Pré-Calcul 40S

Enseignante :
Mme. Layton
Nom de l'élève :

____

Devoir d'Unité :

Permutation, Combinaisons et
Binôme de Newton

Table des matières

Devoir Permutation et Combinaison

1. De combien de façons peut-on placer 2 garçons et 2 filles dans une rangée si les personnes du même sexe ne peuvent pas être l'une à côté de l'autre ?

$\left[\underset{F}{2}\cdot\underset{G}{2}\cdot\underset{F}{1}\cdot\underset{G}{1}\right]\times 2 = 8$ façons

2. a) Combien de nombres de 4 chiffres peut-on former avec les chiffres 0, 1, 3, 4, 5 et 8 si la répétition des chiffres n'est pas permise ?

5 x 5 x 4 x 3 = 300

b) Combien de nombres de 4 chiffres plus grands que 4 000 et divisible par 5 sont possibles si on utilise les chiffres 0, 1, 3, 4, 5 et 8 et que la répétition des chiffres n'est pas permise ?

Explique brièvement tes calculs.

CAS 1

$\underset{4,5,8}{3}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{0}{1} = 36$

$\underset{4,8}{2}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{5}{1} = 24$

$36 + 24 = 60$

ou →

$\underset{4}{1}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{0}{1} = 12$

$\underset{5}{1}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{0}{1} = 12$

$\underset{8}{1}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{0}{1} = 12$

$\underset{4}{1}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{5}{1} = 12$

$\underset{8}{1}\ \ 4\ \ 3\ \ \underset{5}{1} =$

$12 \times 5 = 60$

92

3. a) Il y a 4 garçons et 3 filles qui doivent s'asseoir le long d'une rangée.
Combien d'arrangements sont possibles si Alexandra, une des 7 personnes, doit s'asseoir au milieu ? Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

6 x 5 x 4 x 1 x 3 x 2 x 1 ou 1 x $_6P_6$

b) Il y a 4 garçons et 3 filles qui doivent s'asseoir le long d'une rangée.
Combien d'arrangements sont possibles si Shawn et Dave, 2 des garçons, ne peuvent pas s'asseoir l'un à côté de l'autre ?

$7! = 5040$ (total sans restrictions) $\quad 7-2=5$

$2!\,6! = 1440$ $\quad$ total − 2 garçons assis ensemble = n'assis pas ensemble

$5040 - 1440 = 3600$

4. Une école offre 4 différents cours de sciences, 3 différents cours de mathématiques et 2 différents cours d'anglais. Julie doit choisir 1 cours de sciences, 1 cours de mathématiques et 1 cours d'anglais. Julie croit qu'elle a 9 options pour son horaire. Démontre pourquoi Julie n'a pas raison

Julie aurait dû multiplier le nombre d'options.

ou

$4 \times 3 \times 2 = 24$ différentes options

1 point pour la justification

1 point

5. Bella a 2 paires de chaussures, 3 pantalons et 10 chemises. Carey a 4 paires de chaussures, 4 pantalons et 4 chemises. Pour s'habiller, il faut avoir une paire de chaussures, un pantalon et une chemise. Qui a le plus de façons de s'habiller? Justifie ta réponse.

Bella : $2 \times 3 \times 10 = 60$ façons de s'habiller

Carey : $4 \times 4 \times 4 = 64$ façons de s'habiller

$\therefore$ Carey a plus de façons de s'habiller.

1 point pour la justification

1 point

6. De combien de façons différentes peut-on placer 4 filles et 4 garçons en une seule rangée si les filles et les garçons doivent alterner?

Méthode 1

$$\underset{\text{choisir une personne}}{\underline{8}} \cdot \underset{\text{choisir l'autre sexe}}{\underline{4}} \cdot \underbrace{\underline{3} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underline{1}}_{\text{alterner le reste}} = 1152 \text{ façons}$$

1 point pour avoir commencé avec un sexe ou l'autre
1 point pour avoir alterné les sexes

2 points

Méthode 2

Cas 1 : $\underset{G}{\underline{4}} \cdot \underset{F}{\underline{4}} \cdot \underset{G}{\underline{3}} \cdot \underset{F}{\underline{3}} \cdot \underset{G}{\underline{2}} \cdot \underset{F}{\underline{2}} \cdot \underset{G}{\underline{1}} \cdot \underset{F}{\underline{1}} = 576$

1 point pour avoir arrangé les sexes qui alternent

Cas 2 : $\underset{F}{\underline{4}} \cdot \underset{G}{\underline{4}} \cdot \underset{F}{\underline{3}} \cdot \underset{G}{\underline{3}} \cdot \underset{F}{\underline{2}} \cdot \underset{G}{\underline{2}} \cdot \underset{F}{\underline{1}} \cdot \underset{G}{\underline{1}} = 576$

0,5 point pour les deux cas

Nombre total de façons : 576 + 576 = 1152 façons

0,5 point pour l'addition des cas

2 points

7. Il y a 5 hommes et 4 femmes qui doivent s'asseoir le long d'une rangée. Combien d'arrangements sont possibles si deux hommes doivent s'asseoir au début de la rangée et deux hommes doivent s'asseoir à la fin de la rangée?

$$\underset{h}{\underline{5}} \cdot \underset{h}{\underline{4}} \cdot \underline{\quad 5! \quad} \cdot \underset{h}{\underline{3}} \cdot \underset{h}{\underline{2}} = 14\ 400$$

ou

$$\underset{h}{\underline{5}} \cdot \underset{h}{\underline{4}} \cdot \underline{5} \cdot \underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} \cdot \underline{1} \cdot \underset{h}{\underline{3}} \cdot \underset{h}{\underline{2}} = 14\ 400$$

1 point pour avoir correctement limité les hommes au début et à la fin de la rangée
1 point pour 5!

2 points

8. Il y a 2 sortes de crayons, 3 couleurs de surligneurs et 5 sortes de stylos. Si tu dois sélectionner un instrument d'écriture de chaque groupe pour former un ensemble, combien d'ensembles d'instruments différents sont possibles?

a) 10 b) 11 c) 25 d) 30

d)

9. Détermine le nombre de sandwiches possibles à partir du menu suivant.

MENU

Choisis un item de chaque colonne :

Pain	Sauce	Viande	Légumes
Blanc	Mayonnaise	Dinde	Tomate
Seigle	Moutarde	Jambon	Oignon
Brun		Rôti de bœuf	Laitue
		Poulet	

$3 \times 2 \times 4 \times 3$

72 sandwiches

10. Soit les lettres A, B, B, C, D, D, D, D, E, F.

a) Combien d'arrangements différents sont possibles si on doit utiliser toutes les lettres ? Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

$$\frac{10!}{\underset{B}{2!}\;\underset{D}{4!}} \qquad \frac{\cancel{10}^{\,5}\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2!}\;\cancel{4!}} = 117450$$

b) En utilisant toutes les lettres, combien d'arrangements différents débutent par un B et finissent par un C ? Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

$$\underline{2}\cdot\frac{8!}{2!\,4!}\cdot\underline{1} = \frac{\cancel{2}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{2!}\;\cancel{4!}}$$

$$= 1680$$

11. Combien d'arrangements différents sont possibles avec les lettres du mot SEPTEMBRE si l'on doit utiliser toutes les lettres?

a) $9!$ b) $6!3!$ c) $\frac{9!}{3!}$ d) $\frac{6!}{3!}$

c)

12. De combien de façons différentes peut-on arranger les lettres du mot VOLLEYBALL? Exprime ta réponse sous forme factorielle.

$$\frac{10!}{4!}$$

13. Un mot contient deux M, deux E, deux N et aucune autre lettre répétée. Imagine qu'un des N est remplacé par un M. Est-ce que ce replacement mènera à un nombre supérieur ou un nombre inférieur de permutations? Justifie ton raisonnement.

Méthode 1

$2M, 2E, 2N : \dfrac{(\text{nombre total de lettres})!}{2!2!2!}$

1 point pour avoir divisé le nombre total de lettres par 2!2!2!

$\dfrac{(\text{nombre total de lettres})!}{8}$

$3M, 2E, 1N : \dfrac{(\text{nombre total de lettres})!}{3!2!1!}$

1 point pour avoir divisé le nombre total de lettres par 3!2!1!

$\dfrac{(\text{nombre total de lettres})!}{12}$

2 points

Si on change un des N à un M, il y aura un plus petit nombre de permutations.

Méthode 2

Si on change un des N à un M, il y aura un plus petit nombre de permutations parce qu'on divisera le nombre total de lettres par un plus grand nombre.

2 points pour la justification

2 points

14. Combien d'arrangements de 5 lettres sont possibles avec les lettres P, P, P, O, Y ?

a) $3!$

b) $5!$

c) $\frac{5!}{3!}$

d) $\frac{5!}{3!2!}$

c)

15.

Résous l'équation suivante :

$$\frac{n!}{4!} = \frac{(n+1)!}{6!}$$

$$\frac{\cancel{n!}}{\cancel{4!}} = \frac{(n+1)(\cancel{n!})}{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}$$

$$1 = \frac{n+1}{30}$$

$$30 = n+1$$

$$\boxed{29 = n}$$

16. Résous $\frac{14!}{12\,!} = 14n$

$$\frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{\cancel{12!}} = 14n$$

$$14 \cdot 13 = 14n$$

$$n = 13$$

17.

Une expression équivalente à $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$ est :

a) $\dfrac{n-1}{n-3}$

b) $(n-3)(n-2)$

c) $(n-1)(n-2)$

d) $\dfrac{1}{(n-3)(n-2)}$

c)

18.

Évalue :

$$\frac{{}_9P_4}{{}_9P_5}$$

$$\frac{9!}{(9-4)!} \div \frac{9!}{(9-5)!} \qquad \frac{\cancel{9!}}{5!} \cdot \frac{4!}{\cancel{9!}} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5}$$

19. Évalue :

$$\frac{{}_7P_2}{{}_7P_5}$$

$$\frac{\frac{7!}{(7-2)!}}{\frac{7!}{(7-5)!}}$$

0,5 point pour la substitution

$$\frac{\frac{7!}{5!}}{\frac{7!}{2!}}$$

$$\frac{2!}{5!}$$

0,5 point pour la simplification

$$\frac{2\times1}{5\times4\times3\times2\times1}$$

1 point pour le développement des factorielles

2 points

$$\frac{1}{60}$$

20. Détermine la valeur de k : $\dfrac{-4(k+2)!}{k(k+3)!}=2$

$$\frac{-4\cancel{(k+2)!}}{k(k+3)\cancel{(k+2)!}}=2$$

$-2=(k)(k+3)$

$-2=k^2+3k$

$0=k^2+3k+2$

$0=(k+1)(k+2)$

$k=-1$

$k=-2$

21. Résous l'équation suivante :

${}_nP_2 = {}_nC_3$

Méthode 1

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

0,5 point pour la substitution de ${}_nP_2$

0,5 point pour la substitution de ${}_nC_3$

$$\cancel{n!}(n-3)!3! = \cancel{n!}(n-2)!$$

$$6 = \frac{(n-2)!}{(n-3)!}$$

1 point pour la simplification

$$6 = \frac{(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}}$$

1 point pour le développement de $(n-2)!$

3 points

$$6 = n-2$$

$$8 = n$$

Méthode 2

${}_nP_2 = {}_nC_3$; nous savons que $n \geq 3$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

0,5 point pour la substitution de ${}_nP_2$

0,5 point pour la substitution de ${}_nC_3$

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}6}$$

on peut diviser par n et $(n-1)$ parce que $n \geq 3$

0,5 point pour le développement de ${}_nP_2$

0,5 point pour le développement de ${}_nC_3$

$$6 = \frac{\cancel{n}\cancel{(n-1)}(n-2)}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}}$$

$$6 = n-2$$

$$8 = n$$

1 point pour la simplification

3 points

Méthode 3

$${}_nP_2 = {}_nC_3$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!}{(n-3)!3!}$$

0,5 point pour la substitution de ${}_nP_2$

0,5 point pour la substitution de ${}_nC_3$

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}3!}$$

0,5 point pour le développement de ${}_nP_2$

0,5 point pour le développement de ${}_nC_3$

$$6n(n-1) = n(n-1)(n-2)$$

$$6n(n-1) - n(n-1)(n-2) = 0$$

$$n(n-1)(6-(n-2)) = 0$$

$$n(n-1)(8-n) = 0$$

1 point pour la simplification

$$\cancel{n=0} \quad \cancel{n=1} \quad n = 8$$

3 points

22. Résous :

${}_{n-1}P_2 = 42$

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} = 42$$

0,5 point pour la substitution

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 42$$

1 point pour le développement des factorielles

$$(n-1)(n-2) = 42$$

0,5 point pour la simplification des factorielles

$$n^2 - 3n + 2 = 42$$

$$n^2 - 3n - 40 = 0$$

$$(n-8)(n+5) = 0$$

$$n = 8 \quad \cancel{n = -5}$$

0,5 point pour avoir isolé *n*
0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

3 points

23. Résous ${}_nP_3 = 48(n - 1)$

$$\frac{n!}{(n-3)!} = 48(n-1)$$

0,5 point pour la substitution dans la bonne formule

$$\frac{(n)(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{\cancel{(n-3)!}} = 48(n-1)$$

1 point pour le développement du factoriel
0,5 point pour la simplification des factoriels

$$n(n-2) = 48$$

$$n^2 - 2n - 48 = 0$$

$$(n-8)(n+6) = 0$$

$$n = 8 \quad \cancel{n = -6}$$

0,5 point pour avoir isolé les deux valeurs de *n*
0,5 point pour avoir rejeté la solution étrangère

3 points

24. Résous algébriquement :

${}_nC_2 = 4n + 5$

$${}_nC_2 = 4n + 5$$

$$\frac{n!}{(n-2)!2!} = 4n + 5$$ 0,5 point pour la notation factorielle

$$\frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}2!} = 4n + 5$$ 0,5 point pour le développement des factorielles
0,5 point pour la simplification de factorielle

$$n(n-1) = 2!(4n+5)$$

$$n^2 - n = 8n + 10$$

$$n^2 - 9n - 10 = 0$$ 0,5 point pour la simplification

$$(n-10)(n+1) = 0$$

$$n = 10 \qquad \cancel{n = -1}$$ 0,5 point pour les deux valeurs de n
0,5 point pour avoir rejeté la racine étrangère

3 points

25. Trouve le nombre total d'arrangements possibles pour asseoir 7 adultes et 3 enfants le long d'une rangée si les 3 enfants doivent s'asseoir ensemble.

a) 10 ! b) 8!3! c) 7!3! d) 7!

b)

26. De combien de façons peut-on élire un président, un vice-président et un secrétaire d'une classe de 22 élèves ?

$${}_{22}P_3 = 9240$$

27. Trouve le nombre total d'arrangements possibles pour asseoir 7 adultes et 3 enfants le long d'une rangée si les 3 enfants doivent s'asseoir ensemble.

a) 10! b) 8!3! c) 7!3! d) 7!

b)

28. De combien de façons est-ce que quatre couples mariés peuvent être assis sur 8 chaises en rangée si chaque personne veut être assise avec son partenaire ?

a) $4! \cdot 2^4$

c) $4! \cdot 2^2$

b) $4! \cdot 2^3$

d) $4! \cdot 2$

a)

29. Le nombre de façons de placer 3 garçons et 3 filles en cercle si les garçons et les filles alternent est :

a) $5! \cdot 2$

c) $3! \cdot 3!$

b) $5!$

d) $3! \cdot 2!$

d)

30. Cinq élèves doivent s'asseoir autour d'une table ronde. Deux de ces élèves. Marc et Alice doivent s'asseoir ensemble. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir ?

a) 2! + 3! b) 2! 3! c) 2! + 4! d) 2! 4!

b)

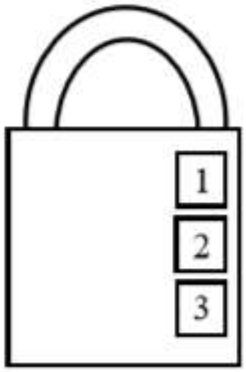
31. a) De combien de façons est-ce que six personnes peuvent s'asseoir autour d'une table ronde ? si deux personnes refusent d'être assises une à côté de l'autre ?

(6 – 1)! = 5! = 120

b) De combien de façons est-ce que six personnes peuvent s'asseoir autour d'une table ronde si deux personnes refusent d'être assises une à côté de l'autre ?

5! – 2! 4! = 72

32. Explique pourquoi un cadenas à combinaison devrait plutôt être appelé un cadenas à permutation.



Puisque l'ordre des chiffres dans un cadenas est important, il devrait s'agir d'une permutation et non d'une combinaison.

33. a) D'un groupe de 9 personnes, de combien de façons peux-tu sélectionner un comité de 4 membres?

a) ${}_9C_4 = 126$ façons

1 point pour ${}_9C_4$

1 point

b) D'un groupe de 9 personnes, de combien de façons peux-tu sélectionner un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier?

b) ${}_9P_4 = 3024$ façons

1 point pour ${}_9P_4$

1 point

c) Explique pourquoi les réponses en a) et en b) sont différentes.

c) La partie a) est une combinaison car l'ordre n'est pas important; la partie b) est une permutation car les membres du comité ont des rôles spécifiques.

1 point

d)

Dans une classe, il y a 5 filles et 10 garçons.

a) Combien de comités de 7 personnes peut-on former si le comité doit être composé de 3 filles et de 4 garçons?

Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

$${}_5C_3 \cdot {}_{10}C_4$$
$$10 \cdot 210 = 2100$$

b) Combien de comités de 7 personnes peut-on former si le comité doit être composé d'au moins une fille?

Explique brièvement tes calculs.

Exprime ta réponse sous forme de nombre entier.

$${}_{15}C_7 - {}_5C_0 \cdot {}_{10}C_7$$
$$6435 - 120 = 6315$$

e) David et Sarah sont dans une classe de 10 garçons et 8 filles. Un comité comprenant 3 garçons et 2 filles est choisi parmi les élèves de cette classe. Détermine le nombre de comités possibles si David et Sarah ne peuvent pas siéger au même comité.

Méthode 1

Tous :	${}_{10}C_3 \times {}_8C_2 = 3360$	1 point pour tous les comités possibles
Les deux :	${}_9C_2 \times {}_7C_1 = 252$	1 point pour les deux qui siègent au comité
	$3360 - 252 = 3108$	1 point pour la soustraction des cas

3 points

Méthode 2

Cas 1 : David, pas Sarah	${}_9C_2 \times {}_7C_2 = 756$	0,5 point pour le 1er cas
Cas 2 : Sarah, pas David	${}_9C_3 \times {}_7C_1 = 588$	0,5 point pour le 2^{e} cas
Cas 3 : Ni David ni Sarah	${}_9C_3 \times {}_7C_2 = 1764$	1 point pour le 3^{e} cas
	$756 + 588 + 1764 = 3108$	1 point pour l'addition des cas

3 points

f) Si ${}_nC_5 = {}_nC_3$, la valeur de n doit être :

a) 3 b) 5 c) 8 d) 15

c)

g) Détermine la valeur de n.

${}_nC_9 = {}_nC_3$

n = 12

h) Explique pourquoi $_3C_8$ est non-défini.

Dans l'équation $_nC_r$, le nombre d'objets, n, doit être plus grand ou égale au nombre d'objets sélectionné, r.

1 point

ou

On ne peut pas choisir 8 objets parmi un total de 3.

i) Une équipe de Hockey compte 19 joueurs. De combien de façons peut-on :

a) Choisir un capitaine et un adjoint pour l'équipe ?

$_{19}P_2 = 342$

b) Choisir trois représentants syndicaux des joueurs qui sont de restes ?

$\mathbf{_{17}C_3 = 680}$

j) Il y a un groupe de 16 garçons et 12 filles. De combien de façons peut-on former un comité de 3 personnes si au moins 2 filles doivent faire partie du comité? Exprime ta réponse sous forme d'un nombre entier.

Méthode 1

Cas 1 : 2 filles, 1 garçon	$_{12}C_2 \bullet {_{16}C_1} = 1\ 056$	1 point pour le 1er cas (0,5 point pour chaque facteur démontré comme produit)
Cas 2 : 3 filles	$_{12}C_3 = 220$	1 point pour le 2e cas
	$1\ 056 + 220 = 1\ 276$	1 point pour l'addition des cas

3 points

Méthode 2

Cas 1 : 2 garçons, 1 fille	${}_{16}C_2 \cdot {}_{12}C_1 = 1\,440$	1 point pour le 1er cas (0,5 point pour chaque facteur démontré comme produit)
Cas 2 : 3 garçons	${}_{16}C_3 = 560$	1 point pour le 2e cas
Tous les cas possibles	${}_{28}C_3 = 3\,276$	0,5 point pour tous les cas possibles
	$3\,276 - 1\,440 - 560 = 1\,276$	0,5 point pour la soustraction du total

3 points

k) Une classe de mathématiques particulière se compose de plusieurs élèves. De cette classe, tu dois former un comité de 4 élèves comprenant au moins 1 fille. Sans résoudre le problème, explique comment tu pourrais trouver le nombre de façons différentes de former ce comité.

Méthode 1

Trouve le nombre de comités possibles et soustrais le nombre de façons de créer un comité sans filles.

1 point pour avoir identifié les cas
1 point pour les opérations sur ces cas

2 points

Méthode 2

Trouve tous les cas avec des filles comme membres du comité : 1 fille comme membre, 2 filles comme membres, 3 filles comme membres, et un comité ne comprenant que des filles. Ensuite, ajoute ensemble tous les cas pour avoir le nombre de façons de créer un comité avec au moins 1 fille.

1 point pour avoir identifié les cas
1 point pour les opérations sur ces cas

2 points

Devoir Binôme de Newton

1. Explique comment le triangle de Pascal peut être utilisé pour déterminer les coefficients dans le développement du binôme $(x + y)^n$.

La $(n+1)^e$ rangée du triangle de Pascal correspond aux coefficients des termes dans le développement du binôme $(x+y)^n$.

1 point pour l'explication

1 point

2. Étant donné la rangée suivante du triangle de Pascal, identifie le binôme dont le développement comprend ces coefficients.

1 5 10 10 5 1

a) $(x + y)^4$ b) $(x + y)^5$ c) $(x + y)^6$ d) $(x + y)^7$

b)

3.

Voici une rangée du triangle de Pascal.

1 7 21 35 35 21 7 1

Détermine les valeurs de la rangée suivante.

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 point

4. a) Combien de termes contient le binôme développé $(2x - 3y^2)^9$? __**10**____

b) Quel est le dernier terme ? Quel est le coefficient du 5^e terme ?

dernier terme

$t_{10} = {}_9C_9\,(2x)^0(-3y^2)^9$ $\quad t_{10} = -19683y^{18}$ $\quad t_5 \quad {}_9C_4(2)^5(-3)^4$

$= 1 \cdot 1 \cdot -19683y^{18}$ $\quad 126 \cdot 32 \cdot 81$

coefficient $= 326592$

5. Combien de termes y a-t-il dans le développement de $(x^{12} + 3)^{10}$

a) 9 b) 10 c) 11 d) 5

c)

6. Le binôme $\left(\frac{2}{x} - 4x^3\right)^{3n}$ se trouve sur le 16^e rangée du triangle pascal. Détermine n.

16^e rangée alors l'exposant = 15

3n = 15
n = 5

7. Il y a 13 termes dans le développement de $(3x - y)^{2n}$. Détermine la valeur de n.

a) 6 b) 6,5 c) 7 d) 26
a)

8. Combien de termes se trouvent dans le développement de :

$$\left(3y^2 - 4z\right)^7$$

a) 2 b) 6 c) 7 d) 8

d)

9.

Dans le développement du binôme $(x-y)^{10}$, combien de termes seront positifs?

Justifie ta réponse.

Six termes seront positifs. 1 point pour les six termes

Le terme sera positif si « $-y$ » a un exposant pair. 1 point pour la justification

2 points

10. Détermine le 6^{e} terme du binôme $\left(\frac{2}{x^2} - x^6\right)^8$

$$t_6 = {}_8C_5\left(2x^{-2}\right)^3\left(-x^6\right)^5 \qquad t_6 = -448x^{24}$$

$k=5$

$$= 56 \cdot 8x^{-6} \cdot -x^{30}$$

11. Développe $(3a - 2b)^5$

$${}_5C_0(3a)^5(-2b)^0 + {}_5C_1(3a)^4(-2b)^1 + {}_5C_2(3a)^3(-2b)^2 +$$

$$1 \cdot 243a^5 + 5 \cdot 81a^4 \cdot -2b + 10 \cdot 27a^3 \cdot 4b^2 +$$

$${}_5C_3(3a)^2(-2b)^3 + {}_5C_4(3a)^1(-2b)^4 + {}_5C_5(3a)^0(-2b)^5$$

$$10 \cdot 9a^2 \cdot -8b^3 + 5 \cdot 3a \cdot 16b^4 + 1 \cdot 1 \cdot -32b^5$$

110

$$= 243a^5 - 810a^4b + 1080a^3b^2 - 720a^2b^3 + 240ab^4 - 32b^5$$

12.

Trouve et simplifie le 6^e terme du développement du binôme $\left(3x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^9$.

$t_6 \quad k=5$

$t_6 = {}_9C_5(3x^4)^4(-x^{-3})^5$

$= 126 \cdot 81x^{16} \cdot -x^{-15}$

$t_6 = -10206x$

13. a) Trouve le quatrième terme de $\left[\frac{1}{2x^2} - 4x^3\right]^8$.

t_4

$k=3$

$t_4 = {}_8C_3\left(\frac{x^{-2}}{2}\right)^5(-4x^3)^3$

$= 56 \cdot \frac{x^{-10}}{32} \cdot -64x^9$

$t_4 = \frac{-112}{x}$

b) Trouve le dernier terme de $\left[\frac{1}{2x^2} - 4x^3\right]^8$.

$t_9 = {}_8C_8 \left(\frac{x^{-2}}{2}\right)^0 \left(-4x^3\right)^8$

$t_9 = 65536x^{24}$

14. Trouve et simplifie le 6e terme du développement du binôme

$$\left(3x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^9$$

$$\begin{aligned} t_6 &= {}_9C_5\left(3x^4\right)^4\left(-\frac{1}{x^3}\right)^5 \\ &= (126)\left(81x^{16}\right)\left(-\frac{1}{x^{15}}\right) \\ &= -10\ 206x \end{aligned}$$

2 points (1 point pour ${}_9C_5$; 0,5 point pour chaque facteur conséquent)

1 point pour la simplification (0,5 point pour avoir évalué le coefficient; 0,5 point pour avoir simplifié la variable)

3 points

15.

Trouve et simplifie le dernier terme dans le développement de $(2y - 3x)^7$.

$$t_8 = {}_7C_7 (2y)^0 (-3x)^7$$
$$= -2187x^7$$

0,5 point pour ${}_7C_7$

0,5 point pour $(2y)^0$

1 point pour $(-3x)^7$ est $-2187x^7$

2 points

16.

Dans le développement du binôme de $\left(\frac{3}{x^2} - x^5\right)^{10}$, simplifie le 7^e terme.

$$t_7 = {}_{10}C_6 (3x^{-2})^4 (-x^5)^6$$

$k=6$

$$= 210(81x^{-8}) \cdot x^{30}$$

$$t_7 = 17010x^{22}$$

17.

Simplifie le 6^e terme dans le développement de :

$$\left(2x - \frac{3}{x^2}\right)^{10}$$

$$t_6 = {}_{10}C_5 (2x)^5 \left(-\frac{3}{x^2}\right)^5$$
$$= 252(32x^5)\left(-\frac{243}{x^{10}}\right)$$
$$= -1\ 959\ 552\ x^{-5}$$

2 points (1 point pour ${}_{10}C_5$; 0,5 point pour chaque facteur conséquent)

1 point pour la simplification (0,5 point pour le coefficient; 0,5 point pour l'exposant)

3 points

18.

Dans le développement du binôme de $\left(\frac{3}{x^2} - x^5\right)^{10}$, simplifie le 7ᵉ terme.

$t_7 = {}_{10}C_6\left(\frac{3}{x^2}\right)^4\left(-x^5\right)^6$

$t_7 = 210\left(\frac{81}{x^8}\right)\left(x^{30}\right)$

$t_7 = 17\ 010x^{22}$

2 points (1 point pour ${}_{10}C_6$; 0,5 point pour chaque facteur conséquent)

1 point pour la simplification (0,5 point pour le coefficient; 0,5 point pour l'exposant)

3 points

19.

Trouve et simplifie le dernier terme dans le développement de $(2y - 3x)^7$.

$t_8 = {}_7C_7(2y)^0(-3x)^7$

$= -2187x^7$

20.

a) Dans le développement du binôme $\left(\frac{3}{x^2} - 4x^5\right)^8$, détermine le 3ᵉ terme.

a)

$$t_3 = {}_8C_2\left(\frac{3}{x^2}\right)^{8-2}\left(-4x^5\right)^2$$

2 points (1 point pour ${}_8C_2$; 0,5 point pour chaque facteur conséquent)

$$t_3 = 28\left(\frac{3^6}{x^{12}}\right)\left(\frac{16x^{10}}{1}\right)$$

$$= \frac{28}{1} \times \frac{729}{x^{12}} \times \frac{16x^{10}}{1}$$

1 point pour la simplification (0,5 point pour le coefficient; 0,5 point pour les exposants)

$$= \frac{326\ 592}{x^2}$$

3 points

b) Dans le développement du binôme $\left(\frac{3}{x^2} - 4x^5\right)^n$, le 6e terme contient x^{25}.

Trouve la valeur de n.

b)

$$x^{25} = \left(x^{-2}\right)^{n-5}\left(x^5\right)^5$$

1 point pour la substitution

$$x^{25} = x^{-2n+10+25}$$

$$25 = -2n + 35$$

1 point pour l'égalité des exposants

$$-10 = -2n$$

$$5 = n$$

2 points

21. Détermine le terme **simplifié** qui contient x^9 dans le développement $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^9$.

$x^9 = (x^2)^{9-k}(x^{-1})^k$

$x^9 = x^{18-2k} \cdot x^{-k}$

$x^9 = x^{18-3k}$

$9 = 18-3k$

$-9 = -3k$

$k = 3$

t_4

22. Un des termes du développement de $(3x + a)^7$ est 81 648 x^5. Détermine les valeurs possibles pour a.

$7-k=5$ $\quad k=2$

$81648x^5 = {}_7C_2(3x)^5(a)^2$

$81648\cancel{x^5} = 21 \cdot 243\cancel{x^5}a^2$

$81648 = 5103a^2$

$16 = a^2$

$a = \pm 4$

23.

Évalue le coefficient du terme qui contient x^3 dans le développement de $(1+x)^7$.

Justifie ta réponse.

$x^3 = (1)^{7-k}(x)^k$ $k \to 3$ alors t_4

$t_4 = {}_7C_3(1)^4(x)^3$

$t_4 = 35x^3$

coefficient = 35

24.

Dans le développement du binôme $\left(\frac{5}{x^3} - x^2\right)^{15}$, il y a un terme qui contient x^5 lorsqu'il est simplifié. Détermine quel terme contient x^5 et simplifie complètement ce terme.

$x^5 = (x^{-3})^{15-k} \cdot (x^2)^k$

$x^5 = x^{-45+3k} \cdot x^{2k}$

$x^5 = x^{-45+5k}$

$5 = 5k - 45$

$50 = 5k$

$k = 10$

t_{11}

$t_{11} = {}_{15}C_{10} (5x^{-3})^5 (-x^2)^{10}$

25.

Le 4^e terme du développement du binôme $\left(qx^2 - \frac{3}{x}\right)^{10}$ est $414\ 720x^{11}$.

Détermine la valeur de q algébriquement.

$t_4 = {}_{10}C_3 (qx^2)^7 \left(-\frac{3}{x}\right)^3$ — 2 points (1 point pour ${}_{10}C_3$; 0,5 point pour chaque facteur conséquent)

$414\ 720x^{11} = 120(q^7x^{14})\left(-\frac{27}{x^3}\right)$ — 0,5 point pour avoir comparé les coefficients

$414\ 720 = -3\ 240q^7$

$q^7 = -128$

$q = -2$ — 0,5 point pour avoir isolé q

3 points

26. Évalue le coefficient du terme qui contient x^3 dans le développement de $(1 + x)^7$. Justifie ta réponse.

Méthode 1

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

1 point pour la justification

Le coefficient de x^3 est 35.

1 point pour avoir identifié le coefficient

2 points

Méthode 2

$$t_4 = {}_7C_3(1)^4(x)^3$$

1 point pour la justification

$${}_7C_3 = \frac{7!}{3!4!}$$
$$= \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3!}\,\cancel{4!}}$$
$$= 35$$

1 point pour avoir évalué le coefficient

2 points

Le coefficient de x^3 est 35.