Mathématique Appliquée et Pré-Calcul 20S

Note : Système d'équation

Nom : ______________________

Table des matières

Leçon 1 : Établir des systèmes d’équations linéaires

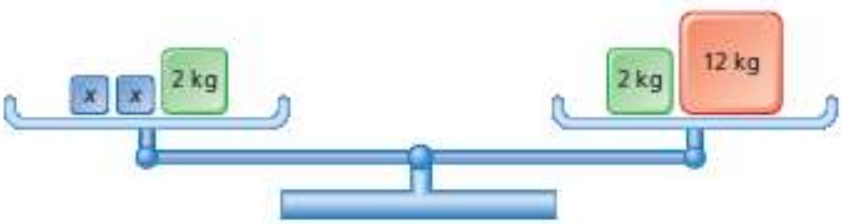
Un système d’équations est un **groupe d’équations**. Dans ce cours on se concentre sur les systèmes linéaires à deux variables.
Pour résoudre, on trouve la solution commune, donc, la place **où les deux droites se croisent**.

Trois différentes méthodes de résolution :

1) ____
2) ____
3) ____

Les systèmes décrivent des situations où il y a deux variables, et deux manières de les lier.

Quelle équation linéaire définit la relation entre les masses sur cette balance ?



Quelle équation linéaire définit la relation entre les masses sur cette balance ?

Quelles sont les ressemblances entre les deux équations ?
Quelles sont les différences ?

Que sais-tu au sujet du nombre de solutions de chaque équation ?

Exemple 1 :

Les autobus d'un conseil scolaire peuvent transporter 12 ou 24 élèves. Ils peuvent transporter 780 élèves en tout. Il y a 20 petits autobus de plus que de grands autobus.

a) Détermine le système qui représente ces données.

1) Identifie les variables utilisées et ce qu'ils représentent.
2) Créer deux équations qui représentent les données.

b) Vérifie s'il pouvait avoir 35 petits autobus et 15 grands autobus.

Insère les données dans le système (les deux équations pour les variables appropriés) pour voir s'ils fonctionnent.

Exemple 2 :

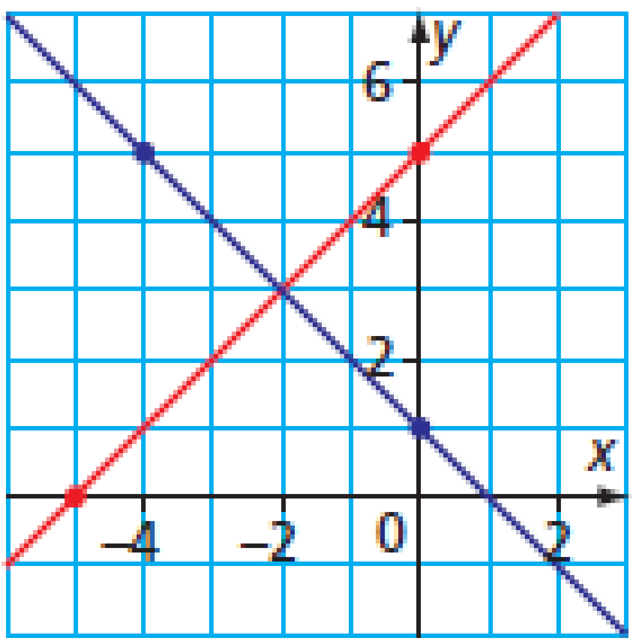
Une école a amassé 195$ en recueillant 3000 bouteilles et cannettes à recycler. L'école a reçu 5 sous par canettes et 20 sous par bouteille.

a) **Identifie les variables** ensuite représente la situation par un système.

b) L'école a recueilli 2700 canettes et 300 bouteilles. Vérifie que ton système soit juste.

Leçon 2 : Résoudre des systèmes graphiquement

Un système d'équations est un groupe d'équations. Pour résoudre, on trouve la solution commune, la place où ___________________________________.



Étape pour déterminer la solution graphiquement :

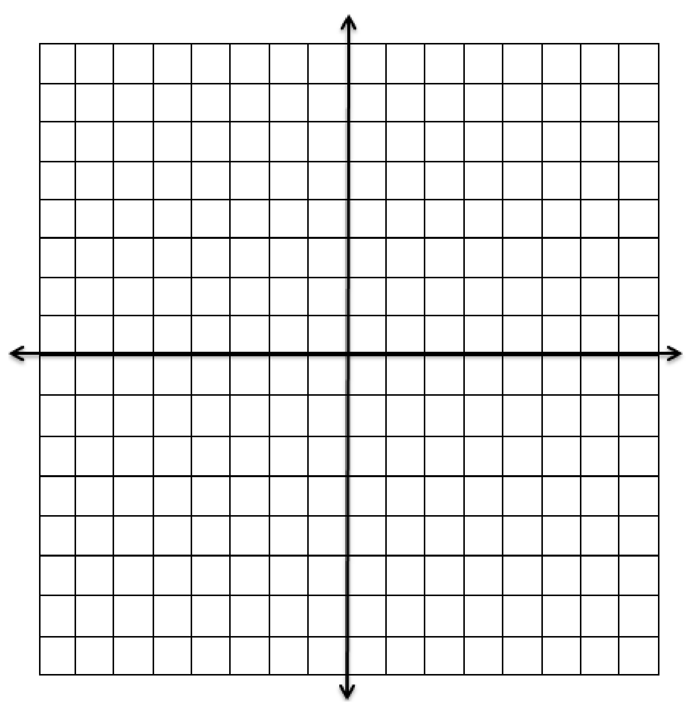
- Trace les deux droites sur le même plan cartésien
- Encercle et Identifie le point (x,y) où ils se croisent.

Exemple 1 :

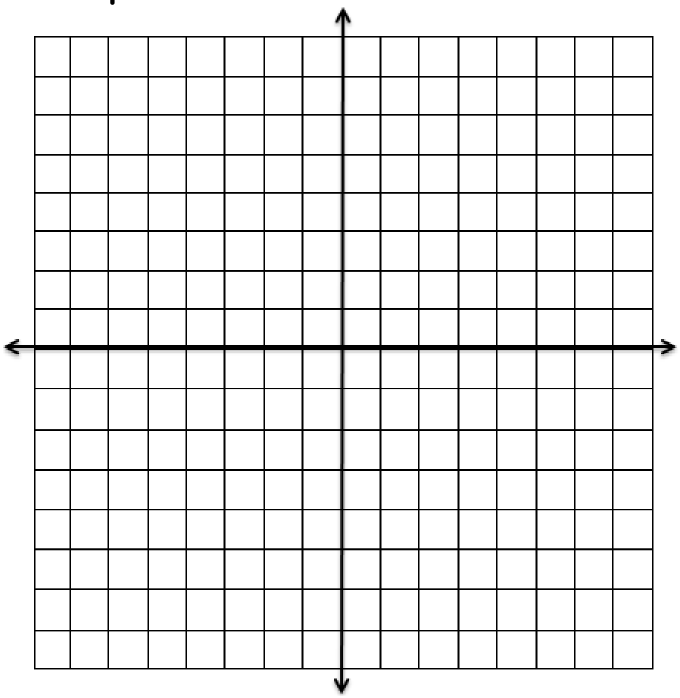
Résoudre le système :

$y = x - 1$

$2x + y = -4$



Exemple 2 :



Résoudre le système :

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

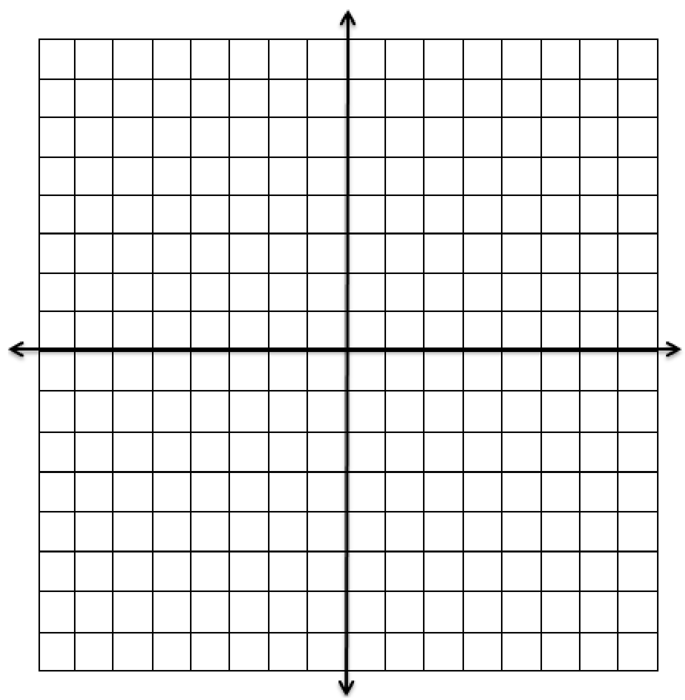
$$y = x$$

Exemple 3 :

Résoudre le système :

$$y = -x + 6$$

6x + 6y – 36 = 0

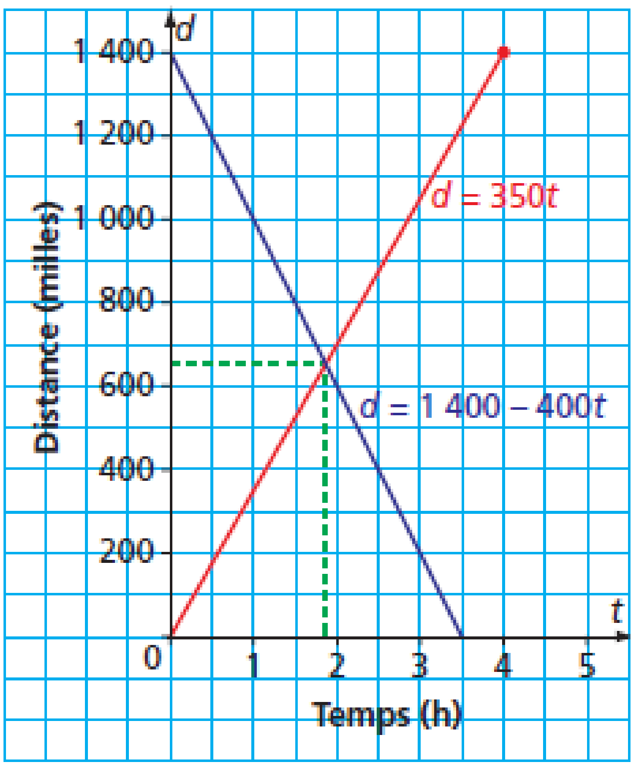


Exemple 4 :

Un avion quitte Regina à midi et se dirige vers Ottawa, à une vitesse moyenne de 400 mi/h. La distance à parcourir est de 1 400 mi. Un autre avion quitte Ottawa à la même heure et se dirige vers Regina à une vitesse moyenne de 350 mi/h. Voici un système linéaire qui représente cette situation :

$d = 1400 - 400t$
$d = 350t$
où d est la distance, en milles, par rapport à Ottawa, et t est le temps écoulé, en heures, depuis le décollage.

a) Représente graphiquement ce système linéaire.
b) Résous ce problème à l’aide du graphique : À quel moment les avions se croisent-ils et à quelle distance se trouvent-ils d’Ottawa ?



Leçon 3 : Résoudre des systèmes linéaires par substitution

On peut trouver la solution avec **algèbre** si on ne veut pas dessiner un graphique.
Par exemple : **LA SUBSTITUTION**

- La méthode par substitution est une stratégie algébrique de résolution. Elle consiste à transformer un système de deux équations linéaires en un seule équation à une variable. Il reste ensuite à déterminer la valeur de la variable à l'aide de test connaissances sur la résolution d'équations linéaire.

Exemple Pratique :

Examine le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{3x + 4y} &= \mathbf{-4} \\ \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{2} \end{aligned}$$

Étape 1: regarde les deux équations et isole l'un qui a une équation avec un variable avec un coefficient de 1.

$$\begin{aligned} \mathbf{x + 2y} &= \mathbf{2} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{2 - 2y} \end{aligned}$$

Étape 2 : La solution du système linéaire est le point d'intersection des deux droites (alors la coordonnée x est le même pour les 2 équations). Alors : Remplace x par l'expression correspondante dans l'autre équation. Ou « y » si vous avez isolé y.

$$\begin{aligned} \mathbf{3x + 4y} &= \mathbf{-4} \\ \mathbf{3(2 - 2y) + 4y} &= \mathbf{-4} \\ \mathbf{6 - 6y + 4y} &= \mathbf{-4} \\ \mathbf{-2y} &= \mathbf{-10} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{5} \end{aligned}$$

Étape 3 : Remplace la variable trouvée dans une équation pour déterminer la valeur de l'autre variable.

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ x + 2(5) &= 2 \\ x + 10 &= 2 \\ x &= -8 \end{aligned}$$

Étape 4 : Vérifier vos variables dans les deux équations.

$$\begin{aligned} 3x + 4y &= -4 \qquad ① \\ \text{M. G.} &= 3x + 4y \\ &= 3(-8) + 4(5) \\ &= -24 + 20 \\ &= -4 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \qquad ② \\ \text{M. G.} &= x + 2y \\ &= -8 + 2(5) \\ &= -8 + 10 \\ &= 2 \\ &= \text{M. D.} \end{aligned}$$

Dans chaque équation, le membre de gauche est égale au membre de droite; la solution est donc x = -8 et y = 5.
(-8, 5)

Exemple 1 :

Résous le système linéaire suivante par substitution.

$$2x - 4y = 7$$
$$4x + y = 5$$

Exemple 2 :

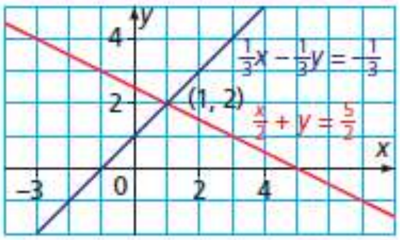
Représente la situation suivante à l'aide d'un système linéaire :
Nuri a placé 2 000 $: une partie à un taux d'intérêt annuel de 8 % et le reste à un taux d'intérêt annuel de 10 %. L'intérêt total au bout d'un an est 190 $.

Rappelle :

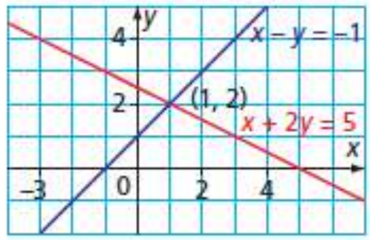
N'oubliez pas

Ces deux systèmes linéaires ont le même graphique et la même solution, soit $x = 1$ et $y = 2$.

Système A



Système B



Dans le système A, tu peux multiplier la première équation par 2 et la deuxième équation par 3 pour éliminer les fractions. Tu obtiens les équations du système B.

Système A			Système B	
$\frac{x}{2} + y = \frac{5}{2}$	①	Multiplie chaque terme par 2.	$x + 2y = 5$	③
$\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}$	②	Multiplie chaque terme par 3.	$x - y = -1$	④

Exemple 3 :

Résous ce système linéaire par substitution.

$$\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = -1$$
$$y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{3}y$$

Leçon 4 : Résoudre des systèmes linéaires par élimination

La méthode d'élimination permet de résoudre des systèmes sans nécessiter des gros calculs d'algèbre. Pour le faire, il faut avoir des **termes égaux** (même coefficient avec le variable) ou des **termes opposés** (positive/négative) dans les deux équations pour une des variables.

Cette méthode est aussi appelée la méthode **d'addition-soustraction**.

Exemple Pratique :

Résous le système linéaire suivant par addition/soustraction.
3x – 7 = 4y
5x – 6y = 8

Étape 1 : Assurez-vous qu'il y a une variable avec le même coefficient dans les deux équations du système. Faits les calculs nécessaires pour qu'il y en a le même. **Alors multiplie toute l'équation par un coefficient.**

(3x – 7 = 4y) x 5	**15x – 35 = 20y**
(5x – 6y = 8) x 3	**15x – 18y = 24**

Étape 2 : Mettez les deux équations dans le même ordre pour les variables.
15x – 20y = 35
15x – 18y = 24

Étape 3 : Additionne/Soustrais les termes semblables des équations pour éliminer le variable avec le même coefficient et pour créer une équation à une variable. Assurez-vous de mettre le 2e ligne dans une parenthèse pour éviter des erreurs de calculs.

$$\begin{array}{r} \mathbf{15x - 20y = 35} \\ -\ \mathbf{(15x - 18y = 24)} \\ \hline \mathbf{0x - 2y = 11} \end{array}$$

Étape 4 : Isoler la variable.

$$\frac{-2}{-2}y = \frac{11}{-2}$$
$$y = -5,5$$

Étape 5 : Remplace la variable trouvée dans une équation pour déterminer la valeur de l'autre variable.

3x – 7 = 4(-5,5)
3x – 7 = -22
+ 7 +7

$$\frac{3x}{3} = \frac{-15}{3}$$

x = -5

Étape 6 : Vérifier vos variables dans les deux équations.

3(-5) – 7 = 4(-5,5)	5(-5) – 6(-5,5) = 8
-15 – 7 = -22	-25 – (-33) = 8
-22 = -22	8 = 8

Exemple 1 :

Résoudre le système linéaire par élimination :
$2x - 2 = 3y$
$-2x + 2y = 6$

Exemple 2 :

Résoudre le système linéaire par élimination :
$2x - 5y = 3$
$4x + 2y = -6$

Exemple 3 :

Résoudre le système linéaire par élimination :
$4x + \frac{1}{3}y = -5$
$3x + 2y = 5$

Exemple 4 :

a) Représente cette situation à l'aide d'un système linéaire :
Un alliage est un mélange de métaux. Un artiste doit créer un bracelet d'une masse de 100 g fait d'un alliage à 50 % d'argent. Il a un alliage à 60 % d'argent et un à 35 %.

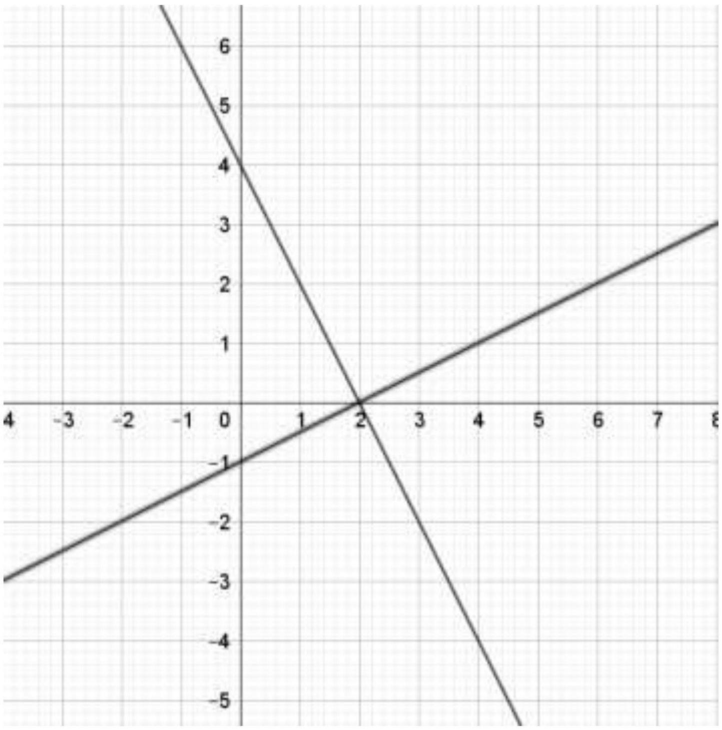
b) Résous le problème suivant : Quelles masses de chaque alliage doit-il combiner afin d'obtenir l'alliage désiré ?

Leçon 5 : Le nombre de solutions des systèmes d'équations linéaires

Chaque système d'équations linéaires peut avoir trois possibilités de nombre de solutions :

Le nombre de solutions graphiquement

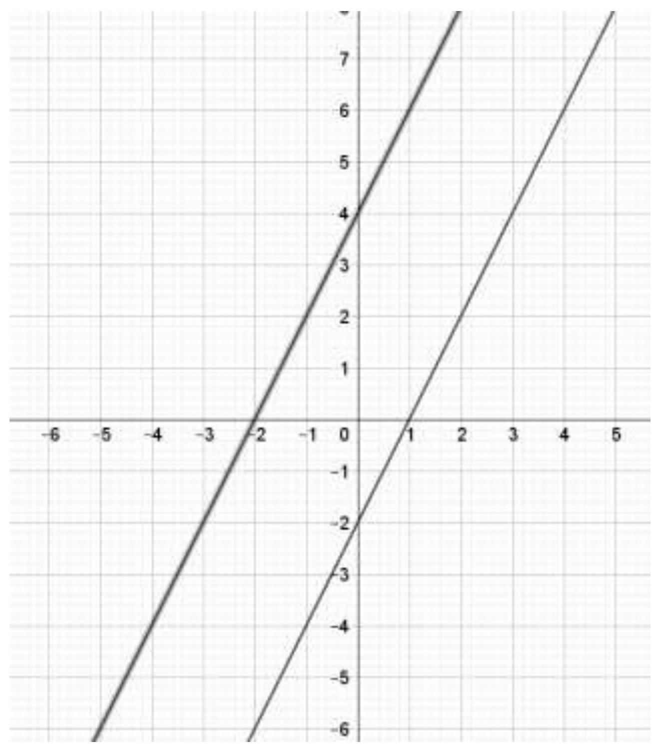
1 solution : Droites sécantes



y - -2x + 4
y = $\frac{1}{2}x - 1$

Les deux droites se coupent au point (-2, 0). Il y a donc une seule solution : x = -2, y = 0.

Puisque les droites ont des pentes différentes, elles se coupent en un seul point.



Aucune solution : Droites parallèles

1) -4x + 2y = 8
2) -2x + y = -2

1) 2y = 4x + 8
   y = 2x + 4

2) y = 2x + 2

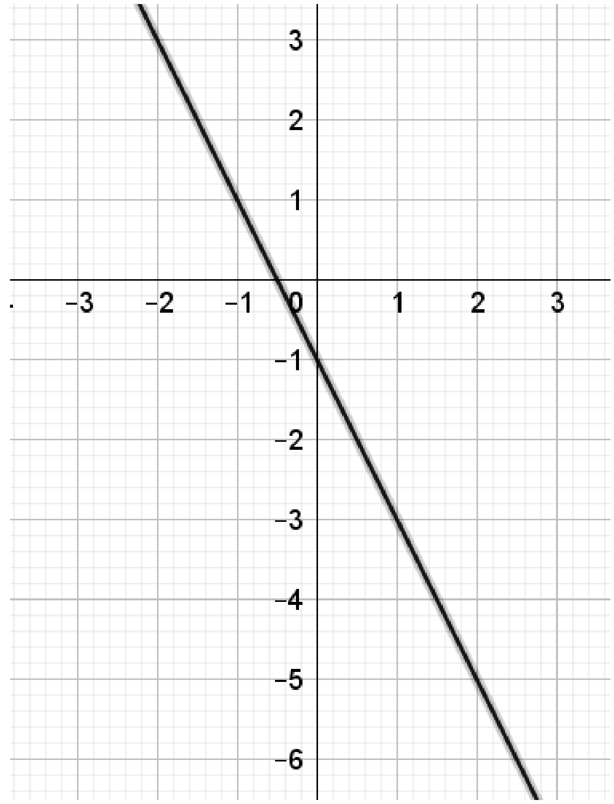
Les droites ne se coupent pas.

Il n'y a donc pas de solution.
Puisque les droites ont la même pente, elles sont parallèles et ne vont jamais avoir un point d'intersection.

Infini de solutions : Droites confondues

Des droites qui coïncident sont des droites confondues. Puisque les deux droites coïncident, chaque point de l'une appartient aussi à l'autre. Alors ces points représentent les solutions du système.

Les droites ont la même pente et la même ordonnée à l'origine, ce sont des droites confondues.



1) 2x + y = -1
2) 4x + 2y = -2

1) y = -2x – 1
2) 2y = -4x – 2
y = -2x – 1

Le nombre de solutions algébriquement

Exemple 1 :
Détermine le nombre de solutions du système linéaire.

x + y = -2
-2x – 2y = 4

Exemple 2 :

Détermine le nombre de solutions du système linéaire.

$4x + 6y = -10$
$-2x - y = -1$

Exemple 3 :

Détermine le nombre de solutions du système linéaire.

$3x + y = -1$
$-6x - 2y = 12$