

Pré-Calcul 40S

Enseignante :
Mme. Layton

Nom de l'élève :

Unité :

Pratique et Devoir de Classe
Les Fonctions Polynomiales

Table des matières

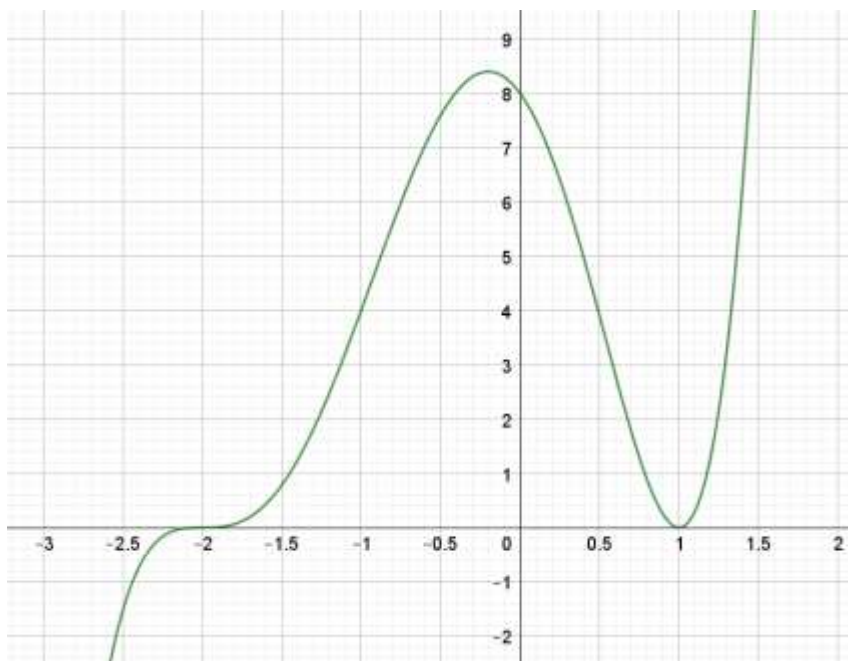
Leçon 1 : Les Caractéristiques des fonctions polynomiales	p. 3
Leçon 2 : Le théorème de reste	p. 4
Leçon 3 : Le théorème du facteur	p. 5
Leçon 4 : L'équation et le graphique de fonction polynomiale	p. 6
Devoir Fonctions Polynomiales	p. 7 - 28

Pratique : Fonctions Polynomiale Leçon 1

1. Identifie le degré, le terme constant, le coefficient dominant et le comportement aux extrémités de chaque fonction polynomiale.

	Degré	Terme constant	Coefficient dominant	Comportement aux extrémités	Nombre d'abscisses possibles
a) $f(x) = -x^3 + x^2 + 10$					
b) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 6$					
c) $f(x) = -2x^2 + 5$					
d) $y = -2x^3 + 3x^2 + x + 4$					

2. a) Indique les racines et leurs multiplicités.



b) Donne le signe du coefficient dominant.

c) Donne la valeur du terme constant.

Pratique : Fonctions Polynomiale Leçon 2

1. Détermine si $x + 2$ est un facteur de $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

2. Détermine tous les zéros du polynôme $p(x) = x^3 - 3x + 2$ si $(x - 1)$ est un facteur.

3. Divise la fonction $P(x) = x^4 - 3x + 7x^3 - 5$ par $x - 1$.

Pratique : Fonctions Polynomiale Leçon 3

1. Détermine tous les facteurs du polynôme $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

2. Détermine la valeur de k pour la fonction si $P(-2) = 3$

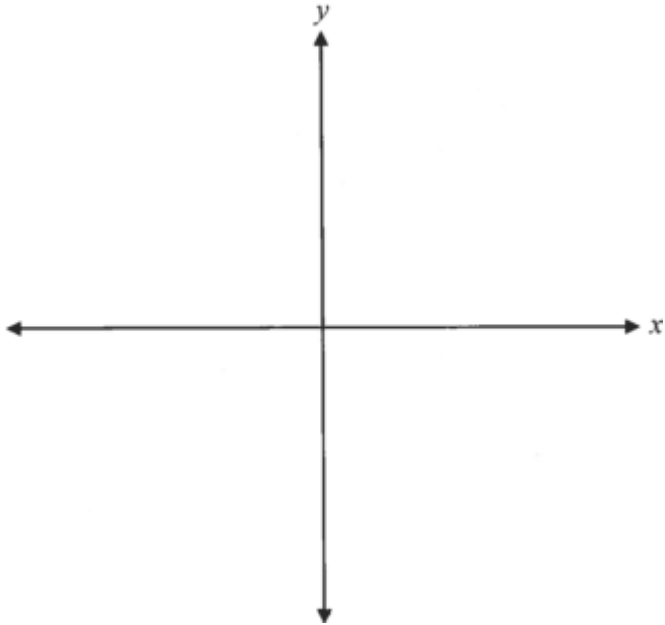
$$P(x) = x^3 + kx^2 + x + 5$$

4. On doit découper des blocs de granit rectangulaires pour construire l'entrée principale d'un nouvel hôtel. Le volume V , en mètres cubes, de chaque bloc peut être modélisé par la fonction $V(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$, où x est une valeur exprimée en mètres. Si une des dimensions est $x + 3$, quelles sont les deux autres dimensions possibles des blocs, en fonction de x ?

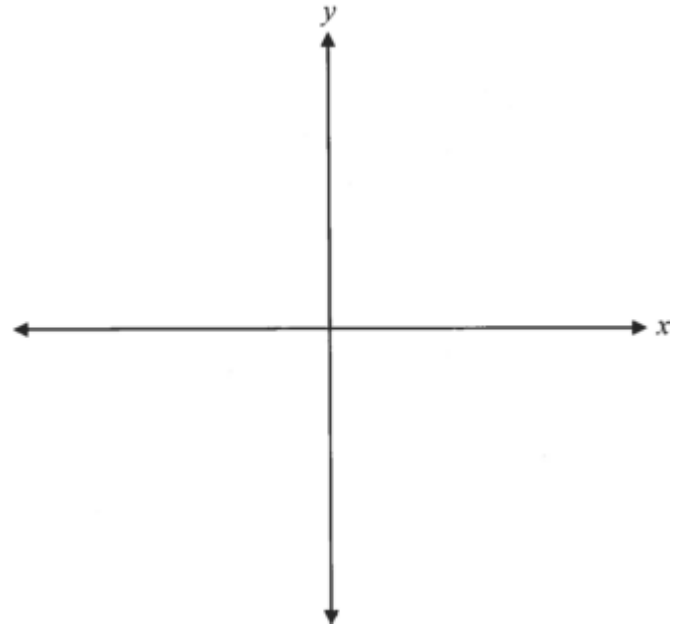
Pratique : Fonctions Polynomiale Leçon 4

1. Trace les graphiques des fonctions ci-dessous.

a) $P(x) = x(x + 3)^3(x - 1)$

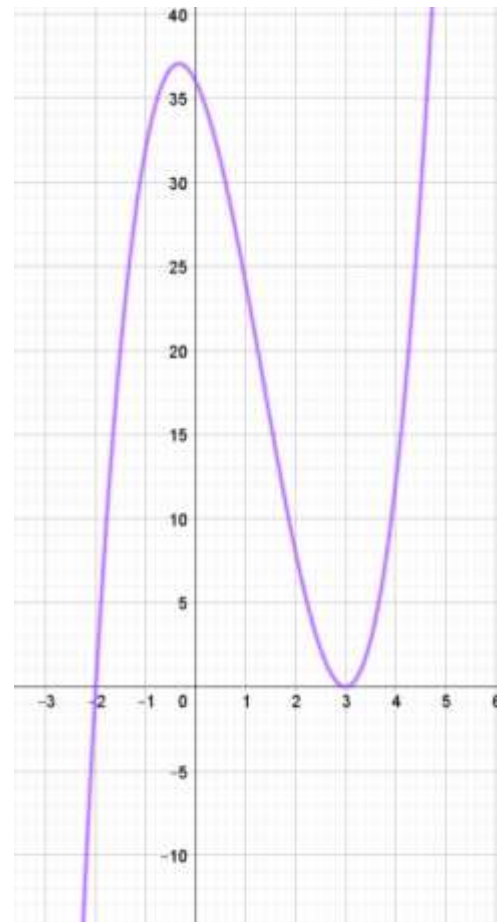


b) $P(x) = -x(x - 4)^2(x + 2)$



2. Détermine l'équation pour la fonction $f(x)$ ci-dessous.

Ordonnée $y = 36$



Devoir Fonctions Polynomiales

1. Indique si chaque fonction est une fonction polynomiale. Explique tes réponses.

a) $h(x) = 2 - \sqrt{x}$

d) $g(x) = 3x^4 - 7$

b) $y = 3x + 1$

e) $p(x) = x^{-3} + x^2 + 3x$

c) $f(x) = 3^x$

f) $y = -4x^3 + 2x + 5$

b, d et f sont des fonctions polynomiales parce que leurs puissances sont des nombres entiers positifs.

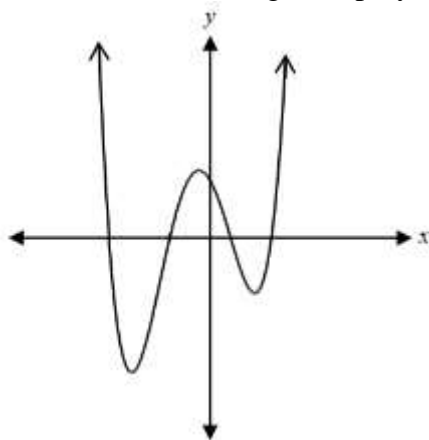
2. Quel est le degré du polynôme représenté ci-dessous?

a) 2

b) 3

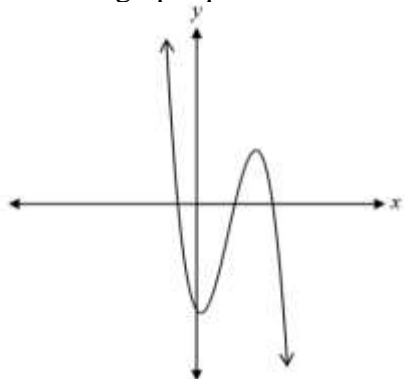
c) 4

d) 5



c)

3. Le graphique ci-dessous représente l'équation $y = ax^3 + 6x^2 + 5x - 10$.



Qu'est-ce qui doit être vrai concernant la valeur de a ? Explique ton raisonnement.

a est n'importe quel nombre négatif.

0,5 point

Une explication qui fait référence au comportement à l'infini.

0,5 point pour l'explication

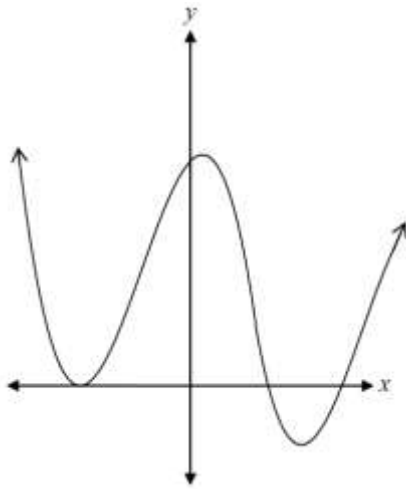
OU

a ne peut pas être égal à zéro.

0,5 point

Le graphique est celui d'une fonction cubique et non celui d'une fonction quadratique.

0,5 point pour l'explication



4. Examine le graphique de la fonction polynomiale ci-dessous, et dis lequel des énoncés suivants peut être vrai.

- a) Il s'agit d'une fonction de degré 4 dont le coefficient de la puissance la plus élevée est positif.
- b) Il s'agit d'une fonction de degré 4 dont le coefficient de la puissance la plus élevée est négatif.
- c) Il s'agit d'une fonction de degré 3 dont le coefficient de la puissance la plus élevée est positif.
- d) Il s'agit d'une fonction de degré 3 dont le coefficient de la puissance la plus élevée est négatif.

a)

5. Explique comment les comportements à l'infini des graphiques de fonctions polynômes avec un degré pair et avec un degré impair sont différents.

Si le degré est impair, le comportement à l'infini va en directions opposées.

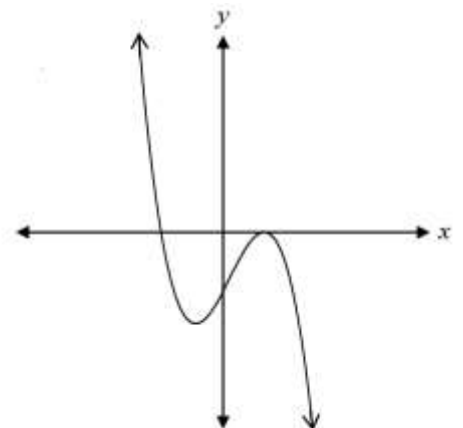
Si le degré est pair, le comportement à l'infini va dans la même direction.

1 point

6. Quel est le degré de la fonction polynomiale représentée par le graphique ci-dessous?

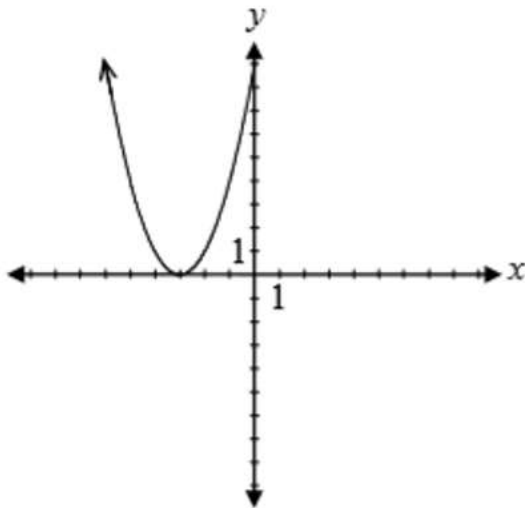
- a) 2
- b) 3
- c) 4
- d) 5

3)



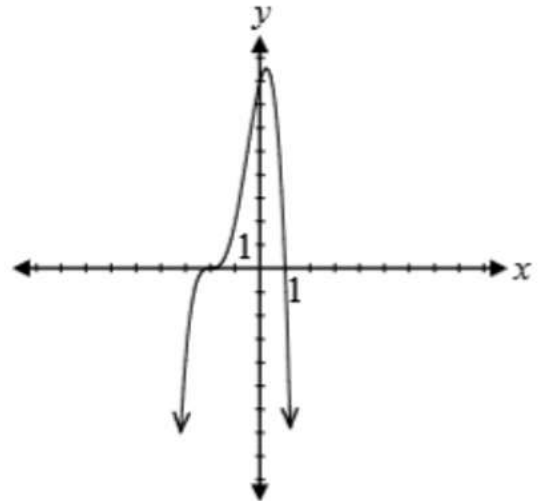
10. Indique les zéros et leur multiplicités pour les graphiques des fonctions polynomiales.

a)



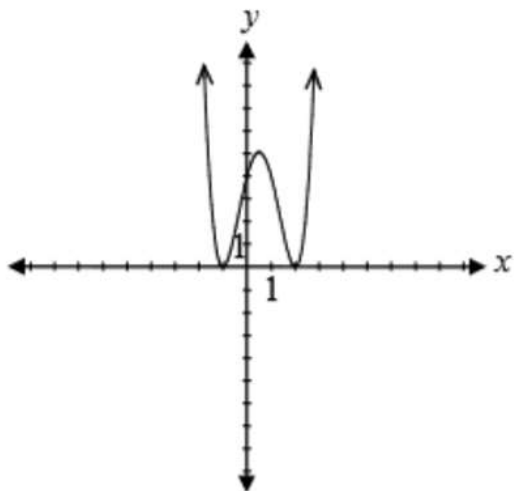
zéro : $x = -3$ multiplicité de 2

b)



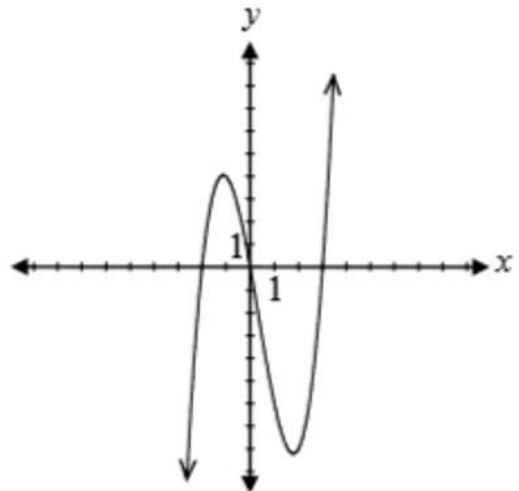
**zéros : $x = -2$ multiplicités de 3
zéro : $x = 1$ multiplicité de 1**

c)



**zéro : $x = -1$ multiplicité de 2
zéro : $x = 2$ multiplicité de 1**

d)



**zéros : $x = -2$ multiplicités de 1
zéros : $x = 0$ multiplicités de 1
zéros : $x = 3$ multiplicités de 1**

11. Si $p(x) = x^5 - 12x + 1$, détermine le reste quand $p(x)$ est divisé par $(x + 2)$.

Méthode 1

$$\begin{aligned}
 p(x) &= x^5 - 12x + 1 \\
 p(-2) &= (-2)^5 - 12(-2) + 1 && \text{1 point pour la substitution} \\
 &= -32 + 24 + 1 \\
 &= -7
 \end{aligned}$$

1 point

Méthode 2

$ \begin{array}{r} -2 \overline{) 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -12 \ 1} \\ \underline{-2 } \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -12 \ 1 \\ \underline{-2 \ 4 \ -8 \ 16 \ -8} \\ 1 \ -2 \ 4 \ -8 \ 4 \ -7 \end{array} $	<p>1 point pour la bonne présentation de la division synthétique</p> <div style="border: 1px solid black; border-radius: 10px; padding: 5px; display: inline-block; margin-top: 10px;">1 point</div>
--	--

Le reste est -7 .

12. Étant donné que $(x - 1)$ est un des facteurs, exprime $x^3 - 57x + 56$ sous la forme d'un produit de facteurs.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad \overline{) \quad 1 \quad 0 \quad -57 \quad 56} \\
 \quad \underline{\downarrow \quad 1 \quad \quad -56} \\
 \quad 1 \quad 1 \quad -56 \quad 0
 \end{array}$$

0,5 point pour $x = 1$

1 point pour la division synthétique (ou pour une autre stratégie équivalente)

$$(x - 1)(x^2 + x - 56)$$

ou

$$(x - 1)(x + 8)(x - 7)$$

0,5 point pour les facteurs conséquents

2 points

13. Est-ce que $(x - 3)$ est un facteur de $x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 1$?

Justifie ta réponse.

Méthode 1

$$\begin{aligned}
 x &= 3 \\
 \therefore (3)^4 - (3)^3 - 3(3)^2 + (3) - 1 &= 81 - 27 - 27 + 3 - 1 \\
 &= 29
 \end{aligned}$$

Le reste n'est pas égal à zéro, donc $(x - 3)$ n'est pas un facteur.

0,5 point pour $x = 3$

1 point pour le théorème du reste

0,5 point pour l'explication

2 points

Méthode 2

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 3 & 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\
 & \downarrow & & & & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 3 & 10 & 29
 \end{array}$$

Le reste n'est pas égal à zéro,
donc $(x - 3)$ n'est pas un facteur.

0,5 point pour $x = 3$

1 point pour la division synthétique

0,5 point pour l'explication

2 points

14. Étant donné que $(x + 3)$ est un facteur d'un polynôme $P(x)$, lequel des énoncés suivants est vrai?

- a) $P(-3) = 0$ b) $P(0) = -3$ c) $P(0) = 3$ d) $P(3) = 0$

a)

15. L'un des facteurs de $P(x) = x^3 - kx^2 - 7x + 10$ est $(x - 2)$. Trouve la valeur de k .

Méthode 1

$$x = 2$$

0,5 point pour $x = 2$

$$0 = (2)^3 - k(2)^2 - 7(2) + 10$$

1 point pour le théorème du reste

$$0 = 8 - 4k - 14 + 10$$

$$0 = 4 - 4k$$

$$4k = 4$$

$$k = 1$$

0,5 point pour avoir isolé k

2 points

Méthode 2

$$x = 2$$

0,5 point pour $x = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 1 & -k & -7 & 10 \\
 & & 2 & -2k + 4 & -4k - 6 \\
 \hline
 & 1 & -k + 2 & -2k - 3 & -4k + 4
 \end{array}$$

0,5 point pour la division synthétique

$$-4k + 4 = 0$$

$$4k = 4$$

$$k = 1$$

0,5 point pour avoir mis le reste
égale à zéro

0,5 point pour avoir isolé k

2 points

16. Lorsqu'on divise $P(x)$ par $x - 3$, le quotient est $2x^2 + x - 6$ et le reste est 4.

Détermine $P(x)$.

$$P(x) = (x - 3)(2x^2 + x - 6) + 4$$

ou

1 point pour l'expression du polynôme $P(x)$

1 point

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 9x + 22$$

17. a) Détermine le reste quand $x^4 - 3x^2 + 1$ est divisé par $x + 2$.

a) $(-2)^4 - 3(-2)^2 + 1$
 $16 - 12 + 1$
 5

1 point pour le théorème du reste

ou

ou

-2	1	0	-3	0	1
		-2	4	-2	4
	1	-2	1	-2	5

1 point la division synthétique

1 point

Le reste est 5.

b) Est-ce que $x + 2$ est un facteur de $x^4 - 3x^2 + 1$? Explique ton raisonnement.

b) Pour que $x + 2$ soit un facteur de $x^4 - 3x^2 + 1$, le reste doit être 0. Puisque le reste est 5, $x + 2$ n'est pas un facteur.

1 point pour l'explication

1 point

18. Divise $(x^3 - 5x - 4)$ par $(x + 1)$.

Méthode 1

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 -1 & 1 & 0 & -5 & -4 & \\
 & & -1 & 1 & 4 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & -4 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^2 - x - 4$$

1 point pour la présentation de la division synthétique avec addition

1 point pour le quotient

2 points

Méthode 2

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x - 4 \\
 x + 1 \overline{) x^3 + 0x^2 - 5x - 4} \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} \\
 -x^2 - 5x \\
 \underline{-(-x^2 - x)} \\
 -4x - 4 \\
 \underline{-(-4x - 4)} \\
 0
 \end{array}$$

1 point pour la présentation de la division longue

1 point pour le quotient

2 points

Méthode 3

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 1 & 1 & 0 & -5 & -4 & \\
 & & 1 & -1 & -4 & \\
 \hline
 & 1 & -1 & -4 & 0 &
 \end{array}$$

$$x^2 - x - 4$$

1 point pour la présentation de la division synthétique avec soustraction

1 point pour le quotient

2 points

19. Est-ce que $(x - 2)$ est un facteur du polynôme $p(x) = -x^4 - 3x^3 + 11x^2 + 3x - 10$? Justifie ta réponse.

Méthode 1

$$\begin{aligned} p(2) &= -(2)^4 - 3(2)^3 + 11(2)^2 + 3(2) - 10 \\ &= -16 - 24 + 44 + 6 - 10 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le reste est zéro, alors $(x - 2)$ est un facteur.

0,5 point pour $p(2)$

1 point pour le théorème du reste

0,5 point pour la justification

2 points

Méthode 2

2	-1	-3	11	3	-10
	↓	-2	-10	2	10
	-1	-5	1	5	0

Le reste est zéro, alors $(x - 2)$ est un facteur.

0,5 point pour $x = 2$

1 point pour la division synthétique (ou une stratégie équivalente)

0,5 point pour la justification

2 points

20. Détermine tous les zéros de la fonction $p(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$, étant donné que l'un des facteurs de $p(x)$ est $(x - 3)$.

$$0 = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$$

3	1	-5	-2	24
	↓	3	-6	-24
	1	-2	-8	0

0,5 point pour $x = 3$

1 point pour la division synthétique (ou pour toute stratégie équivalente)

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

zéros : 3, 4, -2

0,5 point pour les zéros constants

2 points

21. Le produit de quatre nombres entiers est $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$, où x est un des nombres entiers. Quelles sont des expressions possibles des trois autres nombres entiers ?

$$\frac{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x}{x} = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \quad x(x^2 + 6x + 11x + 6)$$

$\hookrightarrow (x+1)$ est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline x & 1 & 5 & 6 & 0 \end{array} = x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$$

$(x+1), (x+2)$ et $(x+3)$ sont des expressions possibles pour les trois autres nombres entiers.

termes constants
facteurs possibles
 $P(-1) = (-1)^3 + 6(-1)^2 + 11(-1) + 6 = 0$

22.

Christine saute d'un plongeur.

Sa plonge est modélisée par la fonction $h(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3$, où h est sa hauteur en mètres par rapport à la surface de l'eau et t est le temps en secondes après qu'elle plonge du plongeur.

a) Étant donné que $(t+1)$ est un facteur de la fonction $h(t)$, détermine les autres facteurs.

a)
$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ & & \downarrow & -1 & 4 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array}$$

$h(t) = (t+1)(t^2 - 4t + 3)$

$h(t) = (t+1)(t-1)(t-3)$

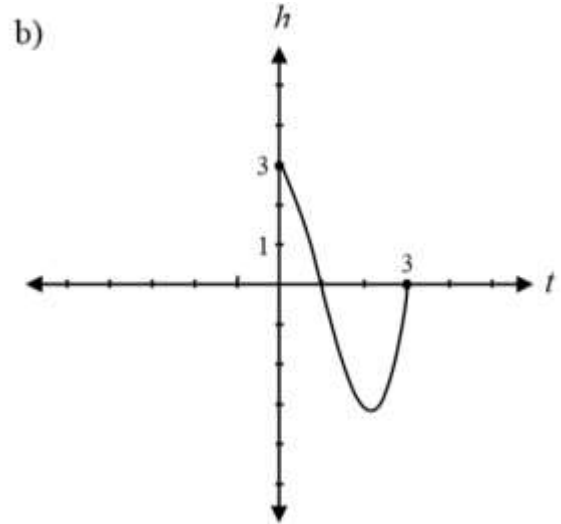
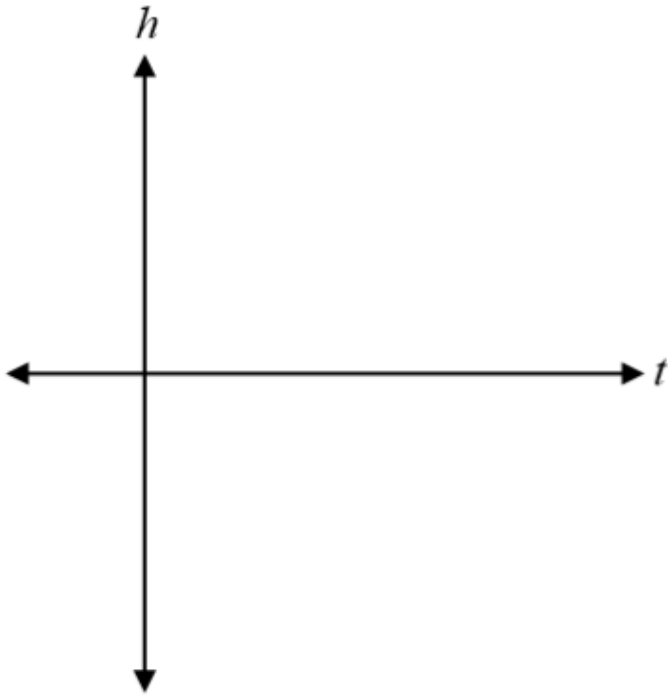
0,5 point pour $t = -1$

1 point pour la division synthétique (ou une stratégie équivalente)

0,5 point pour avoir déterminé les autres facteurs

2 points

b) Trace le graphique de la fonction $h(t)$ pour l'intervalle de temps $t = 0$ à $t = 3$.



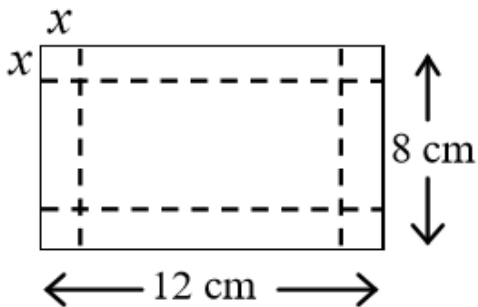
0,5 point pour les abscisses à l'origine
0,5 point pour l'ordonnée à l'origine

c) Détermine le temps en secondes pendant lequel Christine demeure sous l'eau.

c) Christine est restée 2 secondes sous l'eau.

1 point

23. Une feuille de papier d'une longueur de 12 cm et d'une largeur de 8 cm est utilisée pour faire une boîte sans couvercle. Des carrés égaux, avec des côtés qui mesurent x cm, sont coupés dans chacun des coins et les côtés sont pliés pour former la boîte.



Quelle expression donne le volume de la boîte?

a) $V(x) = x(12 + x)(8 + x)$ c) $V(x) = x(12 + 2x)(8 + 2x)$

b) $V(x) = x(12 - x)(8 - x)$ d) $V(x) = x(12 - 2x)(8 - 2x)$

d)

24. Une boîte en forme de prisme rectangulaire a des côtés de longueurs x , $x + 2$, et $x + 10$. Écris une fonction, $V(x)$, pour exprimer le volume de la boîte en termes de x .

Trouve toutes les valeurs possibles de x , étant donné que le volume de la boîte est 96 cm^3 .

Détermine les dimensions de la boîte.

$$V(x) = (x)(x + 2)(x + 10)$$

0,5 point pour avoir exprimé le volume en termes de x

$$96 = (x)(x + 2)(x + 10)$$

$$96 = x^3 + 12x^2 + 20x$$

$$0 = x^3 + 12x^2 + 20x - 96$$

0,5 point pour avoir fait l'égalité à zéro

quand $x = 2$:

$$0 = (2)^3 + 12(2)^2 + 20(2) - 96$$

$$0 = 8 + 48 + 40 - 96$$

$$0 = 0$$

$\therefore x = 2$ est une valeur possible.

1 point pour avoir identifié une valeur possible de x

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 12 & 20 & -96 \\ & & 2 & 28 & 96 \\ \hline & 1 & 14 & 48 & 0 \end{array}$$

1 point pour la division

$$(x - 2)(x^2 + 14x + 48) = 0$$

$$(x - 2)(x + 8)(x + 6) = 0$$

$$x = -8, -6, 2$$

$x \neq -8$ et $x \neq -6$ parce que les dimensions ne peuvent pas être des valeurs négatives.

$\therefore x = 2$ est la seule solution.

1 point pour avoir identifié toutes les valeurs possibles de x

0,5 point pour avoir rejeté les racines étrangères

Les dimensions de la boîte sont $2 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$.

0,5 point pour avoir indiqué les dimensions de la boîte

5 points

25. Le volume, $V(h)$, d'une étagère peut être représenté par l'expression $h^3 - 2h^2 + h$, où h est la hauteur de l'étagère. Quelles sont les dimensions possibles de l'étagère, en fonction de h ?

$$V(x) = \ell L h \quad \text{Si } h = \text{hauteur, donc } \frac{V(x)}{h} = \ell L$$

$$h(h^2 - 2h + h) \quad \leftarrow \quad \frac{h^3 - 2h^2 + h}{h} = h^2 - 2h + 1 = (h-1)(h-1)$$

$$V(h) = h^3 - 2h^2 + h = (h)(h-1)(h-1)$$

26. Le volume maximal d'eau contenu dans un aquarium rectangulaire peut être modélisé par $V(x) = x^3 + 14x^2 + 63x + 90$. Si la profondeur de l'aquarium est représentée par le polynôme $x + 6$, quels polynômes représentent la longueur et la largeur possibles de l'aquarium ?



$$\frac{V(x)}{h} = \ell L$$

$$\ell L = \frac{x^3 + 14x^2 + 63x + 90}{x + 6}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -6 & 1 & 14 & 63 & 90 \\ + & & -6 & -48 & -90 \\ \hline x & 1 & 8 & 15 & 0 \end{array}$$

$$V(x) = (x+6)(x^2 + 8x + 15)$$

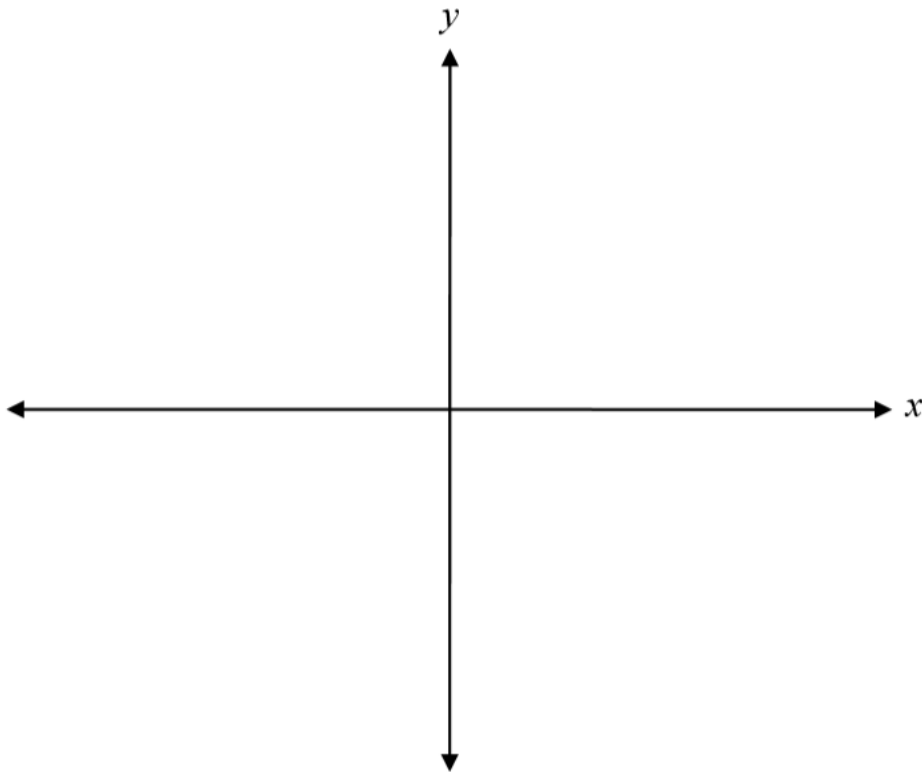
$$V(x) = (x+6)(x+5)(x+3)$$

↳ Largeur et longueur possibles sont $x+5$ et $x+3$

27. Trace le graphique de :

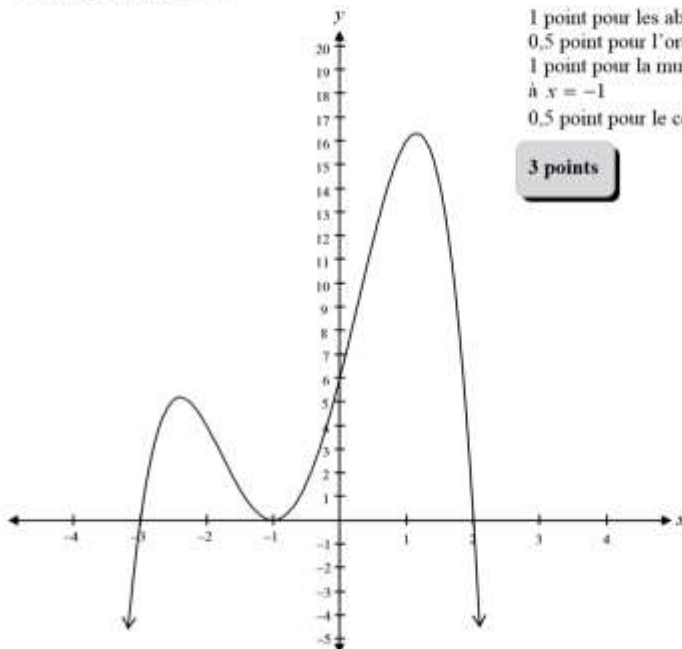
$$f(x) = (2 - x)(x + 3)(x + 1)^2$$

Étiquette les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine.



les abscisses à l'origine : -3, -1 et 2

l'ordonnée à l'origine : 6



- 1 point pour les abscisses à l'origine
- 0,5 point pour l'ordonnée à l'origine
- 1 point pour la multiplicité de 2 seulement à $x = -1$
- 0,5 point pour le comportement à l'infini

3 points

28.

Trace le graphique de $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$ étant donné que l'une des abscisses à l'origine est 1.
Identifie les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine.

$$x = 1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & -5 & 3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

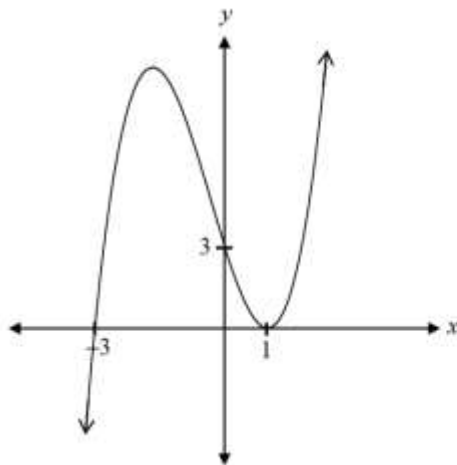
1 point pour la division synthétique

$$y = (x - 1)(x^2 + 2x - 3)$$

$$y = (x - 1)(x + 3)(x - 1)$$

$$y = (x + 3)(x - 1)^2$$

1 point pour avoir identifié les facteurs

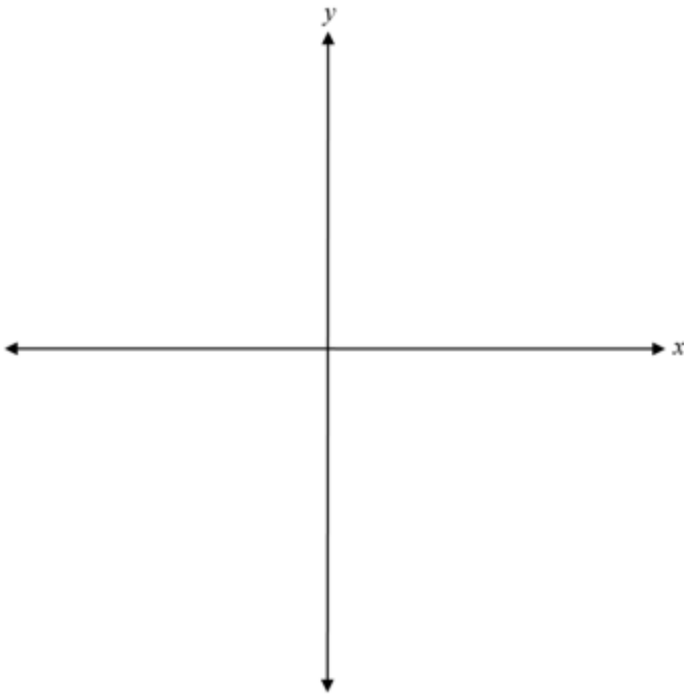


2 points pour le graphique (0,5 point pour l'abscisse à l'origine, 0,5 point pour la multiplicité; 0,5 point pour l'ordonnée à l'origine; 0,5 point pour le comportement à l'infini)

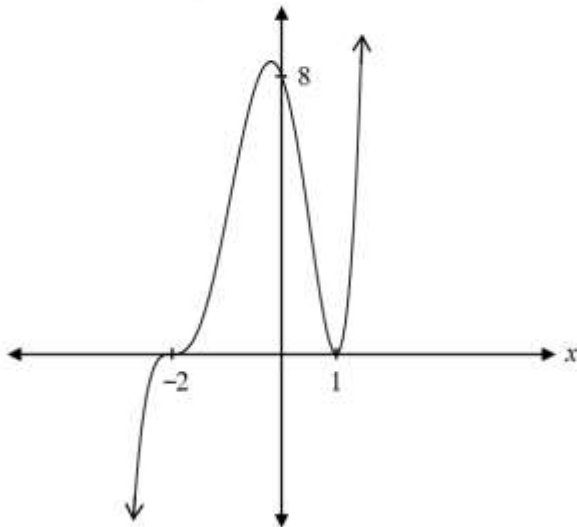
4 points

29. Trace le graphique de $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$.

Étiquette les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine.



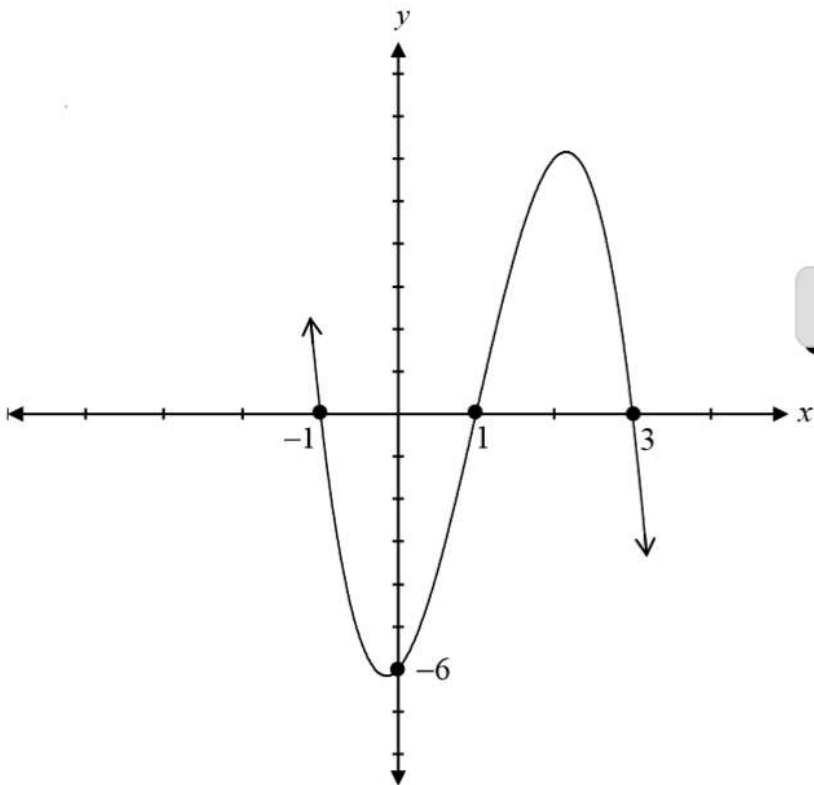
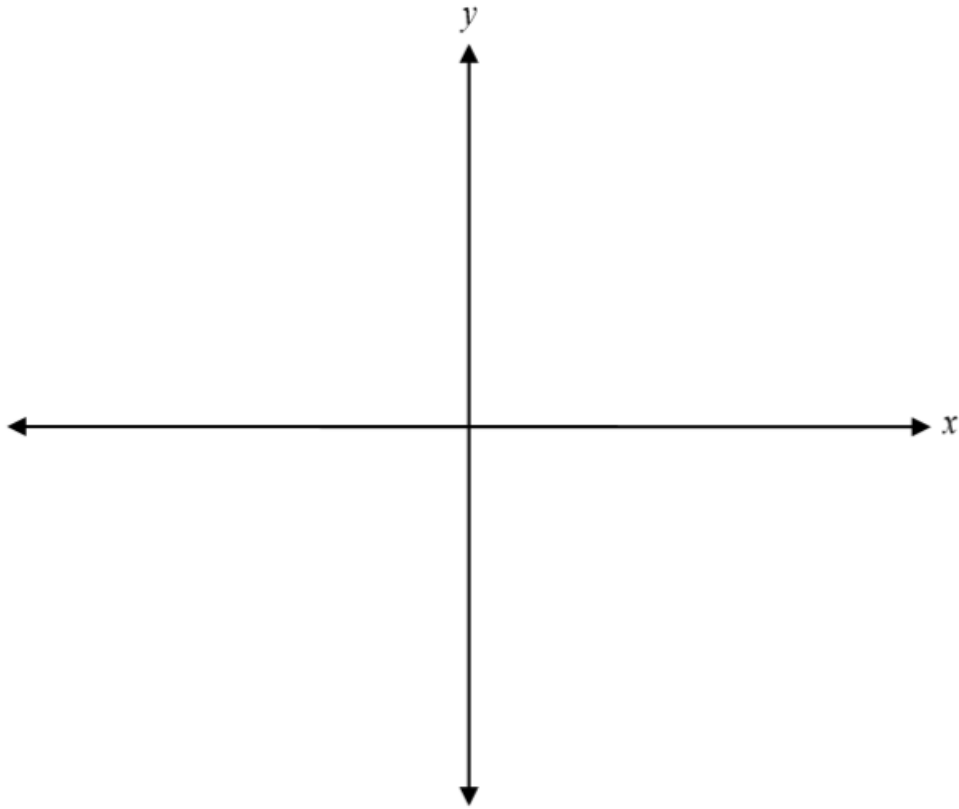
l'abscisse à l'origine : -2, 1
 l'ordonnée à l'origine : 8



1 point pour les abscisses à l'origine
 0,5 point pour l'ordonnée à l'origine
 1 point pour la multiplicité (0,5 point pour le degré de 2; 0,5 point pour le degré de 3)
 0,5 point pour le comportement à l'infini

3 points

30. Trace le graphique de $f(x) = -2(x - 1)(x - 3)(x + 1)$.

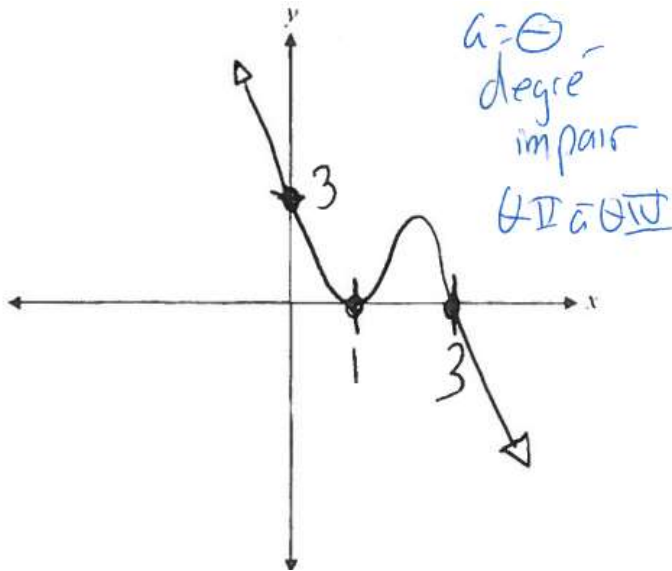
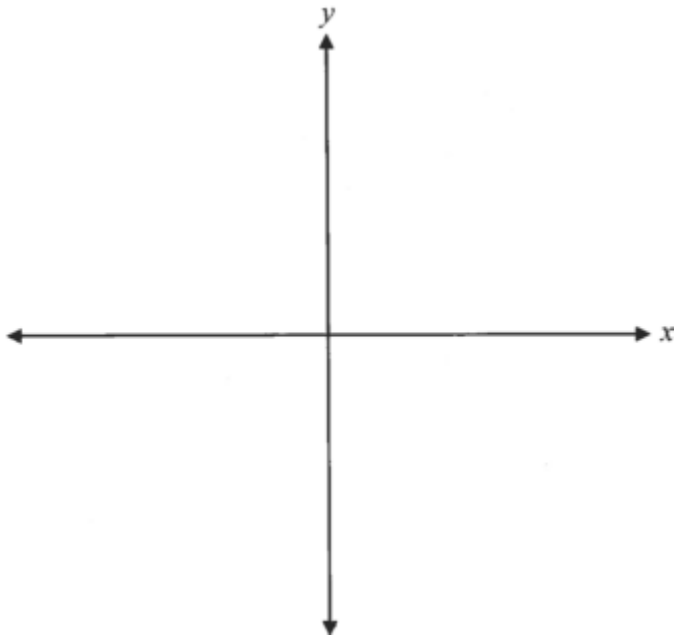


1 point pour les abscisses à l'origine
1 point pour l'ordonnée à l'origine
1 point pour le comportement à l'infini

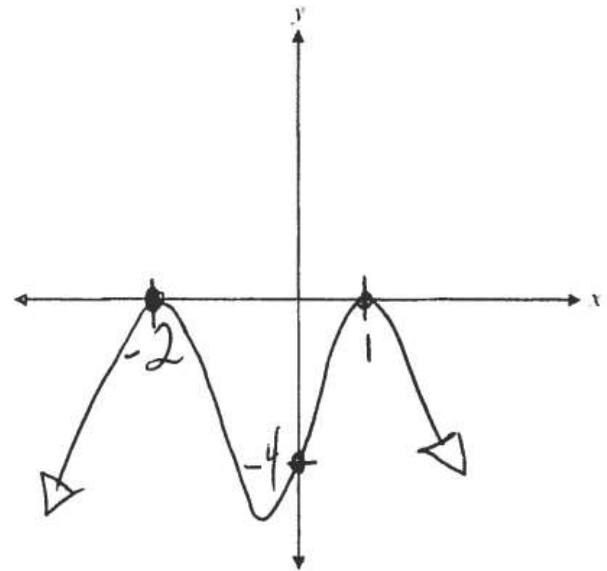
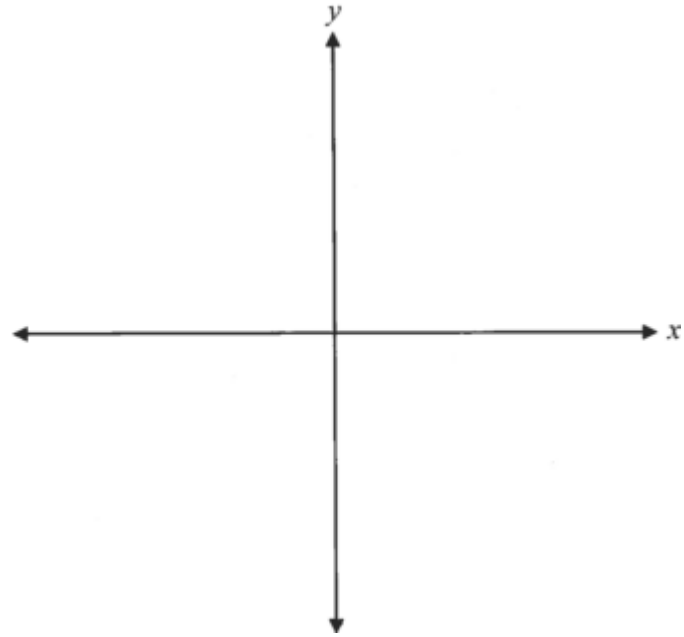
3 points

31. Trace les graphiques des fonctions suivantes :

a) $h(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x + 3$



b) $g(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4$



32. Écris l'équation de $f(x)$ qui satisfait à toutes les conditions suivantes :

- $f(x)$ est une fonction polynomiale de degré 4;
- $f(x)$ a un zéro à 2 avec une multiplicité de 3;
- $f(x)$ a un zéro à -5 ;
- $f(x)$ a une ordonnée à l'origine de 80.

$$f(x) = a(x-2)^3(x+5)$$

$$80 = a(0-2)^3(0+5)$$

$$80 = a(-8)(5)$$

$$80 = -40a$$

$$a = -2$$

0,5 point pour les facteurs $(x-2)$ et $(x+5)$

0,5 point pour la multiplicité de 3

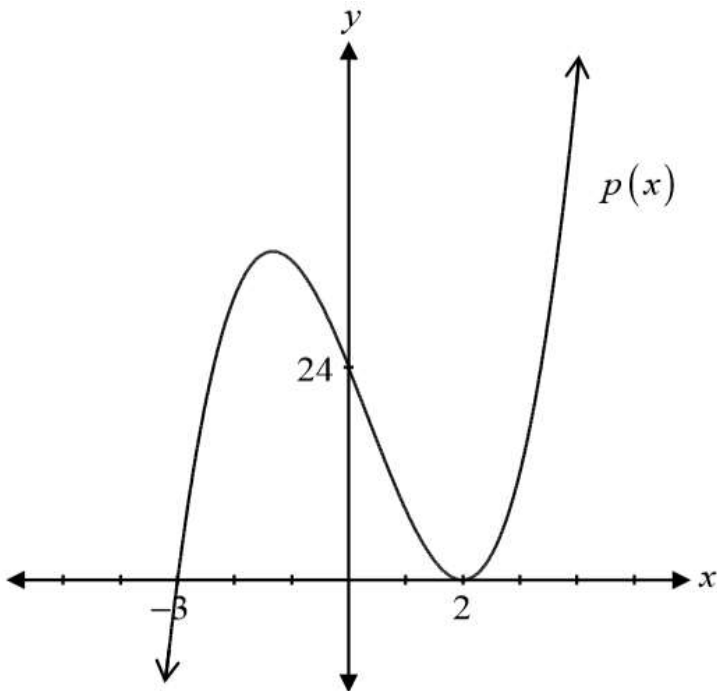
0,5 point pour la substitution/la valeur négative de a

0,5 point pour la valeur de 2 pour a

2 points

$$\therefore f(x) = -2(x-2)^3(x+5)$$

33. Détermine l'équation de la fonction polynomiale représentée par le graphique.



$$p(x) = a(x-2)^2(x+3)$$

$$24 = a(0-2)^2(0+3)$$

$$24 = a(4)(3)$$

$$24 = 12a$$

$$a = 2$$

$$p(x) = 2(x-2)^2(x+3)$$

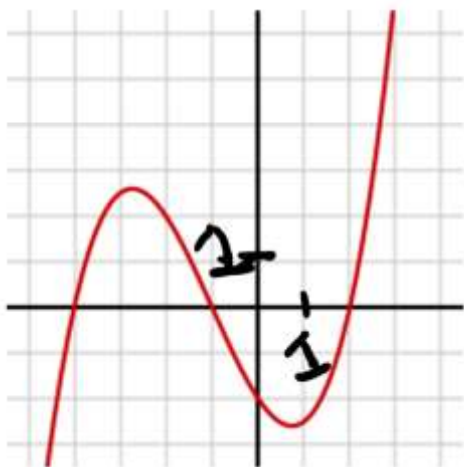
1 point pour les abscisses à l'origine (0,5 point pour chaque)
1 point pour la multiplicité à $x = 2$

1 point pour le coefficient dominant

3 points

34. Détermine les équations des graphiques suivantes.

a)



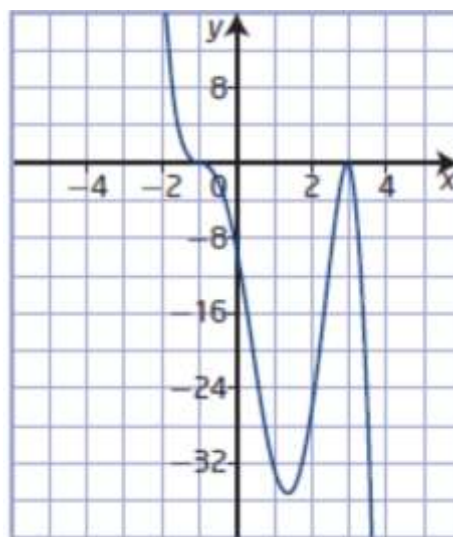
$$f(x) = a(x+4)(x+1)(x-2)$$

$$-2 = a(0+4)(0+1)(0-2)$$

$$-2 = a(-8)$$

$$\frac{-2}{-8} = a$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+4)(x+1)(x-2)$$



$$f(x) = a(x+1)^3(x-3)^2$$

$$-9 = a(0+1)^3(0-3)^2$$

$$-9 = a(9)$$

$$\frac{-9}{9} = a$$

$$f(x) = -(x+1)^3(x-3)^2$$