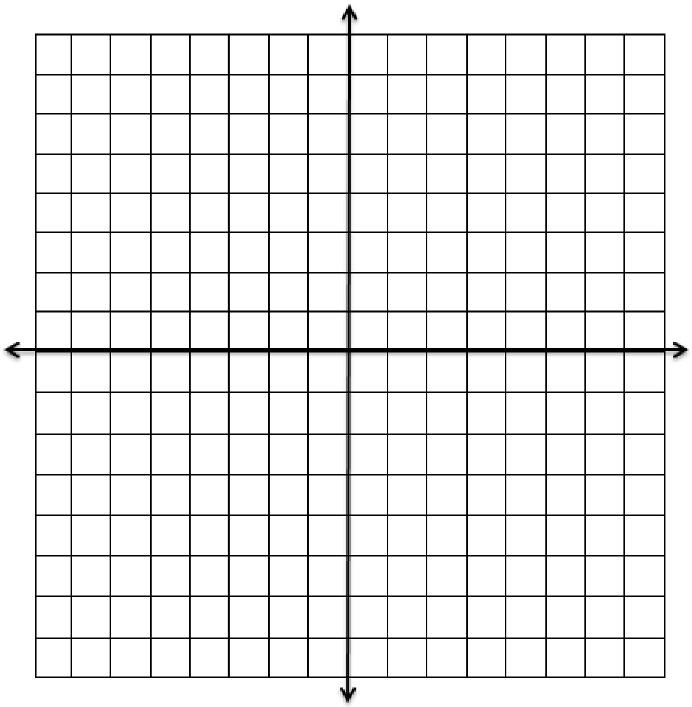
$\log_2 8$ ou $\log_3 9$

6.

Le plus puissant tremblement de terre de l'histoire a frappé le Chili en 1960. Sa magnitude était de 9,5 sur l'échelle de Richter. Combien de fois était-il plus puissant que le séisme d'une magnitude de 8,1 survenu en 1949 à Haida Gwaii ?

Pratique Leçon 2 : Les transformations des fonctions logarithmiques

1. À l'aide de transformations, trace le graphique de la fonction $y = \log(x - 10) - 1$.



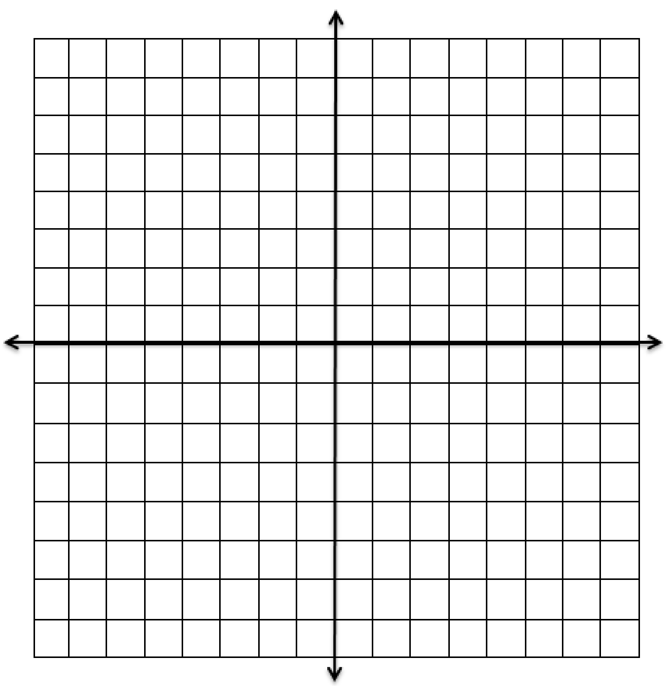
Détermine :
i) l'équation de l'asymptote ;

ii) le domaine et l'image ;

iii) l'ordonnée à l'origine, s'il y a lieu ;

iv) l'abscisse à l'origine, s'il y a lieu.

2. À l'aide de transformations, trace le graphique de la fonction $y = 2\log3(-x + 1)$



b) Détermine :
i) l'équation de l'asymptote ;

ii) le domaine et l'image de la fonction ;

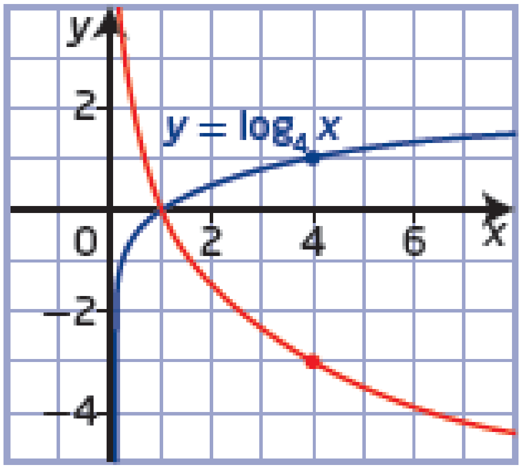
domaine : ______________________________

image : _________________________________

iii) l'ordonnée à l'origine, s'il y a lieu ;

iv) l'abscisse à l'origine, s'il y a lieu.

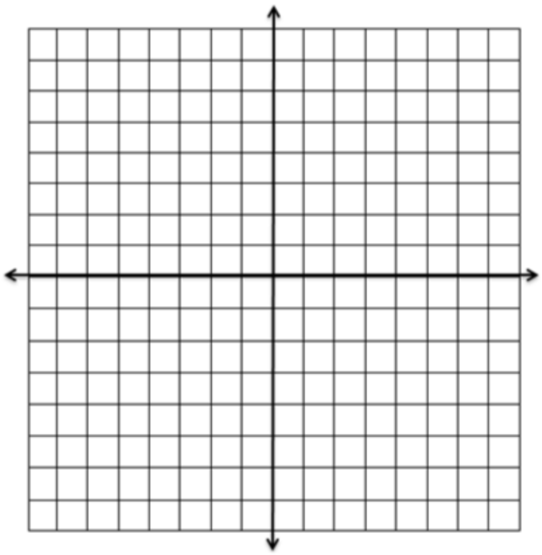
3. On peut obtenir le graphique (en rouge) par un étirement et une réflexion du graphique en bleu de $y = \log_4 x$. Écris l'équation qui correspond au graphique en rouge.



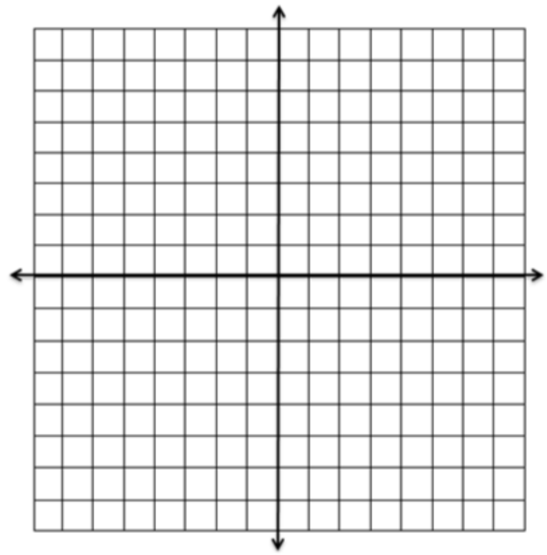
Pratique Leçon 3 : La Fonction logarithmique naturelle

1. Trace les graphiques.

a) $y = 2\ln x$



b) $y = |\ln(x-3)|$



2. Utilise ta calculatrice pour trouver les logarithmes :

a) $\log_7 e$

b) $\ln 100$

c) $\ln e^3$

3. Détermine x. (Résous.)

a) $e^{\ln 4} = x$

b) $\ln 10 = \ln 2x$

c) $\ln x = 0$

Pratique Leçon 4 : Les Lois des logarithmes

1. Réécris chaque expression à l'aide de logarithme de x, de y et de z.

a) $\log_6 \frac{x}{y}$ **b)** $\log_5 \sqrt{xy}$ **c)** $\log_3 \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}$ **d)** $\log_7 \frac{x^5 y}{\sqrt{z}}$

2. Écris chaque expression sous sa forme la plus simple. Indique toute restriction sur les valeurs de la variable.

a) $4 \log_3 x - \frac{1}{2}(\log_3 x + 5 \log_3 x)$ **b)** $\log_2 (x^2 - 9) - \log_2 (x^2 - x - 6)$

3. À l'aide des lois des logarithmes, simplifie chaque expression puis évalue-la.

a) $\log_3 9\sqrt{3}$ **b)** $\log_5 1\,000 - \log_5 4 - \log_5 2$ **c)** $2 \log_3 6 - \frac{1}{2} \log_3 64 + \log_3 2$

4.

$$\text{Soit : } \log_a 2 = 0{,}3562$$
$$\log_a 3 = 0{,}5646$$
$$\log_a 5 = 0{,}8271$$

Trouve la valeur de $log_a \frac{18}{5}$

5.

L'échelle des pH sert à mesurer l'acidité ou la basicité (alcalinité) d'une solution. Le pH d'une solution est défini par pH = $-\log [H^+]$, où $[H^+]$ est la concentration d'ions hydrogène, en moles par litre (mol/L). Une solution neutre, comme l'eau pure, a un pH de 7. Les solutions dont le pH est inférieur à 7 sont acides et celles dont le pH est supérieur à 7 sont basiques ou alcalines. Plus le pH est proche de 0, plus la solution est acide.

a) Les boissons au cola contiennent de l'acide phosphorique, tout comme certains produits qui enlèvent la rouille. Une boisson au cola a un pH de 2,5. Le lait a un pH de 6,6. Combien de fois une boisson au cola est-elle plus acide que le lait?

(12589 fois plus acide)

b) Une pomme est 5 fois plus acide qu'une poire. Si une poire a un pH de 3,8, quel est le pH d'une pomme?

(3,1)

Pratique Leçon 5 : Les équations logarithmiques et exponentielles

1. Résous chaque équation.

a) $\log_7 x + \log_7 4 = \log_7 12$

b) $\log_2 (x - 6) = 3 - \log_2 (x - 4)$

c) $\log_3 (x^2 - 8x)^5 = 10$

2. Résous chaque équation. Arrondis tes réponses au centième près.

a) $2^x = 2\ 500$ b)$5^{x - 3} = 1700$ c) $6^{3x + 1} = 8^{x + 3}$

3. Mme Layton investit 10 000 $ à un taux d’intérêt de 2,5 % composé mensuellement. Combien de temps faudra-t-il à Mme pour tripler son investissement ?

Exprime ta réponse en années, à 3 décimales près.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

P: investissement (principal)
A: Valeur future
r : taux d’intérêt
n : période composé

4. Lorsqu’on a étudié pour la première fois la croissance démographique de la ville de SangChuMahne, sa population était de 22 000 habitants. Cinq ans plus tard, elle est de 24 000 habitants. Si la population croît de manière exponentielle, combien faudra-t-il de temps pour qu’elle double? (4 points) $\mathbf{P = P_0e^{rt}}$

Devoir Fonctions Exponentielle et Logarithmique

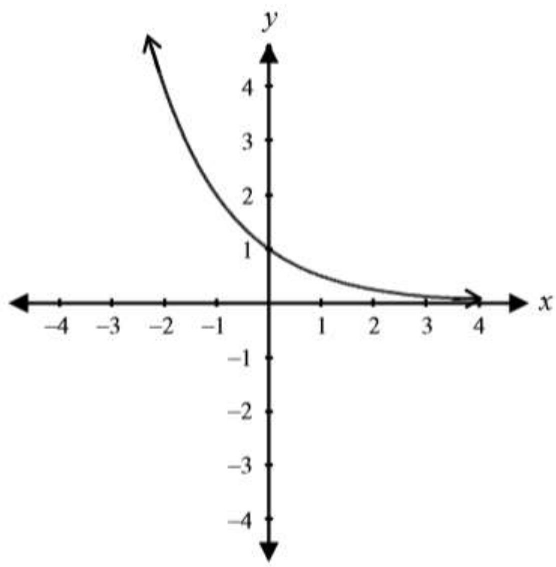
1. Quelle équation est représentée par le graphique tracé ci-dessous?

a) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

c) $y = 2^{x}$

d) $y = -2^{x}$



b)

2. Étant donné $\log_b a = 3$, trouve un exemple de valeurs possibles pour a et b qui rendent cette équation vraie.

Les réponses vont varier mais $b^3 = a$.

Quelques solutions possibles sont : $a = 8 \quad b = 2$

1 point

ou

$a = 27 \quad b = 3$

ou

$a = 64 \quad b = 4$

3.

$$\text{Si } \log_2 x = 4 \text{, alors } \log_2(2x) \text{ est égal à :}$$

a) 5 b) 8 c) 16 d) 32

a)

4. Identifie la valeur de l'abscisse à l'origine de la fonction $y = \ln(x - 2)$.

a) -1 b) 0 c) 2 d) 3

d)

5. Estime la valeur de $\log_5 35$. Justifie ta réponse.

$5^2 = 25$ $5^3 = 125$ 0,5 point pour la justification

La valeur de $\log_5 35$ est plus de 2 mais moins de 2,5. 0,5 point pour la valeur estimée

1 point

6. Quelle expression a la plus grande valeur ?

$\text{Log}_2 36$ ou $\log_3 80$

Justifie ta réponse.

Méthode 1

$$\log_2 36 \qquad 2^{?} = 36 \begin{cases} 2^5 = 32 \\ 2^6 = 64 \end{cases} \approx 5{,}1$$

$$\log_3 80 \qquad 3^{?} = 80 \begin{cases} 3^3 = 27 \\ 3^4 = 81 \end{cases} \approx 3{,}9$$

$\therefore \log_2 36$ a la plus grande valeur 1 point pour la justification

Méthode 2

$\log_2 32 = 5 \therefore \log_2 36$ est un peu plus de 5

$\log_3 81 = 4 \therefore \log_3 80$ est un peu moins de 4

$\therefore \log_2 36$ a la plus grande valeur 1 point pour la justification

1 point

7. Le graphique de $y = \log_2(2x + 6)$ croise le graphique de $y = 4$ à :

a) $x = -1$ b) $x = 1$ c) $x = 5$ d) $x = 14$

c)

8. Laquelle des valeurs suivantes représente une estimation raisonnable de log350 ?

a) 2 b) 2,5 c) 2,8 d) 3

b)

9.

Identifie quelle expression a la plus grande valeur. Justifie ta réponse

$$\log_5 80 \quad \text{ou} \quad \log_3 30$$

$5^2 = 25$

$5^3 = 125$ $\log_5 80$ vaut moins que 3

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$ $\log_3 30$ vaut plus que 3

$\therefore \log_3 30$ a une plus grande valeur

1 point pour la justification

$\boxed{\textbf{1 point}}$

10.

Simplifie l'expression suivante :

$$\frac{1}{2}\log_a 36 - \log_a 2$$

a) $\log_a 3$ b) $\log_a 4$ c) $\log_a 9$ d) $\log_a 12$

a)

11.

Laquelle des valeurs suivantes est la plus proche de la valeur de $\log_2 40 + \log_5 125$?

a) 3 b) 8 c) 10 d) 45

b)

12.

Évalue :

$$\frac{1}{2}\log_3 144 - \log_3 4 + 2\log_3 3$$

$\log_3 (144)^{\frac{1}{2}} - \log_3 4 + \log_3 (3)^2$	1 point pour la loi du logarithme d'une puissance
$\log_3 12 - \log_3 4 + \log_3 9$	
$\log_3 \left(\frac{12 \bullet 9}{4}\right)$	0,5 point pour la loi du logarithme du produit 0,5 point pour la loi du logarithme d'un quotient
$\log_3 27$	
3	1 point pour avoir évalué un logarithme

3 points

13.

Détermine la valeur de $\log_9 \left(\log_3 27\right)$.

a) $\frac{1}{3}$ c) 2

b) $\frac{1}{2}$ d) 3

b)

14. Identifie une expression équivalente à $1 + \log_2 5$.

a) $\log_2 5$

b) $\log_2 7$

c) $\log_2 10$

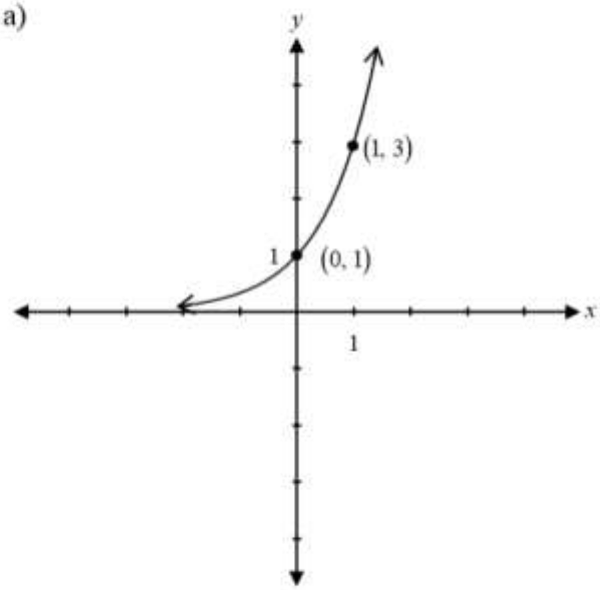
d) $\log_2 11$

c)

15.

a) Trace le graphique de $y = 3^x$.

a)



0,5 point pour une fonction exponentielle croissante

0,5 point pour l'ordonnée à l'origine à $(0, 1)$

0,5 point pour un point conséquent d'une fonction exponentielle

0,5 point pour le comportement asymptotique

2 points

b) Explique comment le graphique de $y = 3^x$ peut être utilisé pour tracer le graphique de $y = \log_3 x$.

Pour tracer $y = \log_3 x$, tu peux réfléchir le graphique de $y = 3^x$ sur la droite de $y = x$.

ou

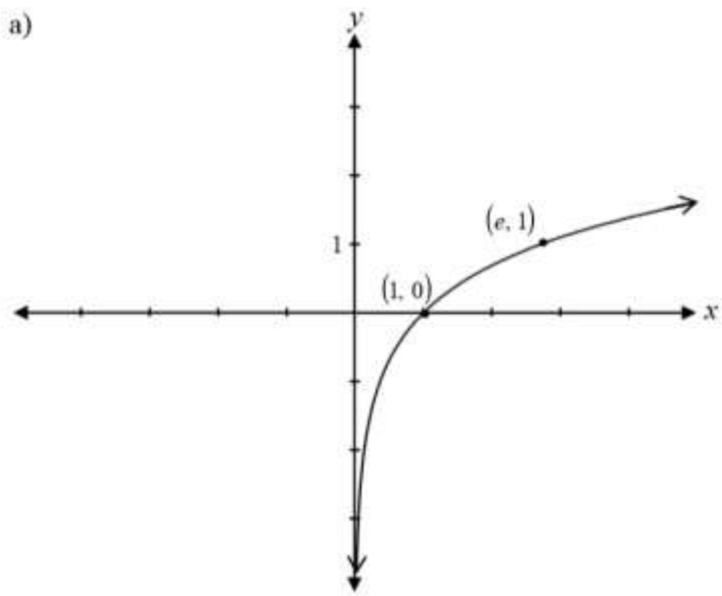
Tu peux échanger les coordonnées x et y du graphique $y = 3^x$ pour trouver le graphique de $y = \log_3 x$.

1 point pour l'explication

1 point

16. a) Trace le graphique de y = ln(x).

a)

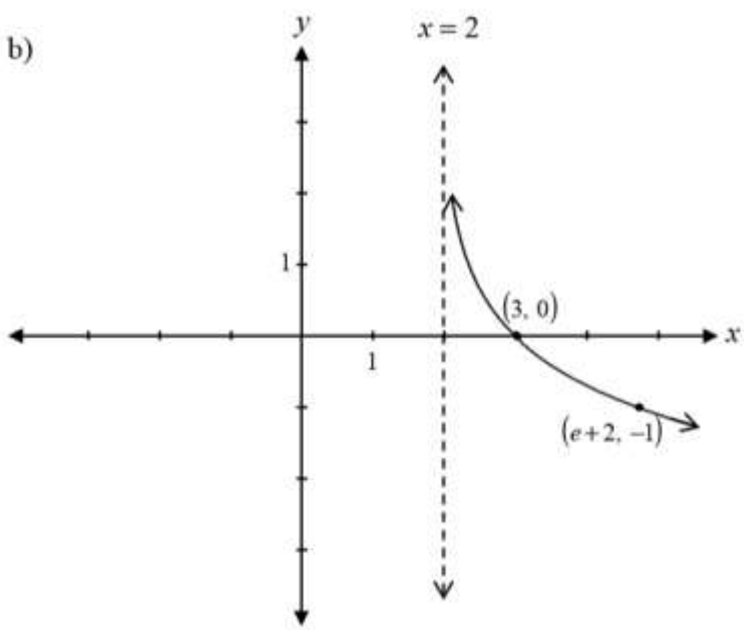


0,5 point pour une fonction logarithmique croissante
0,5 point pour l'abscisse à l'origine à (1, 0)
0,5 point pour un point conséquent d'une fonction logarithmique
0,5 point pour le comportement asymptotique vertical

2 points

b) Trace le graphique de y = -ln(x – 2).

b)



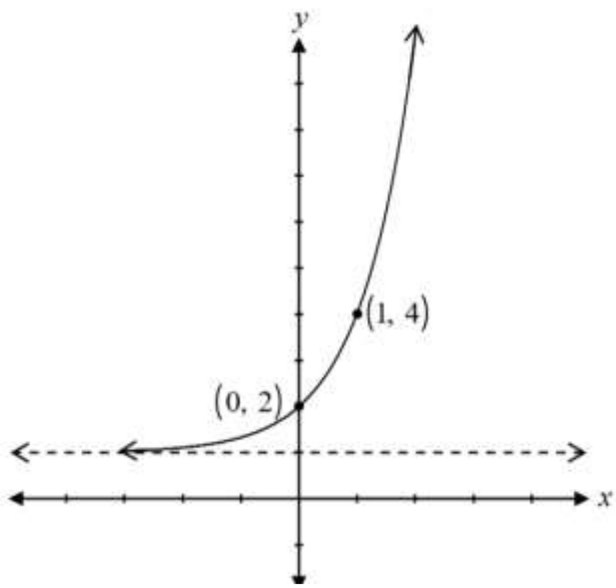
1 point pour la réflexion par rapport à l'axe des x
1 point pour le déplacement horizontal

2 points

17.

a) Trace le graphique de $f(x) = 3^x + 1$.

a)



0,5 point pour une fonction exponentielle croissante

0,5 point pour l'ordonnée à l'origine à $(0, 2)$

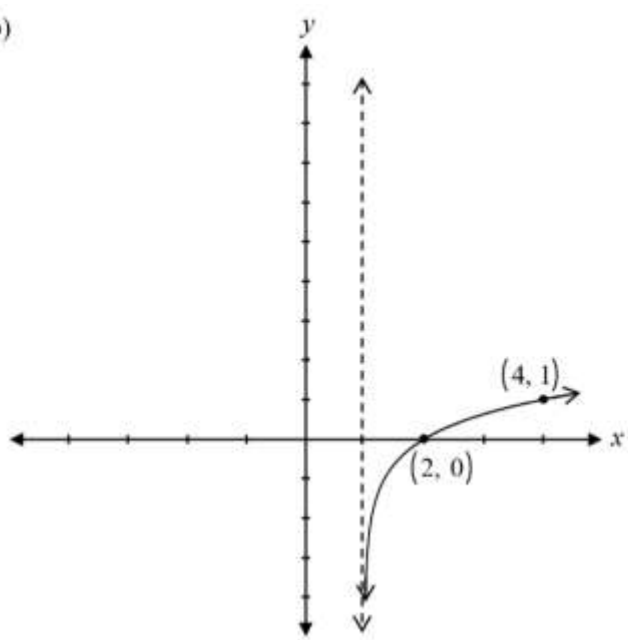
0,5 point pour l'asymptote à $y = 1$

0,5 point pour un point conséquent d'une fonction exponentielle

2 points

b) Trace le graphique de $f^{-1}(x)$.

b)



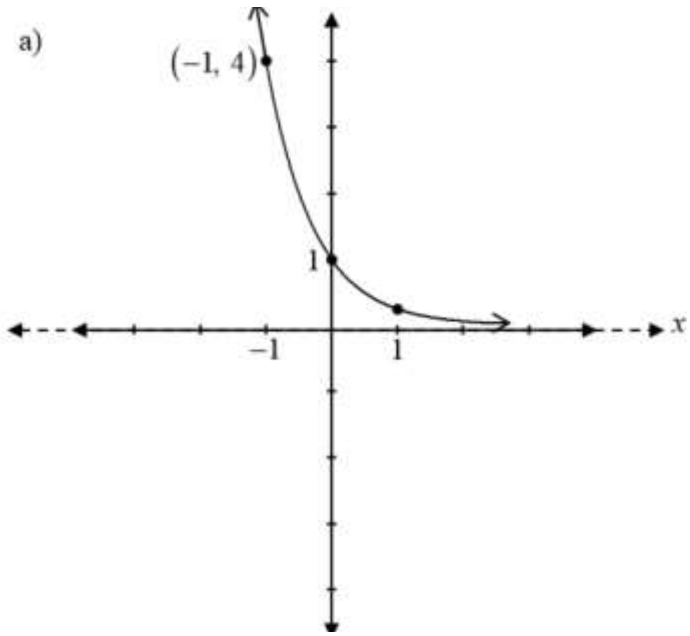
1 point pour le graphique conséquent de la réciproque

1 point

18.

a) Trace le graphique de $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

a)



0,5 point pour une fonction exponentielle décroissante

0,5 point pour l'ordonnée à l'origine $(0, 1)$

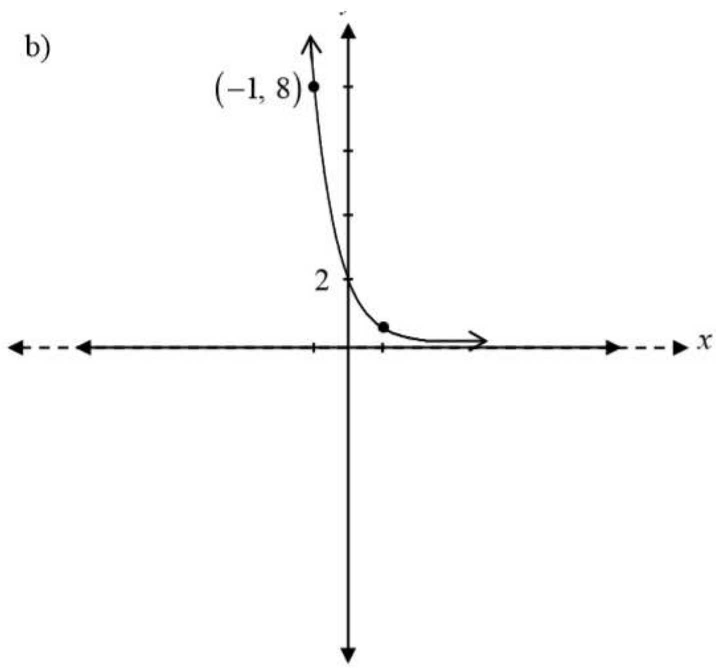
0,5 point pour un point conséquent d'une fonction exponentielle

0,5 point pour l'asymptote horizontale à $y = 0$

2 points

b) Trace le graphique de $y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^x$.

b)



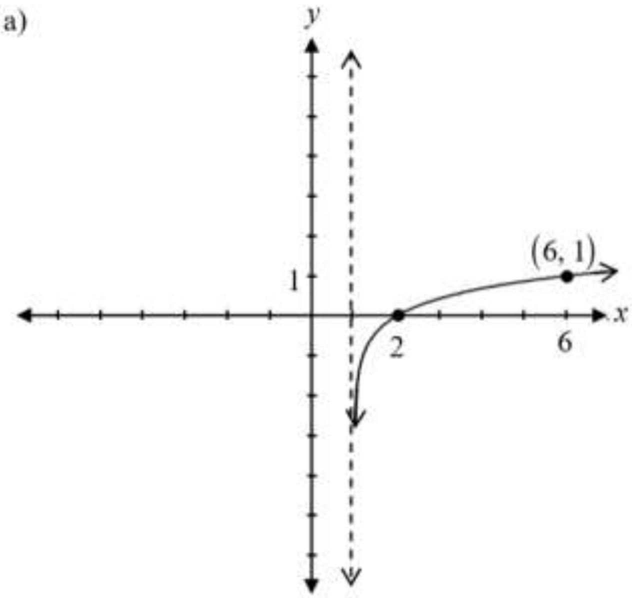
1 point pour un étirement vertical par un facteur de 2 d'un graphique en conséquence avec a)

1 point

19.

a) Trace le graphique de $f(x) = \log_5(x-1)$.

a)

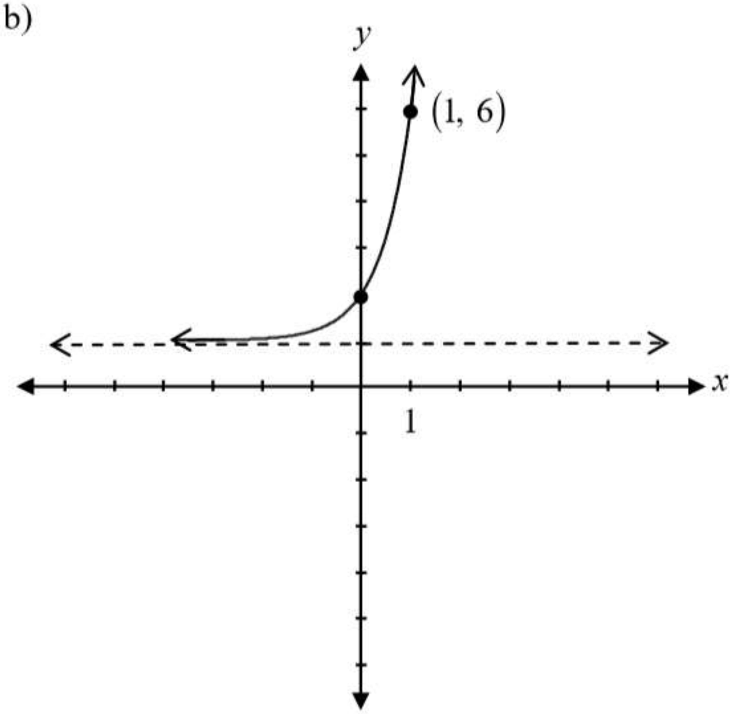


0,5 point pour l'asymptote verticale à $x = 1$
0,5 point pour l'abscisse à l'origine à $x = 2$
0,5 point pour la fonction logarithmique croissante
0,5 point pour un point conséquent sur le graphique logarithmique

2 points

b) Trace le graphique de $f^{-1}(x)$.

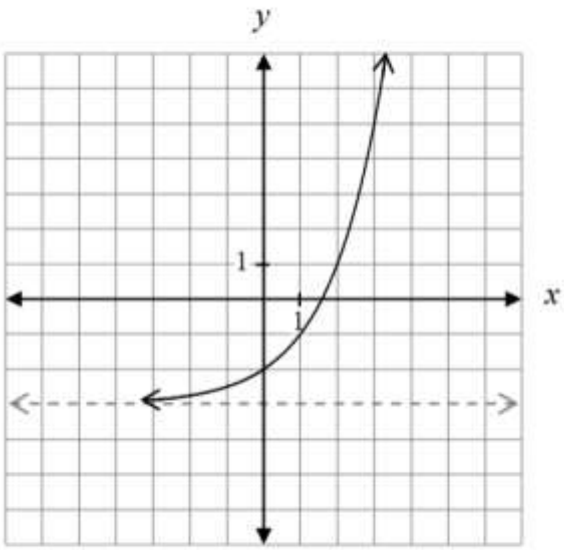
b)



1 point pour le graphique de la fonction réciproque conséquent avec a)

1 point

20. Quelle équation décrit le mieux le graphique de la fonction f(x) illustré ci-dessous ?



a) $f(x) = 2^{x+3}$ b) $f(x) = 2^{x} + 3$ c) $f(x) = 2^{x-3}$ d) $f(x) = 2^{x} - 3$

d)

21.

François a essayé de développer une expression logarithmique en utilisant les lois des logarithmes. Il a fait une erreur.

La solution de François : $\log_a \frac{(x+2)}{zw} = \log_a x + \log_a 2 - \log_a z - \log_a w$

Écris la bonne solution.

Bonne solution : $\log_a \frac{(x+2)}{zw} = \log_a (x+2) - \log_a z - \log_a w$

1 point pour la bonne solution

1 point

22. À l'aide des lois des logarithmes, développe :

$$\log_a \left(\frac{x \bullet y}{z} \right)$$

$\log_a x + \log_a y - \log_a z$

1 point pour la loi du logarithme du produit
1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

2 points

23.

L'expression $2\log x - \frac{1}{3}\log y$ sous forme d'un seul logarithme est :

a) $\log \frac{x^2}{\sqrt[3]{y}}$

c) $-\log x^2 \sqrt[3]{y}$

b) $\log \frac{2x}{3y}$

d) $\log\left(x^2 - \sqrt[3]{y}\right)$

a)

24.

Étant donné que $\log_a 9 = 1,129$ et que $\log_a 4 = 0,712$, trouve la valeur de $\log_a 12$.

Méthode 1

$$\log_a 9 = 1,129$$
$$\log_a 3^2 = 1,129$$
$$2\log_a 3 = 1,129$$
$$\log_a 3 = 0,5645$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$\begin{aligned}\log_a 12 &= \log_a(4 \bullet 3)\\ &= \log_a 4 + \log_a 3\\ &= 0,712 + 0,5645\\ &= 1,2765\\ &= 1,277\end{aligned}$$

1 point pour avoir écrit 12 comme un produit

1 point pour la loi du logarithme d'un produit

3 points

Méthode 2

$$\log_a 12 = \log_a\left(\sqrt{9} \bullet 4\right)$$
$$= \frac{1}{2}\log_a 9 + \log_a 4$$
$$= \frac{1}{2}(1,129) + 0,712$$
$$= 1,2765$$
$$= 1,277$$

1 point pour avoir écrit 12 comme un produit

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance
1 point pour la loi du logarithme d'un produit

3 points

Méthode 3

$$\log_a 9 = 1,129$$
$$a^{1,129} = 9$$

1 point pour la forme exponentielle

$$a = 9^{\frac{1}{1,129}}$$
$$a = 7$$

1 point pour avoir isolé a

$$\log_7 12 = \frac{\log 12}{\log 7}$$
$$= 1,276\ 989$$
$$= 1,277$$

1 point pour la valeur de $\log_a 12$

3 points

25. Résous : $e^{\ln(5 - x)} = 7$

a) -2 b) $-\ln 2$ c) $\ln 7 - \ln 5$ d) $\frac{7}{5}$

a)

26. Laquelle des équations suivantes peut être résolue sans utiliser les logarithmes ?

Explique ta réponse, sans résoudre le problème.

$$4^x = 10^{3x+1} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = 27^{4x-1}$$

L'équation $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} = 27^{4x-7}$ peut être résolue sans utiliser les logarithmes parce qu'on peut écrire $\frac{1}{3}$ et 27 avec une base de 3.

1 point pour l'explication

1 point

27. Claire résout l'équation suivante correctement :

$$\log_2(6-x)+\log_2(3-x)=2$$

Elle obtient deux valeurs possibles pour x : x = 2 et x = 7. Identifie laquelle de ces valeurs n'est pas acceptable et explique pourquoi.

Si x est plus grand que 3, on a des valeurs négatives pour l'argument, alors $x = 2$, mais $x \neq 7$.

ou

1 point pour l'explication

Le domaine est limité aux valeurs de $x < 3 \therefore x = 2$.

1 point

28.

Résous l'équation suivante algébriquement :

$$\log_3(x-4)+\log_3(x-2)=1$$

Méthode 1

$$\log_3(x-4)+\log_3(x-2)=1$$

$$\log_3(x-4)(x-2)=1$$

1 point pour la loi du logarithme d'un produit

$$3^1=(x-4)(x-2)$$

1 point pour la forme exponentielle

$$3=x^2-6x+8$$

$$0=x^2-6x+5$$

$$0=(x-5)(x-1)$$

$$x=5 \qquad \cancel{x=1}$$

0,5 point pour avoir isolé x dans une équation quadratique
0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

3 points

Méthode 2

$\log_3(x-4)+\log_3(x-2)=1$

$\log_3(x-4)(x-2)=1$ — 1 point pour la loi du logarithme d'un produit

$\log_3\left(x^2-6x+8\right)=\log_3 3$ — 0,5 point pour la forme logarithmique

$x^2-6x+8=3$ — 0,5 point pour avoir mis le signe d'égalité entre les arguments

$x^2-6x+5=0$

$(x-1)(x-5)=0$

$\cancel{x=1} \qquad x=5$ — 0,5 point pour avoir isolé x dans une équation quadratique
0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

3 points

29. Détermine la valeur de y dans l'équation suivante :

$$\log_x 27-\log_x 3=2\log_x y$$

$\log_x 27-\log_x 3=2\log_x y$

$\log_x \frac{27}{3}=2\log_x y$ — 1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

$\log_x 9=\log_x y^2$ — 1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$9=y^2$

$y=\pm 3$

$y=3 \qquad \cancel{y=-3}$ — 0,5 point pour la valeur positive de y
0,5 point pour la valeur négative de y et pour avoir rejeté la racine étrangère

3 points

30. Résous l'équation suivante :

$$2\log_4 x - \log_4(x+3) = 1$$

$$2\log_4 x - \log_4(x+3) = 1$$

$$\log_4\left(\frac{x^2}{x+3}\right) = 1$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance
1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

$$4^1 = \left(\frac{x^2}{x+3}\right)$$

1 point pour la forme exponentielle

$$4(x+3) = x^2$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x = 6 \qquad \cancel{x = -2}$$

0,5 point pour avoir isolé x
0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

4 points

31. Détermine l'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine de $y = \log_2(x + 4) - 1$.

Remplace x par 0.

$$y = \log_2 4 - 1$$

$$y = 2 - 1$$

0,5 point pour avoir évalué le logarithme

$$y = 1$$

0,5 point pour une valeur conséquente de y

$\therefore$ l'ordonnée à l'origine est 1

Remplace y par 0.

$$0 = \log_2(x+4) - 1$$

$$1 = \log_2(x+4)$$

$$2 = x + 4$$

0,5 point pour la forme exponentielle

$$-2 = x$$

0,5 point pour une valeur conséquente de x

$\therefore$ l'abscisse à l'origine est -2

2 points

32. Résous l'équation suivante :

$$2\log_2(x-1)-\log_2(x-5)=\log_2(x+1)$$

Méthode 1

$\log_2\dfrac{(x-1)^2}{x-5}=\log_2(x+1)$ — 2 points pour les lois du logarithme (1 point pour la loi du logarithme d'une puissance; 1 point pour la loi du logarithme d'un quotient)

$\dfrac{(x-1)^2}{x-5}=x+1$ — 1 point pour avoir mis le signe d'égalité entre les arguments

$x^2-2x+1=x^2-4x-5$

$2x=-6$

$\cancel{x=-3}$ — 0,5 point pour avoir isolé x

$\therefore$ aucune solution — 0,5 point pour aucune solution

4 points

Méthode 2

$2\log_2(x-1)=\log_2(x+1)+\log_2(x-5)$

$\log_2(x-1)^2=\log_2(x+1)(x-5)$ — 2 points pour les lois du logarithme (1 point pour la loi du logarithme d'une puissance; 1 point pour la loi du logarithme d'un produit)

$(x-1)^2=(x+1)(x-5)$ — 1 point pour avoir mis le signe d'égalité entre les arguments

$x^2-2x+1=x^2-4x-5$

$2x=-6$

$\cancel{x=-3}$ — 0,5 point pour avoir isolé x

$\therefore$ aucune solution — 0,5 point pour aucune solution

4 points

Méthode 3

$$\log_2(x-1)^2 - \log_2(x-5) - \log_2(x+1) = 0$$

$$\log_2 \frac{(x-1)^2}{(x-5)(x+1)} = 0$$

$$2^0 = \frac{(x-1)^2}{(x-5)(x+1)}$$

$$x^2 - 4x - 5 = x^2 - 2x + 1$$

$$-6 = 2x$$

$$\cancel{-3 = x}$$

$\therefore$ aucune solution

2 points pour les lois du logarithme (1 point pour la loi du logarithme d'une puissance; 1 point pour la loi du logarithme d'un quotient)
1 point pour la forme exponentielle

0,5 point pour avoir isolé x
0,5 point pour aucune solution

4 points

33. L'abscisse à l'origine du graphique de $y = 3^x - 1$ est :

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

b)

34. Résous l'équation suivante :

$$\log_4(x+2) + \log_4 3 = \log_4 x$$

Méthode 1

$$\log_4(x+2) + \log_4 3 = \log_4 x$$

$$\log_4\left[(x+2)3\right] = \log_4 x$$

$$3(x+2) = x$$

$$3x + 6 = x$$

$$x = -3$$

Pas de solution

1 point pour la loi du logarithme d'un produit
1 point pour avoir mis le signe d'égalité entre les arguments

0,5 point pour avoir isolé x
0,5 point pour avoir rejeté les racines étrangères

3 points

Méthode 2

$$\log_4(x+2)+\log_4 3=\log_4 x$$

$$\log_4(x+2)+\log_4 3-\log_4 x=0$$

$$\log_4\left[\frac{3(x+2)}{x}\right]=0$$

1 point pour la loi du logarithme d'un quotient (0,5 point pour la loi du logarithme du produit; 0,5 point pour la loi du logarithme d'un quotient)

$$4^0=\frac{3x+6}{x}$$

1 point pour la forme exponentielle

$$x=-3$$

0,5 point pour avoir isolé x

$$\cancel{x=-3}$$

0,5 point pour avoir rejeté les racines étrangères

3 points

35. Résous :

$$2\log_4 x-\log_4(x+3)=1$$

$$2\log_4 x-\log_4(x+3)=1$$

$$\log_4\left(\frac{x^2}{x+3}\right)=1$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance
1 point pour la loi du logarithme d'un quotient

$$4^1=\frac{x^2}{x+3}$$

1 point pour la forme exponentielle

$$4x+12=x^2$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$(x-6)(x+2)=0$$

$$x=6 \quad \cancel{x=-2}$$

0,5 point pour avoir isolé x
0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

4 points

36. Kim a résolu l'équation logarithmique suivante :

$$\log_2\left(-\frac{x}{3}\right) = \log_2(x-4)$$

$$-\frac{x}{3} = x - 4$$

$$-x = 3x - 12$$

$$-4x = -12$$

$$\cancel{x = 3}$$

Explique pourquoi x = 3 est une solution étrangère.

$x = 3$ est une solution étrangère du fait que l'argument dans une équation logarithmique ne peut pas être négatif.

1 point

37. Jess investit 12 000 $ à un taux de 4,75 % composé mensuellement. Combien de temps faudra-t-il à Jess pour tripler son investissement? Exprime ta réponse en années, à 3 décimales près.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

A : Valeur de l'investissement après t années
P : Valeur du placement initial
r : taux d'intérêt
n : le type de composition dans une année
t : le nombre d'année que l'investissement est placé.

Méthode 1

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$36\,000 = 12\,000\left(1 + \frac{0,0475}{12}\right)^{12t}$$ 0,5 point pour la substitution

$$3 = \left(1 + \frac{0,0475}{12}\right)^{12t}$$

$$\ln 3 = \ln\left(1 + \frac{0,0475}{12}\right)^{12t}$$ 0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

$$\ln 3 = 12t \ln\left(1 + \frac{0,0475}{12}\right)$$ 1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$t = \frac{\ln 3}{12 \ln\left(1 + \frac{0,0475}{12}\right)}$$ 0,5 point pour avoir isolé t

$$t = 23,174\,425$$ 0,5 point pour avoir évalué le quotient des logarithmes

$$t = 23,174 \text{ années}$$

3 points

38. Le nombre de fois qu'un site Web est visité peut être modelé selon la fonction :

$$A = 800(e)^{rt}$$

où A = le nombre total de visiteurs au temps t

t = le temps en jours $(t \geq 0)$

r = le taux de croissance

Après 5 jours, 40 000 personnes ont visité le site. Détermine le nombre de visiteurs prévus après 9 jours. Exprime ta réponse sous forme d'un nombre entier.

Méthode 1

$40\ 000 = 800e^{r5}$	0,5 point pour la substitution
$\frac{40\ 000}{800} = e^{5r}$	
$\ln 50 = \ln e^{5r}$	0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes
$\ln 50 = 5r$	1 point pour le théorème logarithmique
$\frac{\ln 50}{5} = r$	
$r = 0,782\ 404\ 601$	
$A = 800e^{(0,782\ 404\ 601)(9)}$	0,5 point pour la substitution
$A = 914\ 610,103$	0,5 point pour avoir calculé la valeur de l'expression ayant une base de e
$A = 914\ 610$	

3 points

39. On a ressenti un tremblement de terre de magnitude 6,3 sur l'échelle Richter à Vancouver, et un autre de magnitude 8,9 sur l'échelle Richter au Japon.

Combien de fois le tremblement de terre ressenti au Japon était-il plus intense que celui de Vancouver ?

Tu peux utiliser la formule suivante :

$$M = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

où M correspond à la magnitude du tremblement de terre sur l'échelle Richter

A correspond à l'intensité du tremblement de terre

A_0 correspond à l'intensité d'un tremblement de terre de référence

Exprime ta réponse sous forme d'un nombre entier.

Méthode 1

Vancouver : substitue $M = 6,3$

$$6,3 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$10^{6,3} = \frac{A}{A_0}$$ 0,5 point pour la forme exponentielle

$$A = 10^{6,3} A_0$$

Japon : substitue $M = 8,9$

$$8,9 = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

$$10^{8,9} = \frac{A}{A_0}$$ 0,5 point pour la forme exponentielle

$$A = 10^{8,9} A_0$$

Pour comparer les deux tremblements de terre, divise leurs intensités.

$$\frac{\text{l'intensité du Japon}}{\text{l'intensité de Vancouver}} = \frac{10^{8,9} A_0}{10^{6,3} A_0}$$ 1 point pour la comparaison

$$= 398,107$$

$$= 398$$

2 points

Méthode 2

$$\frac{I_J}{I_V} = \frac{10^{8,9}}{10^{6,3}}$$
$$= 398$$

1 point pour la comparaison
0,5 point pour la forme exponentielle
0,5 point pour la forme exponentielle

2 points

40.

On veut investir dans un compte d'épargne qui donne un intérêt annuel de 3 %, composé mensuellement. Combien d'investissements mensuels de 50 $ seront nécessaires pour que la valeur finale soit de 50 000 $?

Utilise la formule :

$$\mathrm{VF} = \frac{\mathrm{R}\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

où VF = la valeur finale
R = le montant investi
$i = \dfrac{\text{le taux d'intérêt annuel}}{\text{le nombre de compositions en une année}}$
n = le nombre d'investissements

Exprime ta réponse sous forme d'un nombre entier.

$$50\ 000 = \frac{50\left[\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^n - 1\right]}{\frac{0,03}{12}}$$

0,5 point pour la substitution

$$50\ 000 = \frac{50\left[(1+0,0025)^n - 1\right]}{0,0025}$$

$$50\ 000 = 20\ 000\left(1,0025^n - 1\right)$$

$$2,5 = 1,0025^n - 1$$

$$3,5 = 1,0025^n$$

0,5 point pour la simplification

$$\log 3,5 = \log 1,0025^n$$

0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

$$\log 3,5 = n \log 1,0025$$

1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$n = \frac{\log 3,5}{\log 1,0025}$$

$$n = 501,73$$

0,5 point pour avoir isolé n

$\therefore$ 502 investissements mensuels seront nécessaires. **3 points**

41.

Une population de 500 bactéries va tripler en 20 heures.

En utilisant la formule ci-dessous,

$A = Pe^{rt}$

$A =$ population après t heures
$P =$ population initiale
$r =$ taux de croissance
$t =$ temps en heures

a) Détermine le taux de croissance, r.

b) Détermine combien d'heures il faudrait pour que la population initiale double, avec le même taux de croissance.

a)

$1500 = 500e^{r(20)}$	0,5 point pour la substitution
$3 = e^{20r}$	
$\ln 3 = \ln e^{20r}$	0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes
$\ln 3 = 20r \bullet \ln e$	0,5 point pour la loi du logarithme d'une puissance
$r = \dfrac{\ln 3}{20}$	
$r = 0,054\ 930\ 614$	0,5 point pour avoir évalué le quotient des logarithmes

2 points

b)

$1000 = 500e^{0,054\ 930\ 614t}$	0,5 point pour la substitution
$2 = e^{0,054\ 930\ 614t}$	
$\ln 2 = \ln e^{0,054\ 930\ 614t}$	0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes
$\ln 2 = 0,054\ 930\ 614t \bullet \ln e$	0,5 point pour la loi du logarithme d'une puissance
$t = \dfrac{\ln 2}{0,054\ 930\ 614}$	
$t = 12,619$ heures	0,5 point pour avoir évalué le quotient des logarithmes

2 points

42.

Un lac touché par des pluies acides a un pH de 4,4.
Une personne souffrant de brûlures d'estomac a un pH acide gastrique de 1,2.
Le pH d'une solution est défini comme $pH = -\log\left[H^+\right]$ où $\left[H^+\right]$ est la concentration en ions hydrogène.

Combien de fois la concentration en ions hydrogène de l'estomac est-elle supérieure à celle du lac?

Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

Méthode 1

$$pH = -\log\left[H^+\right]$$
$$-pH = \log\left[H^+\right]$$
$$\left[H^+\right] = 10^{-pH}$$

1 point pour la forme exponentielle

$$\frac{\left[H^+\right]_{estomac}}{\left[H^+\right]_{lac}} = \frac{10^{-1,2}}{10^{-4,4}}$$

1 point pour la comparaison

$$= 10^{3,2}$$
$$= 1584,9$$
$$= 1585$$

2 points

Méthode 2

Lac

$$4,4 = -\log\left[H^+\right]$$
$$-4,4 = \log\left[H^+\right]$$
$$10^{-4,4} = \left[H^+\right]$$

0,5 point pour la forme exponentielle

Estomac

$$1,2 = -\log\left[H^+\right]$$
$$-1,2 = \log\left[H^+\right]$$
$$10^{-1,2} = \left[H^+\right]$$

0,5 point pour la forme exponentielle

$$\frac{\left[H^+\right]_{estomac}}{\left[H^+\right]_{lac}} = \frac{10^{-1,2}}{10^{-4,4}}$$

1 point pour la comparaison

$$= 10^{3,2}$$
$$= 1585$$

2 points

43. Résous algébriquement :

$$10^{3x} = 7^{x+5}$$

Exprime ta réponse à 3 décimales près.

Méthode 1

$$10^{3x} = 7^{x+5}$$

$$\log 10^{3x} = \log 7^{x+5}$$ 0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

$$3x(\log 10) = (x+5)\log 7$$ 1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$3x\log 10 = x\log 7 + 5\log 7$$

$$3x\log 10 - x\log 7 = 5\log 7$$ 0,5 point pour avoir rassemblé les termes avec x

$$x = \frac{5\log 7}{3\log 10 - \log 7}$$ 0,5 point pour avoir isolé x

$$x = 1{,}960\ 873$$ 0,5 point pour avoir évalué le quotient d'un logarithme

$$x = 1{,}961$$

Méthode 2

$$10^{3x} = 7^{x+5}$$

$$\log 10^{3x} = \log 7^{x+5}$$

$$3x(\log 10) = (x+5)\log 7$$

$$3x = x\log 7 + 5\log 7$$

$$3x - x\log 7 = 5\log 7$$

$$x = \frac{5\log 7}{3 - \log 7}$$

$$x = 1{,}960\ 873$$

$$x = 1{,}961$$

3 points

44. Résous :

$$2^{5x} = 3(5)^{x-3}$$

$$\log 2^{5x} = \log\left[3(5)^{x-3}\right]$$ 0,5 point pour avoir utilisé les logarithmes

$$5x\log 2 = \log 3 + (x-3)\log 5$$ 1 point pour la loi du logarithme du produit
1 point pour la loi du logarithme d'une puissance

$$5x\log 2 = \log 3 + x\log 5 - 3\log 5$$

$$5x\log 2 - x\log 5 = \log 3 - 3\log 5$$ 0,5 point pour le rassemblement de termes semblables

$$x(5\log 2 - \log 5) = \log 3 - 3\log 5$$

$$x = \frac{\log 3 - 3\log 5}{5\log 2 - \log 5}$$ 0,5 point pour avoir isolé x

$$x = -2{,}009$$ 0,5 point pour avoir évalué un quotient des logarithmes

4 points