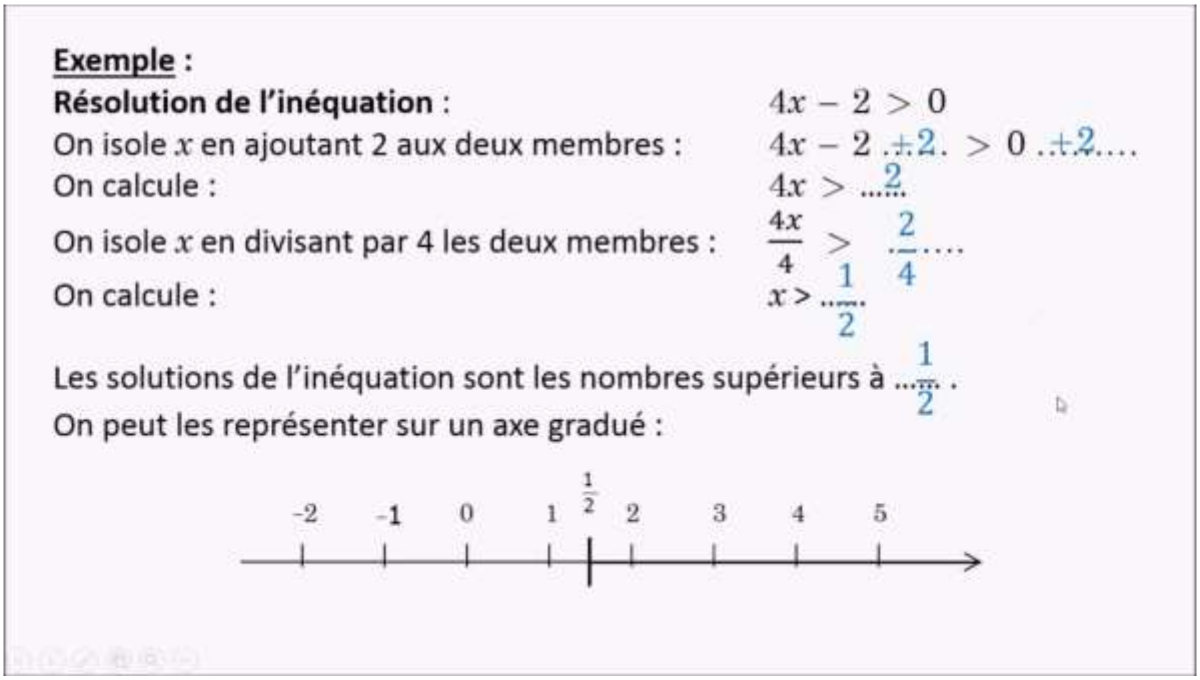
# Mathématique Appliquée 30S

# Note : Systèmes d'Inéquations :

Nom : ______________________

# Table Des Matières






**Exemple :**

$$-5x + 4 < 1$$

$$-5x + 4 - 4 < 1 - 4$$

$$-5x < -3$$

$$\frac{-5}{-5}x > \frac{-3}{-5}$$

$$x > \frac{3}{5}$$

https://www.mathematiquesfaciles.com/equations-inequation-du-premier-degre-a-une-inconnue_2_22810.htm

## Leçon 1 : Exploration des Graphiques d'Inéquations linéaires

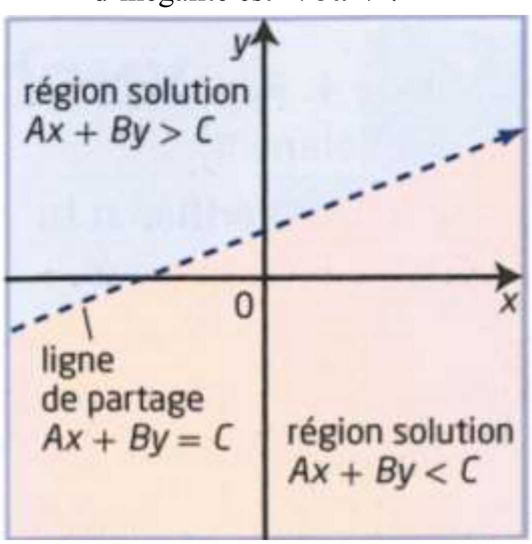
# A) Introduction aux Inéquations

**Inéquation :**
- Un énoncé qui comporte une relation d'inégalité et contient au moins une inconnue (ou variable)

- $Ax + By < C$
- $Ax + By \leq C$
- $Ax + By > C$
- $Ax + By \geq C$

où $A$, $B$ et $C$ sont des nombres réels.

### Ligne de partage :
- Une droite ou une courbe qui divise le plan cartésien en deux régions.
- Elle peut faire partie ou non de la région solution.
- La ligne de partage est une ligne continue et fait partie de la région solution si le signe d'inégalité est $\leq ou \ \geq$.
- La ligne de partage est une ligne pointillée et ne fait pas partie de la région solution si le signe d'inégalité est $< ou \ >$.




Ex :

$\mathbf{-x + 2y > 2}$

**Ou** $\mathbf{y > \frac{x}{2} + 1}$

$\mathbf{-x + 2y < 2}$

$\mathbf{y < \frac{x}{2} + 1}$

**Discret :** Fait de parties séparées ou distinctes. Les variables discrètes représentent des éléments qu'on peut compter (# entiers), comme des personnes dans une pièce.

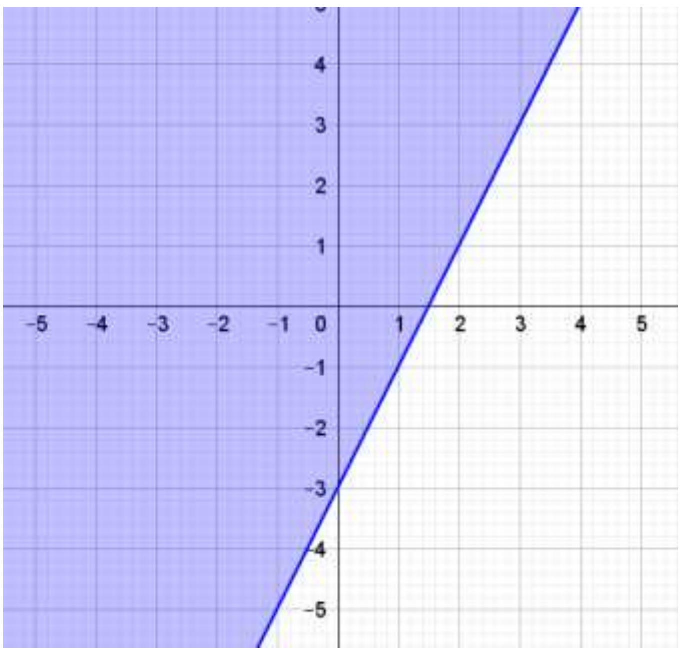
**Continu :** Ensemble continu de nombres. Dans un ensemble continu, il y a toujours un autre nombre entre deux nombres donnés. Les variables continues représentent des éléments qu'on peut mesurer, comme le temps

**Demi-plan :** Sur un plan cartésien, région située d'un côté du graphique d'une relation linéaire.

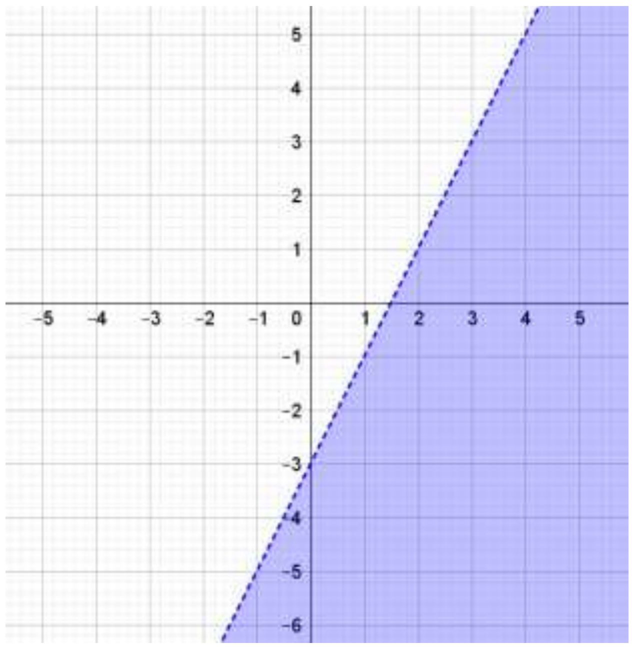
**Ensemble-solution :** Ensemble de toutes les solutions possibles.

**Région solution :** Partie du graphique d'une inéquation linéaire qui représente l'ensemble-solution. La région solution comprend les points sur sa ligne de partage si l'inéquation comporte une relation de type « supérieur ou égal à » ou « inférieur ou égale à ». C'est tous les points du plan cartésien qui satisfont une inéquation.

**Ex : $y \geq 2x - 3$**




**Ex : $y < 2x - 3$**




- Le graphique d'une droite sépare le plan en trois zones distinctes : deux demi-plans et la droite elle-même. La droite elle-même est la droite de délimitation de chaque demi-plan. Elle divise le plan des coordonnées en deux demi-plans.

- Une inéquation linéaire à une droite de délimitation qui peut être exprimée sous la forme $y = mx + b$. La solution d'une inéquation linéaire est l'ensemble de tous les points qui rendent l'inégalité vraie.

- Quand l'inégalité est $\leq$ ou $\geq$ la solution comprend les points de la droite de délimitation et le graphique comportera une droite de délimitation continue.

- Quand l'inégalité est $<$ ou $>$, la solution ne comprend pas les points de la droite de délimitation et le graphique comportera une droite de délimitation pointillée.

**Point d'essai :**

- Un point qui n'appartient pas à la ligne de partage du graphique d'une inéquation et qui est représentatif de tous les points d'une région.
- Un point qui sert à déterminer si les coordonnées des points d'une région satisfont l'inéquation.

## B) Trace les droites d'Inéquations

## Exemple 1 :

a) Représente graphiquement $2x + 3y \leq 6$

## Étape 1 : Trace le graphique.

**ATTENTION AU SIGNE D'INÉGALITÉ (GRAPHIQUE DISCRET OU CONTINU)**

**Méthode 1 : Trouve l'ordonnée et l'abscisse à l'origine pour tracer la droite linéaire**

Ordonnée ($x = 0$)
$2(0) + 3y = 6$
$y = 2$

Abscisse ($Y = 0$)

$2x + 3(0) = 6$

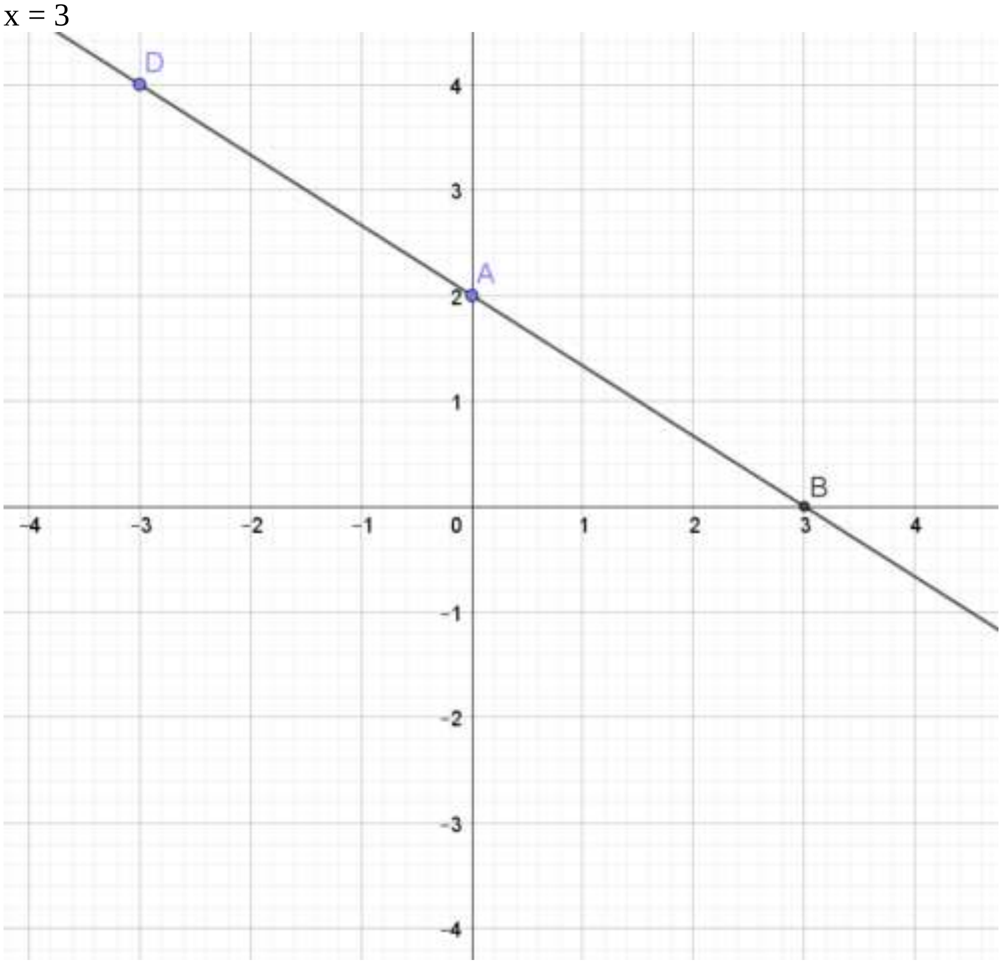
$x = 3$

**Méthode 2 : isole pour y pour trouver la forme explicite (y = mx + b) ensuite trace le graphique**

$2x + 3y \leq 6$
$-2x \qquad -2x$
$3y \leq -2x + 6$

$$\frac{3}{3}y \leq -\frac{2}{3}x + \frac{6}{3}$$

$$y \leq -\frac{2}{3}x + 2$$



## Étape 2 : Ombré la région de solution

**Méthode 1 :**
Place votre crayon sur le graphique et regarde si vous regardez pour les valeurs de y qui sont plus grands que votre y (ou votre crayon est placé) ou plus petits. Assurez vous que vous utilisez l'inégalité qui est associé avec l'inéquation **explicite**.

$$y \leq -\frac{2}{3}x + 2$$

**Méthode 2 :**
Vérifie/Test **un** point pour votre la région de solution

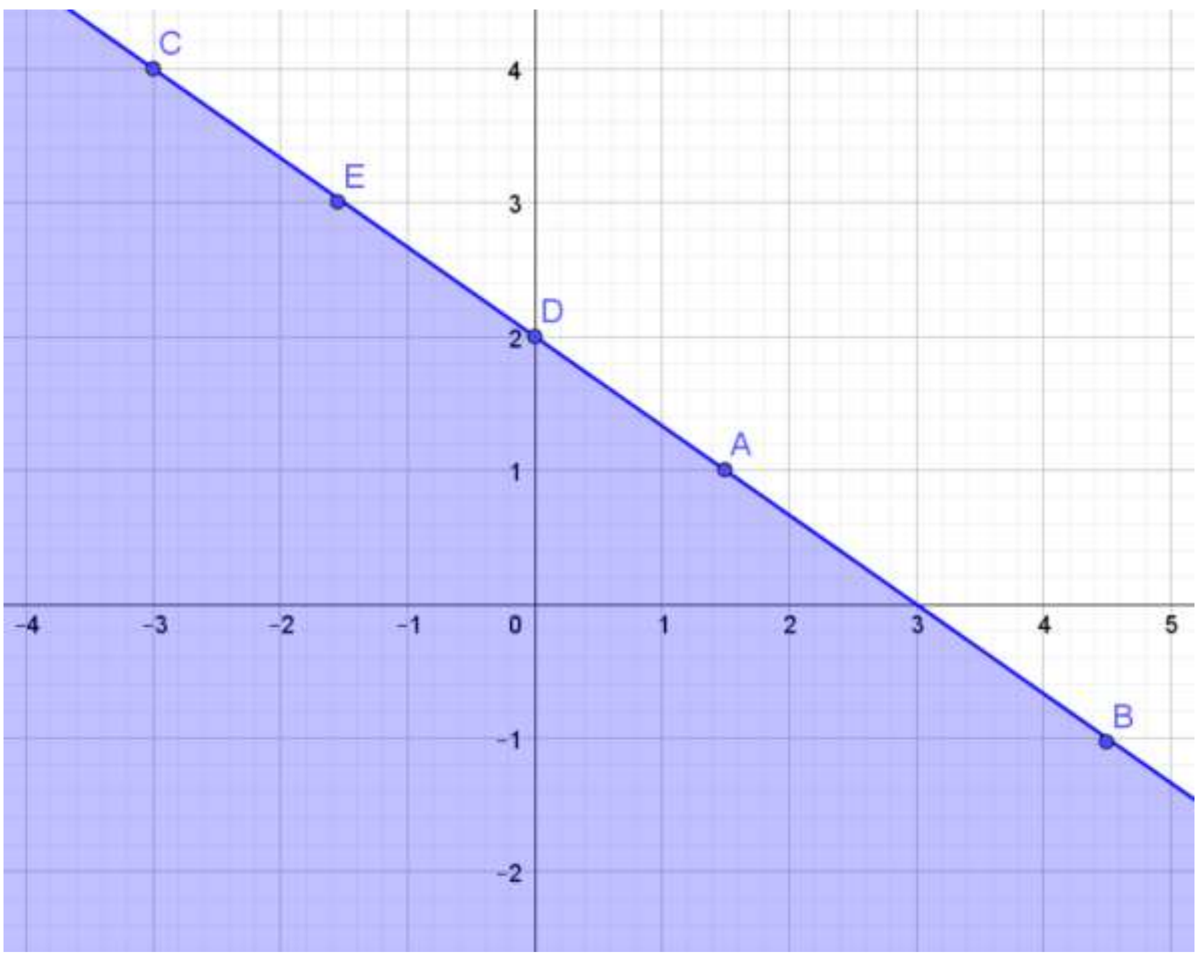
**Test (-1, 1)**
$2x + 3y \leq 6$
$2(-1) + 3(1) \leq 6$
$1 \leq 6$ **Vrai !**

**Alors ombré la région qui comprend ce point.**

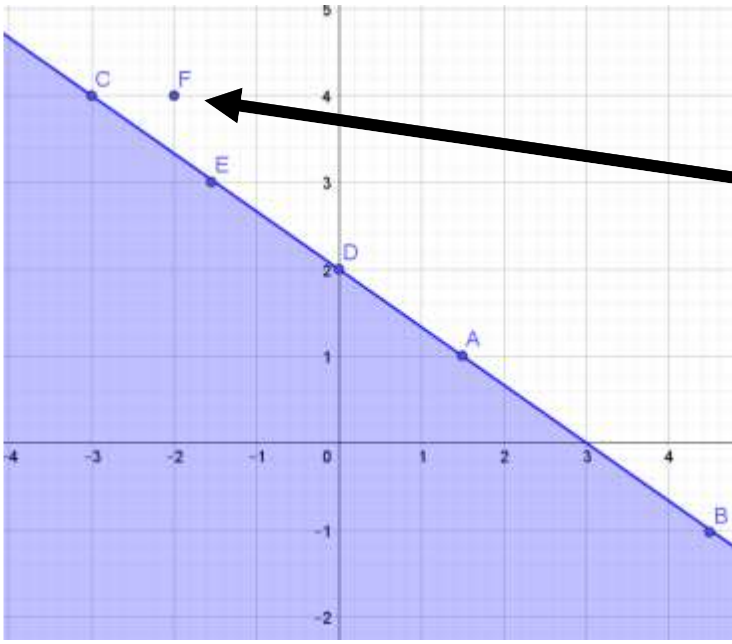
**OU**

**Test (2, 4)**
$2x + 3y \leq 6$
$2(2) + 3(4) \leq 6$
$16 \leq 6$ **Faux !**

**Alors ombré l'autre région du graphique.**



b) Détermine si le point (-2, 4) fait partie de la région de solution.




**Méthode 1 :** Vérifie si le point se trouve dans la région ombrée

**Non !!!**

(-2, 4)

OU/ET

**Méthode 2 :** Vérification algébrique

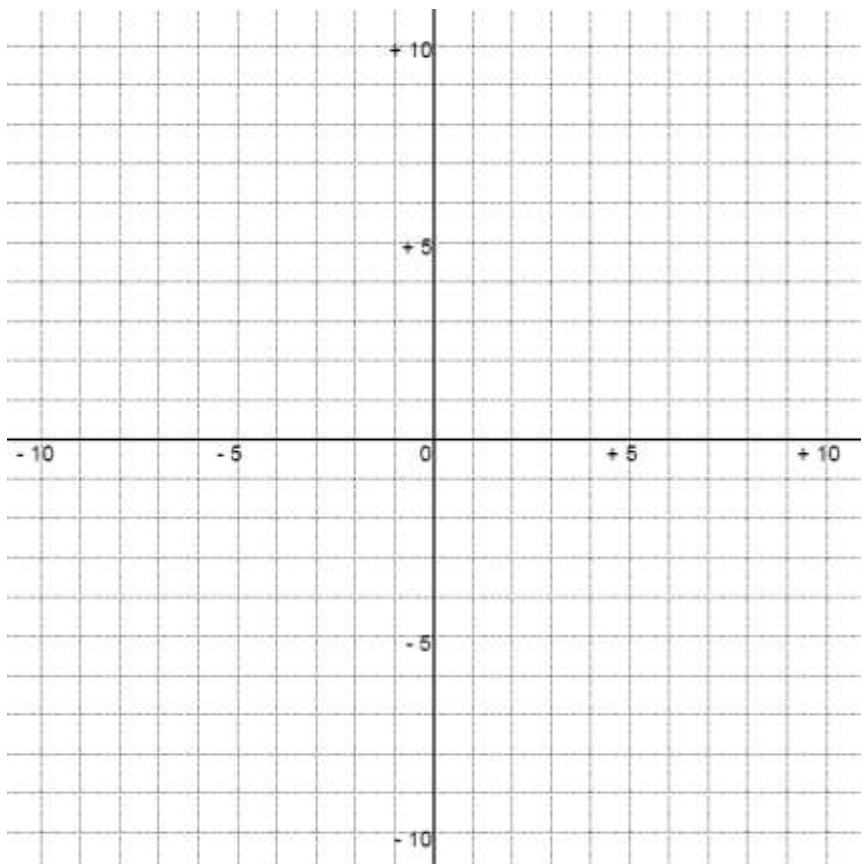
$2x + 3y \leq 6$

$2(-2) + 3(4) \leq 6$

$8 \leq 6$ **Faux !!!**

## Exemple 2 :

a) Trace l'inéquation $2x – 4y < 8$

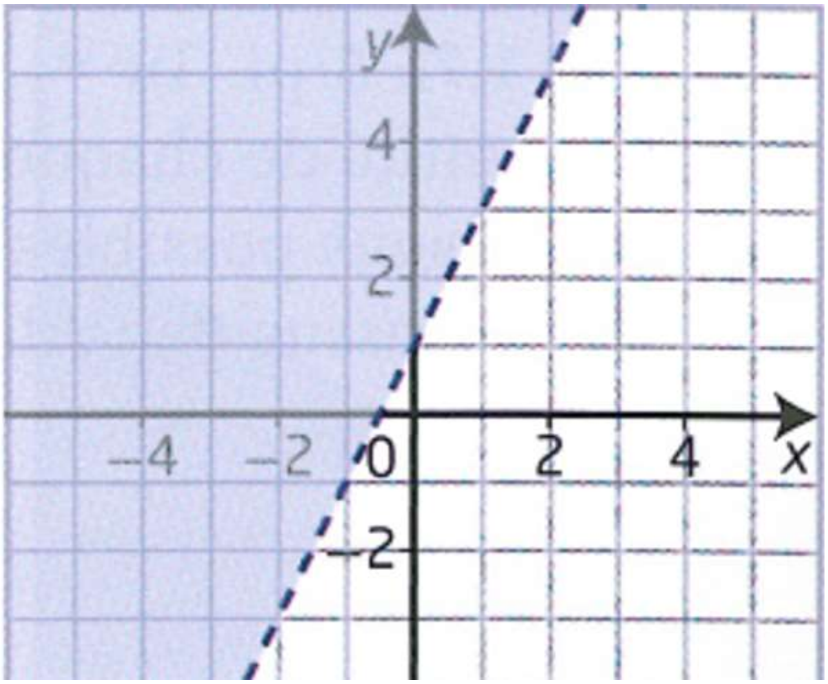


b) Détermine si les point (2, 4) et (2, 2) font partie de la région solution.

## C) Écrire une inéquation à partir de son graphique.

## Exemple 3 :

Écris une inéquation qui correspond au graphique ci-dessous.




Détermine la forme du graphique pour trouver l'inéquation. (Soit linéaire ou parabole)

C'est un graphique linéaire alors y = mx + b

## Étape 1 : trouve l'ordonnée à l'origine (b) et la pente (m).

b = 1 et la pente = 2/1 = 2

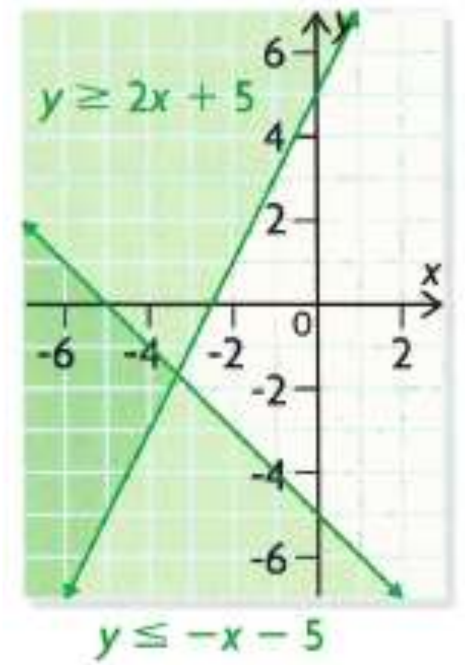
donc y $\boxed{?}$ 2x + 1

## Étape 2 : Trouve le type d'inégalité.

1) Place votre crayon sur le graphique et vérifie si la région de solution est plus grande ou plus petite que où votre crayon est placé. >
2) Trouve si l'inégalité représente une inéquation continue ou discret.

## Leçon 2 : Exploration des graphiques de systèmes d'Inéquations linéaires

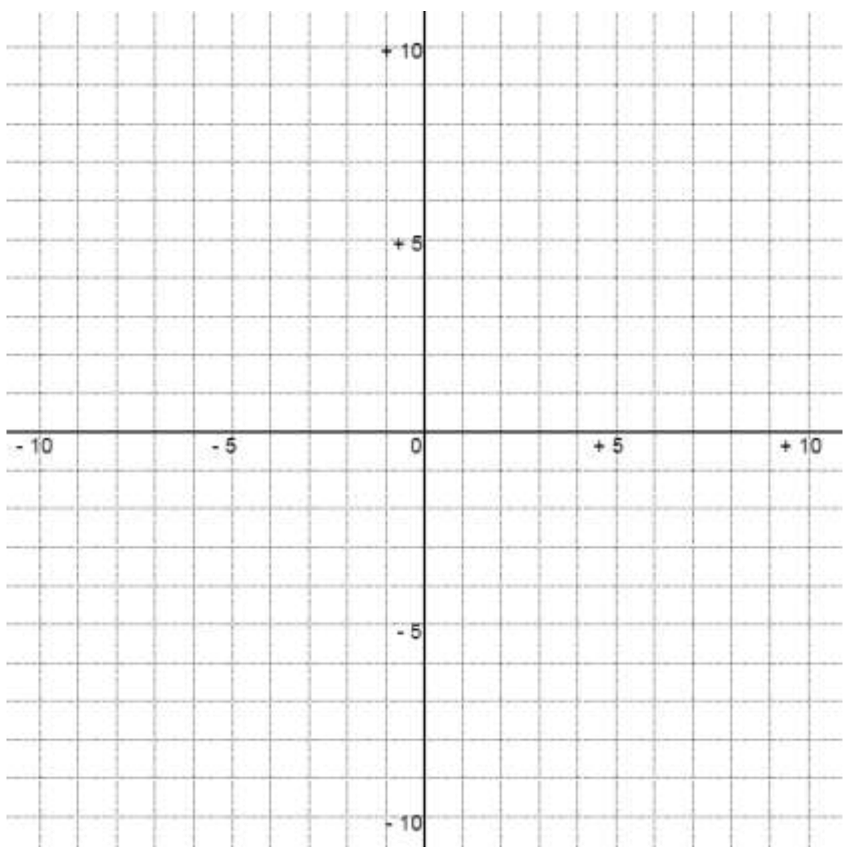
**Système d'Inéquations Linéaires :** Ensemble de deux inéquations linéaires ou plus dont le graphique est tracé sur le même plan cartésien; l'intersection de leurs régions solution représente l'ensemble-solution du système.




### Exemple 1 :

Trouve la région de solution.

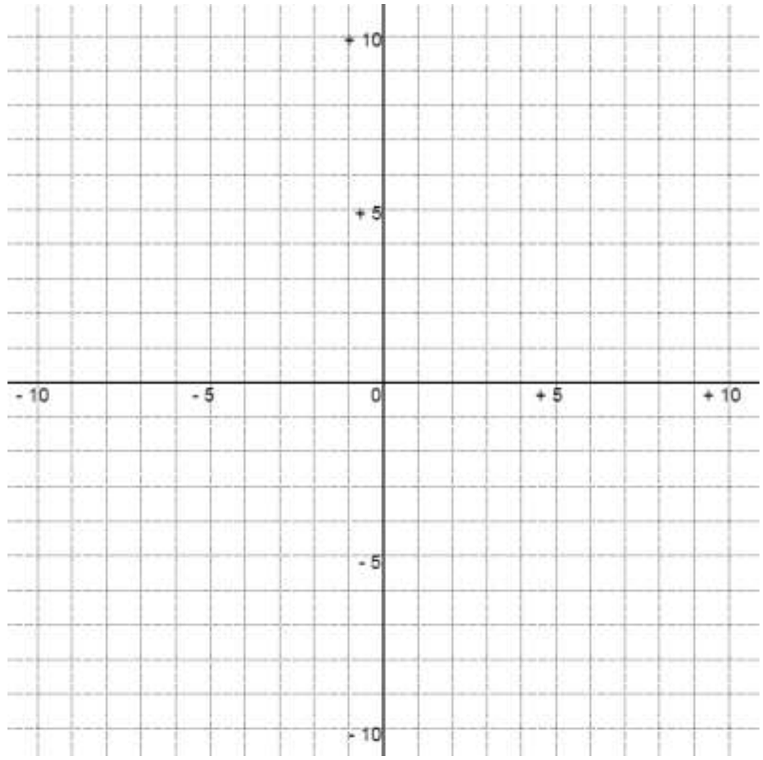
$y \geq -2x + 4$
$y > 3x + 1$



## Exemple 2 :

Trouve la région de solution.

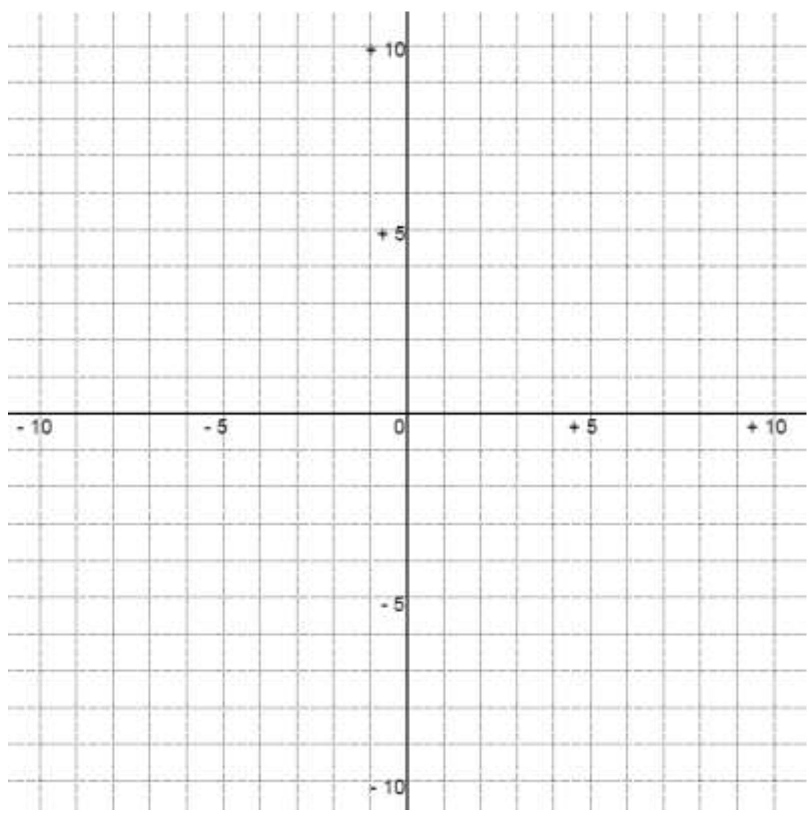
$x - 2 > 0$
$-3x + 6 \geq -4 + y$




## Exemple 3 :

Trace le graphique de l'ensemble-solution du système d'inéquations suivant. Choisis deux solutions possibles dans l'ensemble.

$3x + 2y > -6$
$y \leq 3$



# Leçon 3 : Résous les Systèmes Linéaires

## Utilise les systèmes linéaires pour trouver les solutions possibles d’un problème à mot.

### Exemple 1 :

Tu dois fabriquer un dessus de table en verre et en aluminium. Tu peux dépenser au maximum 50 $ pour l’achat des matériaux. Le verre de sécurité laminé coûte 60$/m$^2$ et l’aluminium coûte 1,75 $/pi. Tu peux choisir les dimensions du dessus de table et la quantité de chaque matériau que tu utiliseras.

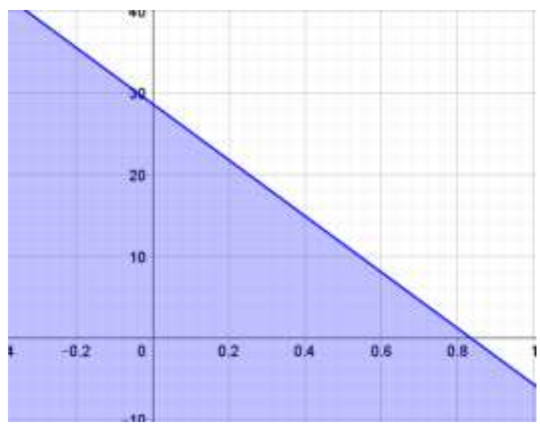
Détermine toutes les combinaisons possibles de quantités de matériaux qui permettent de fabriquer le dessus de table.

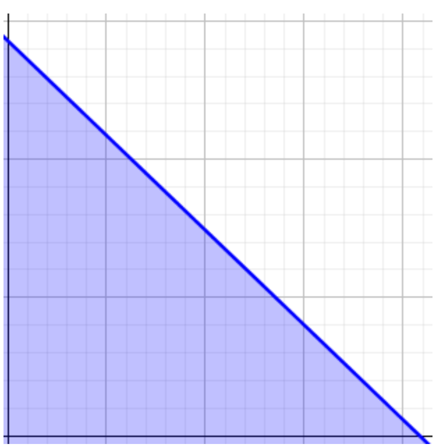
Soit x, l’aire du verre utilisé, et y, la longueur de l’aluminium utilisé.
L’inéquation qui représente cette situation est :

$60x + 1{,}75y \leq 50.$

Exprime $y$ en fonction de $x$.

$$\begin{aligned} 60x + 1{,}75y &\leq 50 \\ 1{,}75y &\leq -60x + 50 \\ y &\leq \frac{-60x}{1{,}75} + \frac{50}{1{,}75} \end{aligned}$$



**Avec une question de contexte on ne peut pas avoir des aires ou longueur négative.**

**Alors attention aux contraintes (les limitations).**

**Les solutions possibles :**

## Exemple 2 :

Dans un magasin d'articles sportifs, la vente d'une paire de skis alpins rapporte 100 $ net, et celle d'une planche à neige rapporte 120 $ net. Le gérant du magasin a un objectif : que le revenu net tiré de la vente de ces deux articles dépasse 600 $ par jour.
Quelles combinaisons de ventes de skis et de planches satisferont cet objectif ?

## Exemple 3 :

Un manufacturier fabrique deux sortes de bateaux sur des chaînes de montage différentes : des bateaux de pêche en aluminium et des hors-bord en fibre de verre.

- Quand les deux chaînes de montage tournent à plein régime, un maximum de 20 bateaux peuvent être construits en une journée.
- Comme la demande pour les bateaux en fibre de verre est supérieure à celle pour les bateaux en aluminium le manufacturier fabrique chaque jour au moins 5 bateaux en fibre de verre de plus que de bateaux en aluminium.

Quelles combinaisons de bateaux le manufacturier devrait-il fabriquer chaque jour

# Leçon 4 : Optimisations des Systèmes d'Inéquations linéaires

**Problème d'Optimisation :** Problème dans lequel une quantité doit être maximisée ou minimisée d'après un ensemble de règles ou de conditions.

**Contrainte :** Restriction d'un problème d'optimisation qui est modélisé et représenté par une inéquation linéaire.

**Fonction Économique :** Dans un problème d'optimisation, équation qui représente la relation entre les deux variables du système d'inéquations linéaires et la quantité à optimiser.

## Exemple 1 :

Un fabricant de jouets produit deux sortes de voitures miniatures : des automobiles de course et des véhicules utilitaires.

- Parce que l'approvisionnement en matériaux est limité, le fabricant ne peut pas produire plus de 40 automobiles de course et de 60 véhicules utilitaires par jour.
- Pourtant, l'entreprise peut fabriquer 70 véhicules ou plus au total chaque jour.
- La fabrication d'une automobile de course coûte 8 $ et celle d'un véhicule utilitaire, 12 $.

Il y a plusieurs combinaisons possibles d'automobiles de course et de véhicules utilitaires. Le fabricant veut connaître les combinaisons produisant les coûts minimum et maximum, ainsi que ces coûts.

a) Quelles sont les deux variables dans cette situation ?

**Le nombre de véhicules utilitaires, u, et le nombre d'automobiles de course, c.**

b) Formule un système de trois inéquations linéaires pour représenter les conditions suivantes.
- Le nombre total d'automobiles de course qui peuvent être fabriquées;
- Le nombre total de véhicules utilitaires qui peuvent être fabriqués;
- Le nombre total de véhicules qui peuvent être fabriqués.

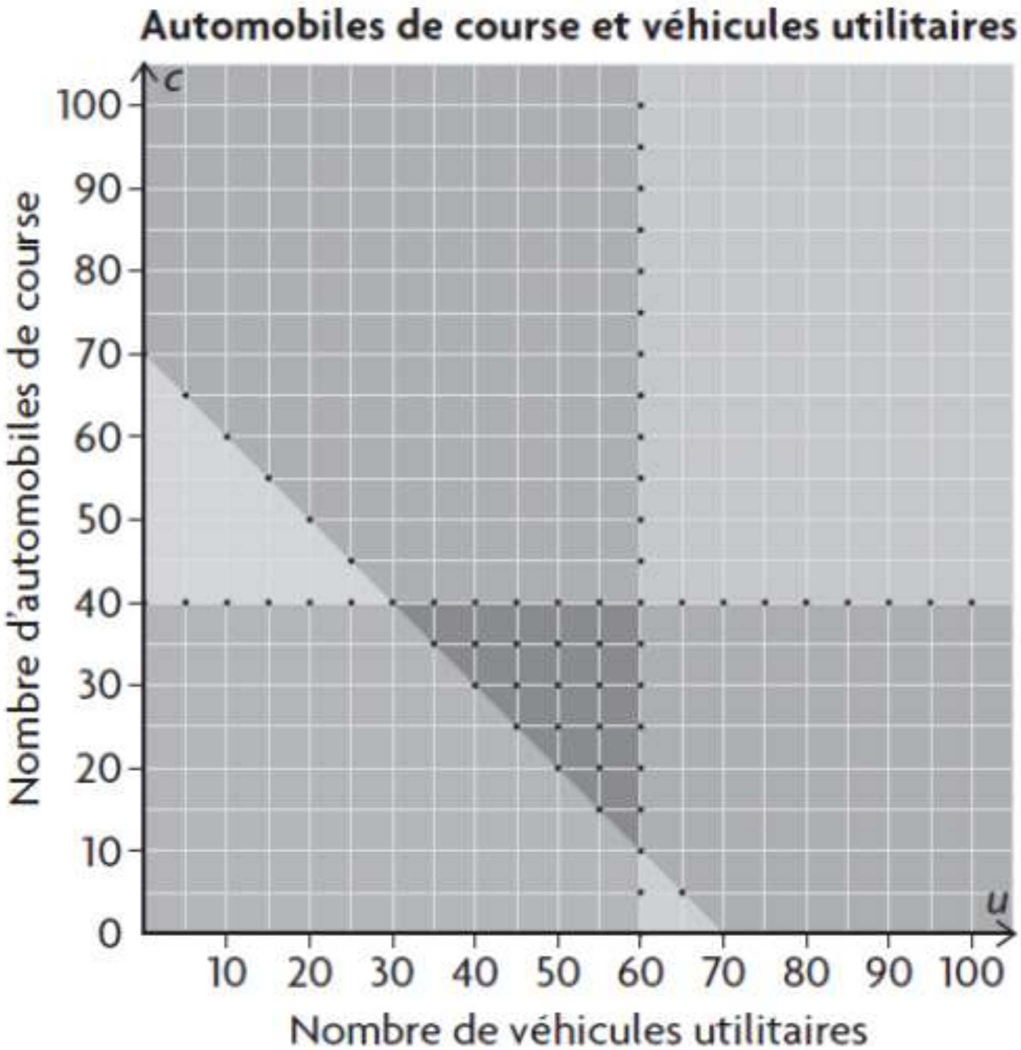
**Nombre total d'automobiles de course :** $\boldsymbol{c \leq 40}$
**Nombre total de véhicules utilitaires :** $\boldsymbol{u \leq 60}$
**Nombre total de véhicules :** $\boldsymbol{c + u \geq 70}$

c) Que sais-tu des restrictions sur le domaine et l'image des véhicules ? Explique ta réponse.

**Les restrictions/limitations sont que u et c doivent être des nombres entiers positifs. On ne peut pas avoir des nombres de véhicules négatives ou décimales.**
$\boldsymbol{u \in N}$ **et** $\boldsymbol{c \in N}$

d) Trace le graphique du système. Choisis des points qui sont dans la région de solution qui sont des solutions possibles du système.

$$\boldsymbol{c \leq 40}$$
$$\boldsymbol{u \leq 60}$$
$$\boldsymbol{c + u \geq 70}$$




e) Dans cette situation, quelle quantité doit être minimisée et maximisée ? Formule une équation pour représenter le lien qui unit les deux variables à cette quantité.

**Le coût total de fabrication des deux jouets doit être optimisé :**

**C = 8c + 12u**

f) Chacune des combinaisons qui suivent est une solution possible du système d'inéquations linéaires :

| | | |
|---|---|---|
| i) | 40 automobiles de course et 60 véhicules utilitaires. | **i) 1040 $** |
| ii) | 40 automobiles de course et 30 véhicules utilitaires. | **ii) 680 $** |
| iii) | 10 automobiles de course et 60 véhicules utilitaires. | **iii) 800 $** |
| iv) | 30 automobiles de course et 40 véhicules utilitaires. | **iv) 720 $** |

À l'aide de l'équation en « e) », calcule le coût de fabrication pour chaque solution. Que remarques-tu ?

**Chaque combinaison coûte une somme différente; la combinaison de 40 automobiles de course et 30 véhicules utilitaires est la moins chère, et la combinaison de 40 automobiles de course et 60 véhicules utilitaires est la plus chère. Les autres combinaisons sont entre les deux.**

## Exemple 2 :

Manuel aime nager et jouer au raquetball. En une heure, Manuel dépense 700 calories en nageant et 550 calories en jouant au raquetball. Par heure, sa séance de natation lui coûte 5 $ et celle de raquetball, 7$. Par semaine, Manuel veut dépenser au moins 4 500 calories et ne pas y consacrer une durée de plus de 8 h.  Il est prêt à investir 50 $ par semaine.  Manuel est –il en mesure de mettre sur pied un programme d’exercices qui satisfait ces contraintes. Décrit un programme que peut suivre Manuel.

## Exemple 3 :

Les Constructions L et G ont soumissionné pour la construction d'une clôture.
• Celle-ci ne mesurera pas plus de 50 verges et sera constituée de planches étroites et larges mesurant respectivement 6 po et 8 po de largeur.
• Il ne doit pas y avoir moins de 100 planches larges et pas plus de 80 planches étroites.
• Les planches étroites coûtent 3,56 $ l'unité et les planches larges, 4,36 $ l'unité.
Détermine les coûts maximum et minimum du bois pour construire la clôture.

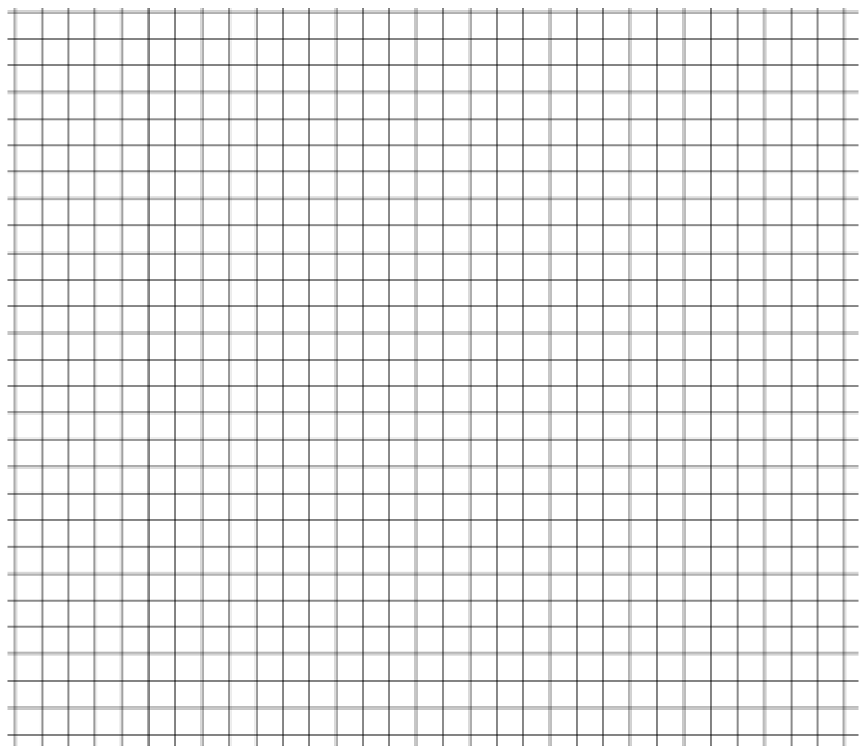
## Exemple 4 :

Un médecin recommande à un patient de prendre des suppléments de vitamines qui lui apporteront chaque jour un minimum de 35 mg de vitamine C et un maximum de 600mg de calcium. Chaque comprimé de la marque A contient 100mg de calcium et 5mg de vitamine C. Chaque comprimé de la marque B contient 150 mg de calcium et 10 mg de vitamine C. Le coût de la Marque A est de 0,40 $ par comprimé et celui de la marque B, 0,90 $ par comprimé.

a) Suppose que le patient prend chaque jour « x » comprimé de la marque A et « y » comprimés de la marque B. Écris une expression qui représente le coût quotidien de ces vitamines.

b) Construis un système d'inéquations qui représente les contraintes de ce problème.

c) Représente graphiquement le système.



d) Combien de comprimés de chaque marque le patient devrait-il prendre chaque 100 jours pour minimiser le coût de ses vitamines?

## Exemple 5 :

Trois équipes de basket-ball féminin se rendent à un tournoi en automobiles et en minifourgonnettes.

- Chaque équipe n'a pas plus de 2 entraîneurs et 14 athlètes.
- Chaque automobile peut recevoir 4 équipiers; et 6 équipiers peuvent s'asseoir dans chaque minifourgonnette.
- Les équipes n'on pas plus de 4 minifourgonnettes et 12 automobiles à leur disposition.

La direction de l'école veut connaître la combinaison d'automobiles et de minifourgonnettes qui nécessitera le nombre minimum et maximum de véhicules. Conçois un modèle pour représenter cette situation.