Mathématique Appliquée et Pré-Calcul 20S

Note : Relations et Fonctions

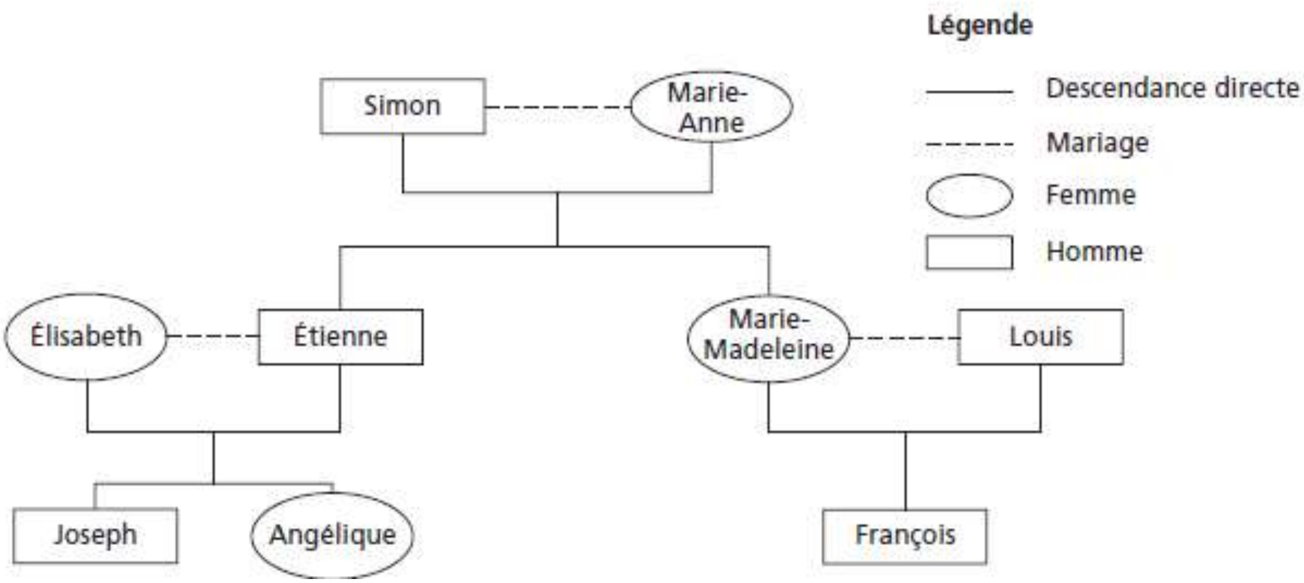
Nom : ____________________

Table des matières

Leçon 1 : Représenter des relations

Il y a plusieurs façons de représenter les relations! On en étudiera cinq de ces façons!
Ex :

L'arbre généalogique suivant montre les liens de parenté dans une famille.



Vocabulaire

Un ensemble : est un groupement d'objets distincts.

Un élément d'un ensemble : est un des objets qui forment l'ensemble.

Une relation : associe les éléments d'un ensemble aux éléments d'un autre ensemble.

2.1.1 : 5 différents types de Relations

Ex : Soit l'ensemble des fruits et l'ensemble des couleurs. Il est possible d'associer les fruits à leur couleur.

1) Mots

Une pomme ↑ élément du premier ensemble — peut être de couleur ↑ règle — rouge. ↑ élément du second ensemble

2) **Liste de Pairs d'éléments** (des paires ordonnées)

Ainsi, cet ensemble de paires ordonnées constitue une relation :

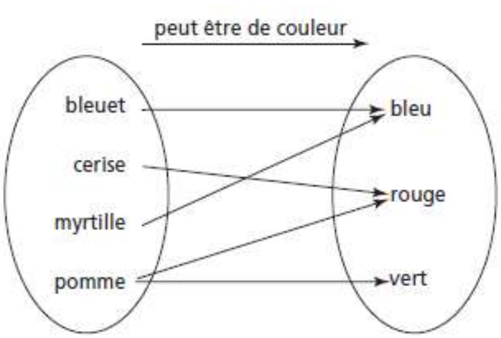
{(pomme, rouge), (pomme, vert), (bleuet, bleu), (cerise, rouge), (myrtille, bleu)}

3) **Table de valeurs** (L'en-tête de chaque colonne du tableau décrit chaque ensemble.)

Fruit	Couleur
pomme	rouge
pomme	vert
bleuet	bleu
cerise	rouge
myrtille	bleu

Chaque élément d'un ensemble est relié avec un élément d'un autre ensemble.
Ex : pomme → rouge

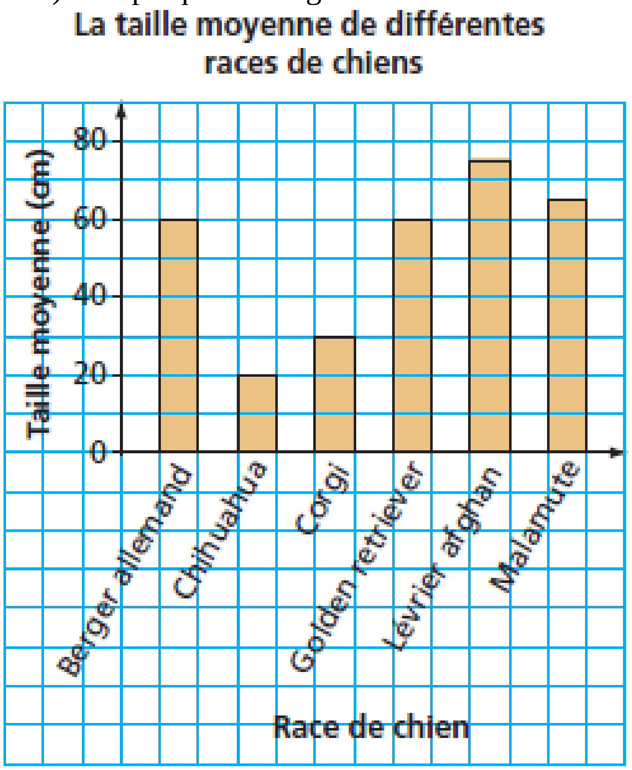
4) **Diagramme sagittal** (bulle du premier ensemble reliée à une bulle du deuxième ensemble)



Chaque ovale représente un ensemble. Chaque flèche associe un élément du premier ensemble à un du second ensemble.

L'ordre des mots dans une paire ordonnée, dans les colonnes d'une table de valeurs ou dans les ovales d'un diagramme sagittal est important. L'énoncé « une pomme peut être de couleur rouge » a du sens, mais l'énoncé « rouge peut être de couleur pomme » n'en a pas. Autrement dit, une relation s'applique dans une direction donnée d'un ensemble à l'autre.

5) Graphique ou diagramme



2.1.2 : Une relation représentée par une table de valeurs

Exemple 1 :

Il est possible d'associer des animaux aux classe. Examine la relation représentée dans la table de valeurs.

Sport	Équipement
badminton	volant
badminton	raquette
hockey	rondelle
hockey	bâton
tennis	balle
tennis	raquette
soccer	ballon

a) Décris cette relation à l'aide de mots.

b) Représente cette relation :

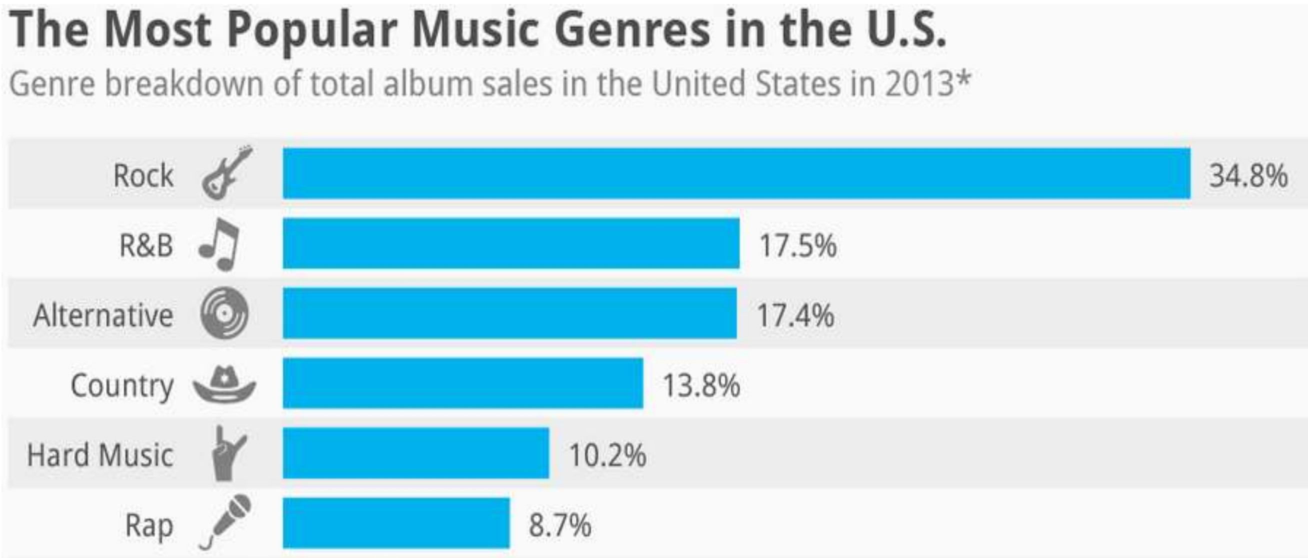
i) Par un diagramme sagittal.

ii) Par un ensemble de paires ordonnées.

2.1.3 : Une relation représentée à l'aide d'un diagramme à bandes

Exemple 2 :

Ce graphique démontre la popularité de chaque style de musique aux États-Unis.



a) Créez une table de valeurs.

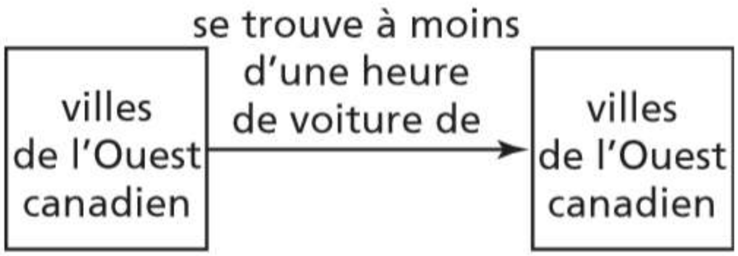
b) Dressez une liste des paires d'éléments.

c) Dessinez un diagramme sagittal.

2.1.4 : Une relation représentée par un diagramme

Exemple 3 :

Examine ce diagramme.



a) Décris la relation à l'aide de mots.

b) Nomme deux paires ordonnées de la relation.

1. Quels sont les avantages et les inconvénients de chaque mode de représentation d'une relation ?
2. Pourquoi l'ordre est-il important à l'intérieur d'une paire ordonnée ? Donne un exemple.

Leçon 2 : Les Caractéristiques des fonctions

2.2.1 : Les Relations

Une relation associe les éléments d'un ________________________________ avec les éléments d'un autre __________________________.

Ex : Une relation de coordonnées qui associe des valeurs de ***x*** avec des valeurs de ***y***

{(2,3), (4,3), (4,4), (7,4), (2,9)}

X	Y
2	3
4	3
4	4
7	4
2	9

Les éléments du premier ensemble d'une relation sont appelés **domaine**.
Par exemple, le domaine de la relation ci haut est ______________________

Les éléments du deuxième ensemble d'une relation sont appelés **image**.
Par exemple, l'image de la relation ci haut est_______________________

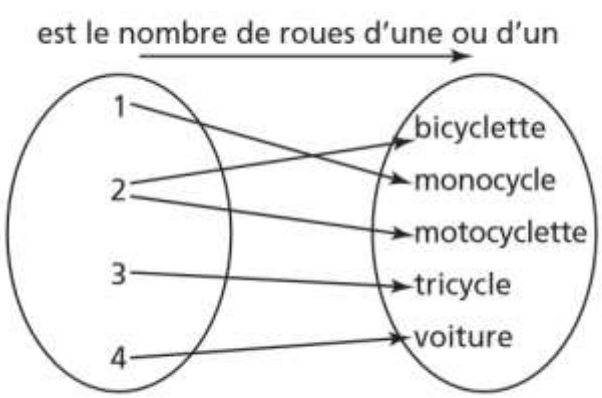
- **Les éléments de l'image sont dépendant sur les éléments du domaine.**
- **Les éléments dans les ensembles d'une relation peut répéter.**

2.2.2 Les Fonctions

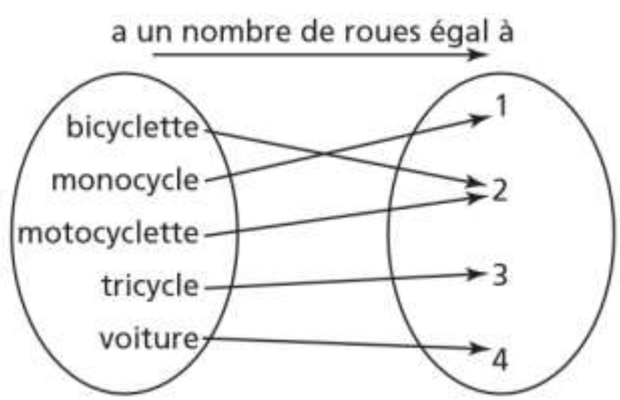
Une fonction est une relation particulière qui associe chaque élément du domaine à **un et un seul** élément de l'image.

Ex : Voici différentes façons d'associer des véhicules à leur nombre de roues.

Cette relation associe un nombre à un véhicule qui a ce nombre de roues.



Cette relation associe un véhicule au nombre de roues qu'il possède.



Quel diagramme sagittal représente une relation et non une fonction ? Explique pourquoi ?

Quel diagramme sagittal représente une fonction ? Explique pourquoi ?

Exemple 1 :

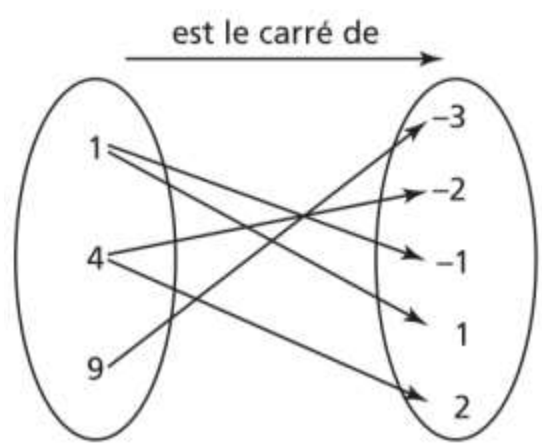
Une relation associe des figures au nombre d'angles droits qu'elles possèdent : {(triangle rectangle, 1), (triangle acutangle, 0), (carré, 4), (rectangle, 4), (hexagone régulier, 0)}

a) Détermine s'il s'agit d'une fonction et justifie ta réponse.

b) Indique le domaine et l'image.

Exemple 2 :

a) Pour la relation représentée sous forme de diagramme sagittal détermine s'il s'agit d'une fonction et justifie ta réponse.



b) Indique le domaine et l'image.

Dans les milieux de travail, le salaire brut, S, exprimé en dollars, dépend souvent du nombre d'heures travaillées, h. C'est pourquoi on dit que S est une variable dépendante. Puisque le nombre d'heures travaillées, h, ne dépend pas du salaire brut, h est la variable indépendante.

Variable indépendante → Heures travaillées, *h* ; Salaire brut, *S* ($) ← Variable dépendante

Heures travaillées, *h*	Salaire brut, *S* ($)
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60

Domaine : première colonne (1 à 5) — Image : deuxième colonne (12 à 60)

Les valeurs de la variable indépendante apparaissent dans la première colonne de la table de valeurs. Ces éléments appartiennent au domaine.

Les valeurs de la variable dépendante apparaissent dans la deuxième colonne de la table de valeurs. Ces éléments appartiennent à l'image.

Exemple 3 :

Cette table de valeurs présente la masse m, en grammes, d'un nombre n de billes identiques.

Nombre de billes, *n*	Masse des billes, *m* (g)
1	1,27
2	2,54
3	3,81
4	5,08
5	6,35
6	7,62

a) Pourquoi cette relation est-elle aussi une fonction ?

b) Identifie les variables indépendantes et dépendantes. Justifie tes réponses.

Variable indépendante :

Variable Dépendante :

c) Indique le domaine et l'image :

Domaine : ______________________________ Image : ______________________________

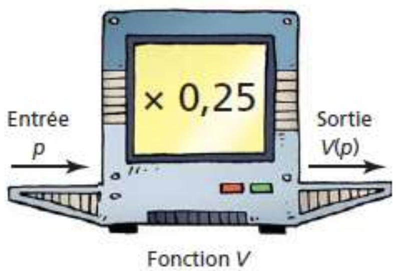
Leçon 3 : Les Équations de Relations et de Fonctions et la Notation Fonctionnelle

2.3.1 La Notation Fonctionnelle

Une fonction ressemble à une machine entrée-sortie. Le nombre d'entrée (variable indépendante) peut être tout élément du domaine, et le nombre de sortie (variable dépendante) dépend du nombre d'entrée.

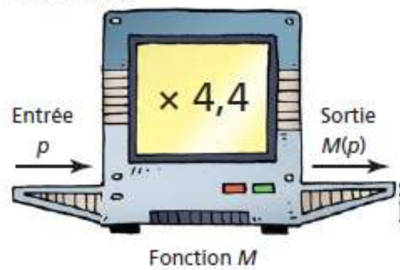
Machine A accepte des pièces de 25 cents.
Machine A calcule la valeur totale des pièces.

Machine A



Machine B accepte des pièces de 24 cents.
Machine B pèse les pièces.

Machine B



La valeur totale des pièces :
Les machinent effectuent des opérations différentes, elles représentent des fonctions différente.

Lorsqu'on insère 'p' pièces de 25 cents dans la machine, le nombre de sortie ou la valeur 'V', en dollars, égale 0,25p.

L'équation V(p) = 0,25p définit cette fonction. V(p) c'est le symbole pour la notation fonctionnelle. Elle représente que V est en fonction de p (V est dépendante sur p).

V = 0,25p c'est l'équation à deux variables ET
V(p) = 0,25p c'est l'équation de notation fonctionnelle

La masse totale des pièces :
La masse d'une pièce de 25 cents est de 4,4 g.
Lorsqu'on insère 'p' pièces de 25 cents dans la machine, le nombre de sortie ou la masse M, en grammes, égale 4,4p.

L'équation M(p) = 4,4p définit cette fonction. M(p) est aussi la notation fonctionnelle parce que M est la variable dépendante et que M dépend de p.

Ex : Détermine l'argent totale et la masse des pièces si on insère 5 pièces de 25 cents.
p = 5

V(p) = 0,25p
V(5) = 0,25(5)
V(5) = 1,25 $

M(p) = 4,4p
M(5) = 4,4(5)
M(5) = 22 g

Il y aura 1,25 $ qui pèse 22 g.

On peut seulement utilisée la notation fonctionnelle quand la relation est aussi une fonction.

Exemple 1 :

L'équation $V = -0{,}08d + 50$ définit le volume d'essence, V, en litres, qu'il reste dans le réservoir d'un véhicule après un trajet de d kilomètres. Il faut vider le réservoir avant de refaire le plein.

a) Décris la fonction. Écris l'équation en notation fonctionnelle.

b) Détermine la valeur de V(600). Que représente ce nombre ?

c) Détermine la valeur de d lorsque V(d) = 26. Que représente ce nombre ?

Exemple 2 :

Détermine f(x) si x est donnée. $f(x) = 4x - 2$

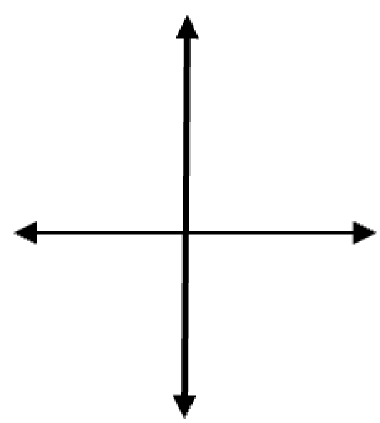
a) $x = 1$ b) $x = 3$ c) $f(-5)=$

Exemple 3 :

Détermine x si f(x) est donnée. $f(x) = -3x + 4$

a) $f(x) = -5$ b) $f(x) = 10$

c) $f(x) = -8$



2.3.2 La Composition des fonctions.

La Composition veut dire de substituer une fonction/équation/variable dans une autre équation.

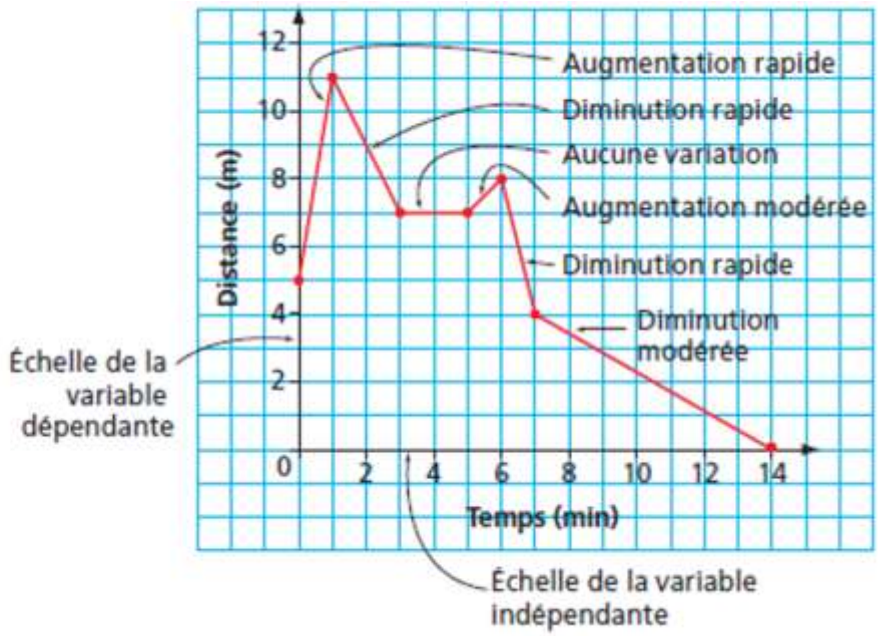
Exemple 4 :

$f(x) = 4x - 2$ et $g(x) = x^2$

a) f(g(1)) b) g(f(3))

Leçon 4 : Les Graphiques de Relations et de Fonctions

En mathématique, un graphique peut fournir beaucoup d'information. Les caractéristiques d'un graphique peuvent fournir des renseignements au sujet d'une situation donnée.



La variable **indépendante** représente toujours l'axe des x (l'axe horizontal/le domaine)

La variable **dépendante** représente toujours l'axe des y (l'axe vertical/l'image).

Attention si vous avez des données continue ou discret.

Quelques exemples de variables continues :

- Le temps de réalisation d'une tâche.
- La taille, le poids d'une personne.
- La vitesse d'une voiture.

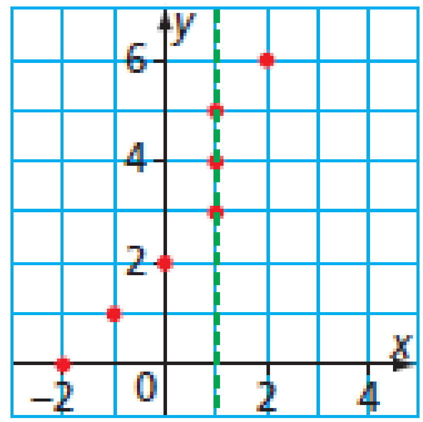
Quelques exemples de variables discrètes :

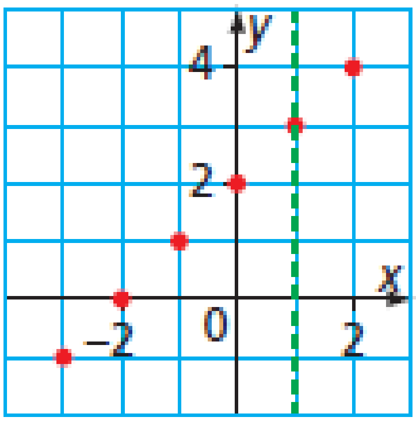
- Le nombre d'items dans une liste.
- Le nombre de personnes dans une salle.

Le test de la droite verticale

Un graphique représente une fonction lorsqu'il est impossible de tracer une droite verticale qui passe par plus d'un point.
Place une règle à la verticale sur le graphique, puis fais-la glisser le long du graphique. Si le bord de la règle passe toujours par un seul point à la fois, le graphique représente une fonction.

Une relation qui n'est pas une fonction a au moins deux paires ordonnées qui ont le même premier élément (x). Ainsi, lorsqu'on trace les paires ordonnées dans un plan cartésien, une droite verticale peut passer par deux des points.

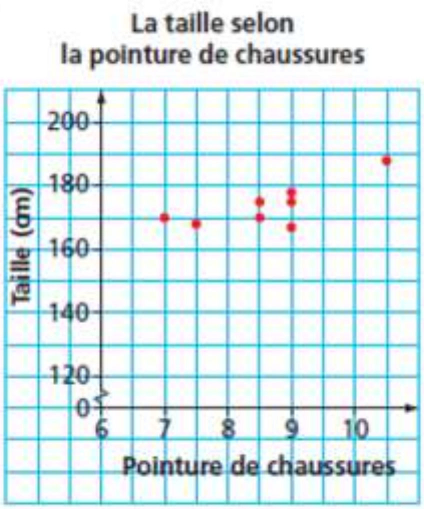




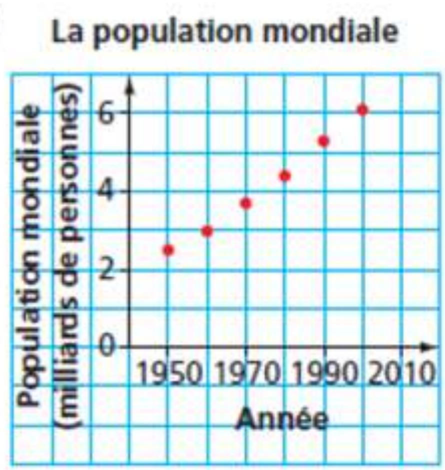
Une fonction a des paires ordonnées qui n'ont jamais le même premier élément (x). Ainsi, lorsqu'on trace les paires ordonnées dans un plan cartésien, toutes les droites verticales possibles ne passent jamais par plus d'un point.

Ex : Quel graphique représente une fonction ? Justifie ta réponse.

a)



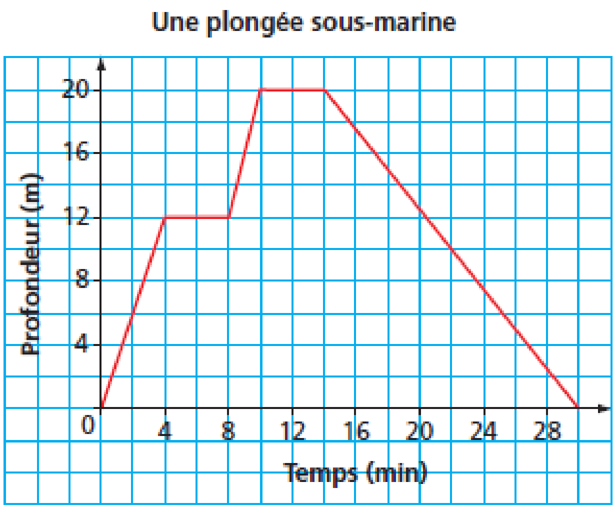
b)



2.4.1 Des graphiques de données continues

Exemple 1 :

Ce graphique présente la profondeur atteinte par un plongeur autonome en fonction du temps écoulé.



a) Combien de minutes la plongée a-t-elle durée ?

b) À quels moment le plongeur s'est-il arrêté pendant la plongée ?

c) Quelle est la profondeur maximale atteinte par le plongeur ? Combien de minutes le plongeur est-il resté à cette profondeur ?

Exemple 2 :

À pression constante, la vitesse du son dans l'air varie selon la température de l'air.

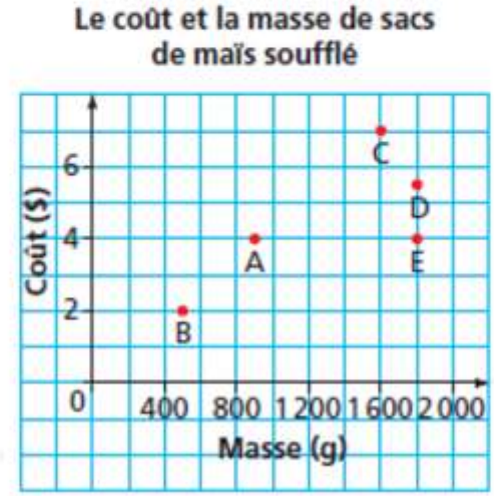
Température de l'air (°C)	Vitesse du son (m/s)
0	331
5	334
10	337
15	340
20	343

a) Trace le graphique qui représente les données.

b) Pourquoi les points du graphique sont-ils reliés ?

2.4.2 Des graphiques de données discrètes

Exemple 3 :



a) Quel sac coûte le plus cher ? Combien coûte-t-il ?

b) Quel sac a la plus petite masse ? Quelle est sa masse ?

c) Quels sacs ont la même masse ? Quelle est cette masse ?

d) Quels sacs coûtent le même prix ? Quel est de prix ?

e) Quel sac représente le meilleur achat : C ou D ? Pourquoi ?

f) Détermine si la relation est une fonction. Justifie.

Exemple 4 :

La location d'une voiture pendant moins d'une semaine chez Location Champion coûte 65 $ par jour les trois premiers jours, puis 60 $ par jour additionnel.

Nombre de jours de location	Coût total ($)
1	65
2	130
3	195
4	255
5	315
6	375

a) Trace le graphique qui représente les données.

c) Pourquoi les points du graphique ne sont-ils pas reliés ?

d) Cette relation est-elle une fonction ? Comment le sais-tu ?

e) Quel est le domaine ? Quel est l'image ?

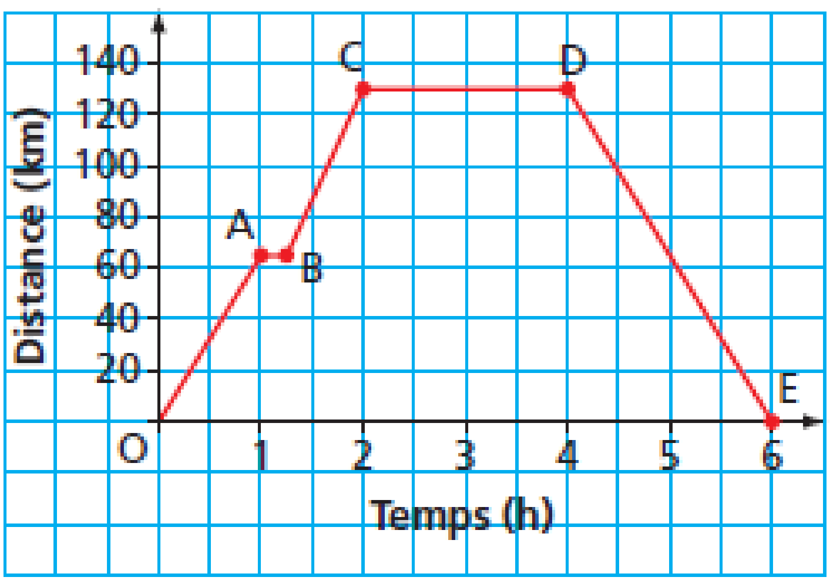
Domaine : ______________________________ Image : ____________________________

2.4.3 Description d'une situation correspondant à un graphique

Exemple 5 :

a) Décris le trajet représenté par chaque segment du graphique.

Une excursion d'un jour de Winnipeg à Winkler, au Manitoba



b) Nomme la variable indépendante et la variable dépendante.

2.4.4 Tracer le graphique correspondant à une situation donnée

Exemple 6 :

Samuel fait une promenade à bicyclette. Il accélère jusqu’à une vitesse de 20 km/h, puis il roule 30 minutes à une vitesse d’environ 20 km/h. Au pied d’une pente, Samuel réduit sa vitesse moyenne à environ 5 km/h pendant les 10 minutes de la montée. Une fois en haut de lap ente, il s’arrête 10 minutes.

Trace un graphique pour représenter la vitesse de Samuel en fonction du temps. Nomme chaque partie du graphique et explique ce qu’elle représente.

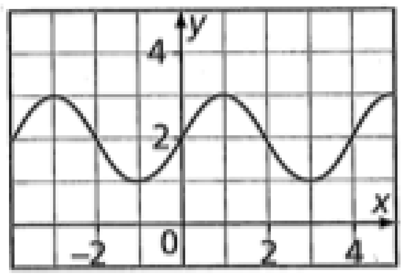
1. Dans un graphique de la distance en fonction du temps, que représente :
   - un segment horizontal ?
   - un segment qui monte vers la droite ?
   - un segment qui descend vers la droite ?
2. Dans un graphique de la vitesse en fonction du temps, que représente :
   - un segment horizontal ?
   - un segment qui monte vers la droite ?
   - un segment qui descend vers la droite ?

Leçon 5 : Le domaine et l'image

2.5.1 La Notation Ensembliste

Utilise les accolades {   } pour le représenter.

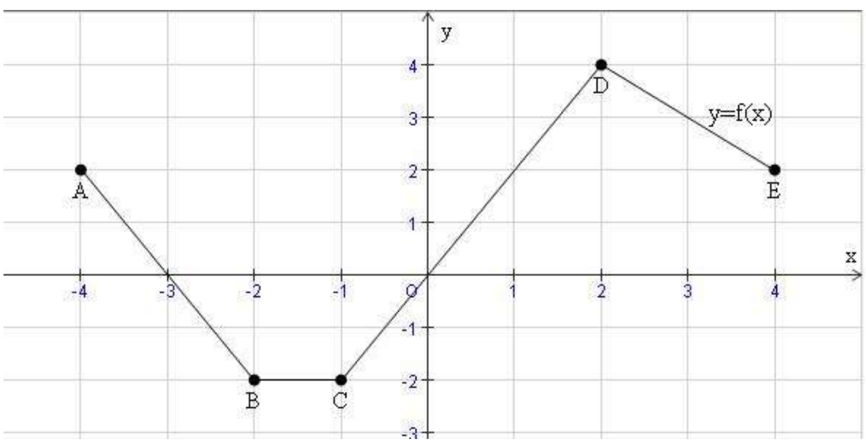
Exemple 1 :



Domaine : ___________________

Image : _____________________

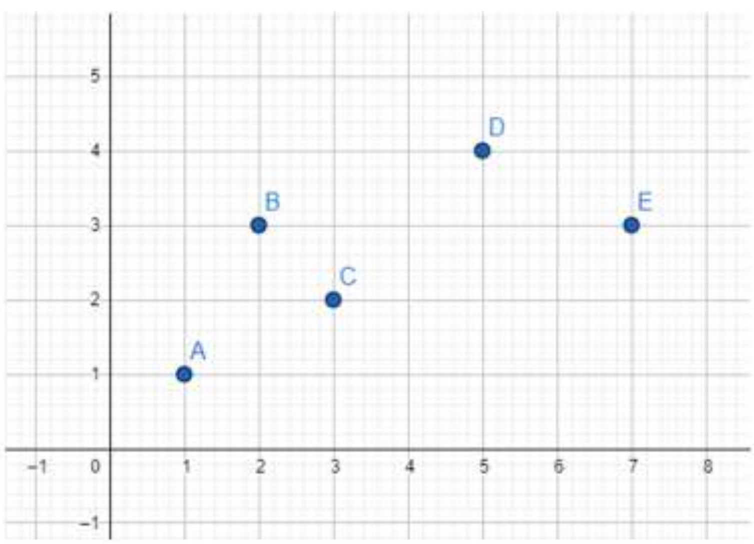
Exemple 2 :



Domaine : ___________________

Image : _____________________

Exemple 3 :

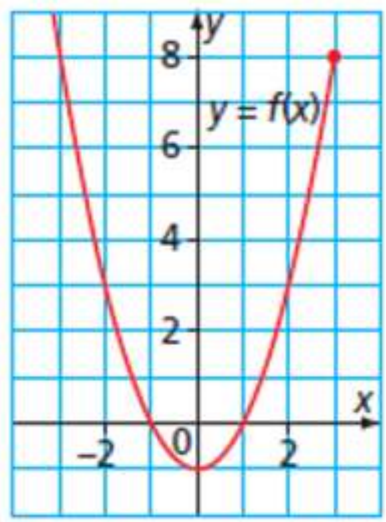


Domaine : _______________________

Image : _________________________

____

Exemple 4 :



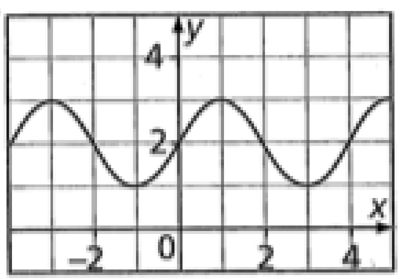
Domaine : ______________________

Image : ________________________

2.5.2 La Notation d'Intervalle

Utilise les crochets [ ] pour le représenter.

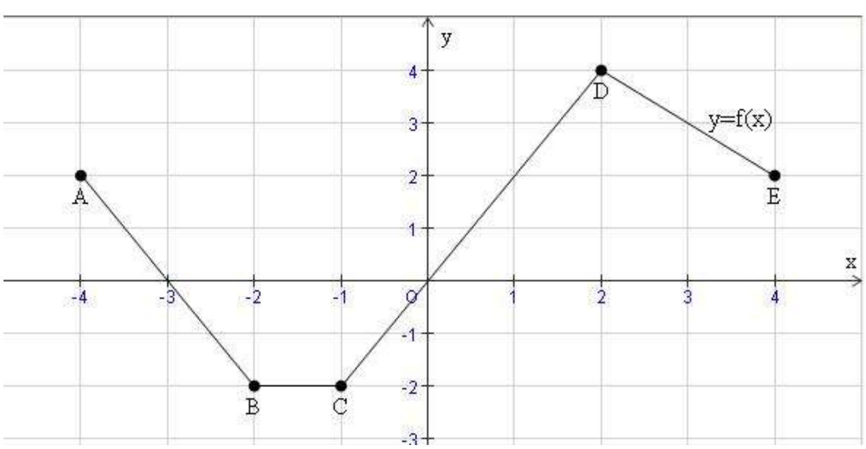
Exemple 5 :



Domaine : __________________

Image : ____________________

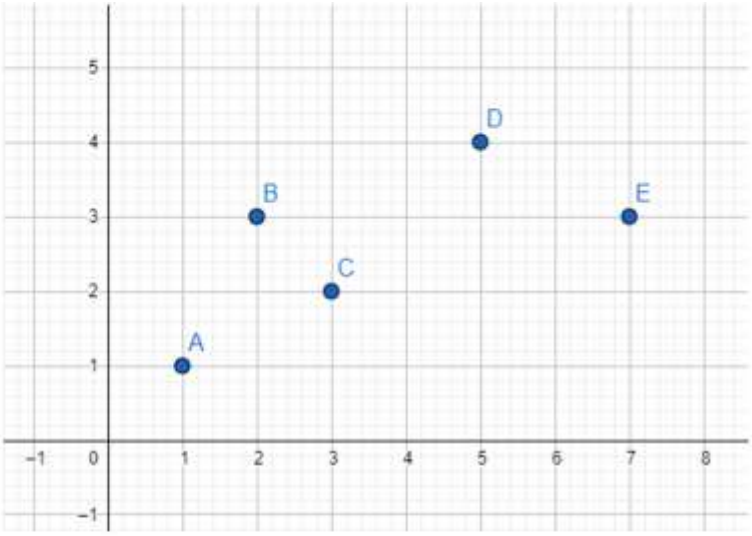
Exemple 6 :



Domaine : __________________

Image : ____________________

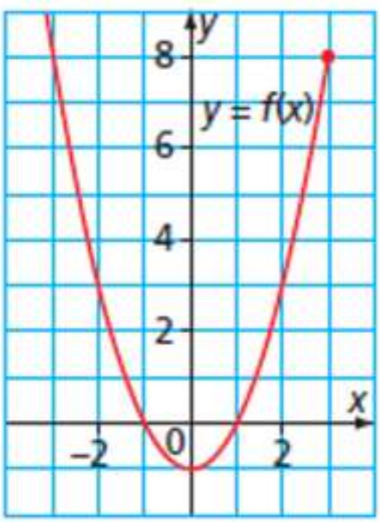
Exemple 7 :



Domaine : ______________________

Image : _________________________

Exemple 8 :



Domaine : ______________________

Image : ________________________

Leçon 6 : Les Caractéristiques des Relations Linéaires

Une relation ou une fonction est **linéaire** si les variables changent à un **taux de variation** constant.

Le taux de variation :

changement de ___________________________________ divisé par

le changement de ___________________________________.

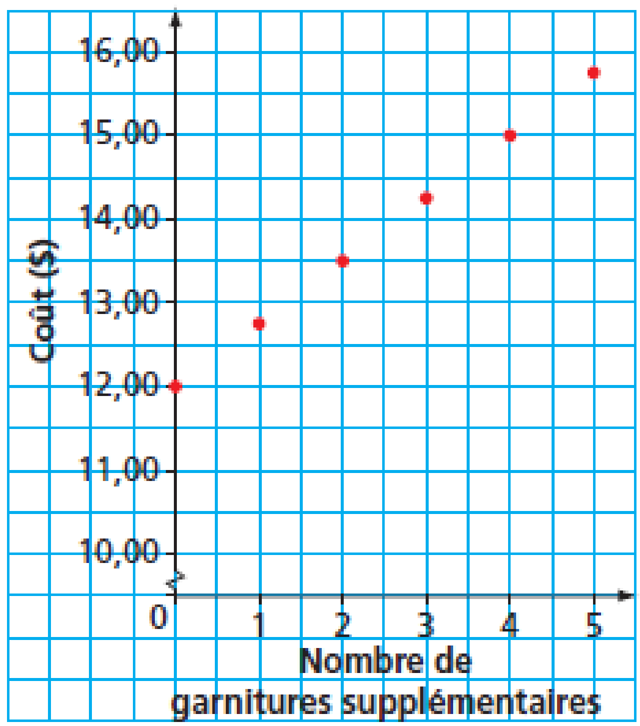
Façons de vérifier :

1) **Table de valeurs :** Y augmente a de façon proportionnelle à x.
2) **Graphique :** La relation linéaire donne une droite.
3) **Équation :** Le degré de l'équation est 1 ou 0. (Puissance avec la variable indépendante)
4) **Les Paires ordonnées :** Les coordonnées (x, y) d'une relation ont une variation constante
5) **Relation en mots :** En transformant les mots sous une autre forme tu peux vérifier.

Ex :
La table de valeurs et le graphique ci-dessous présentent le coût d'une pizza qui comporte jusqu'à 5 garnitures supplémentaires.

Nombre de garnitures supplémentaires	Coût ($)
0	12,00
1	12,75
2	13,50
3	14,25
4	15,00
5	15,75

Le coût d'une pizza



L'équation nous dit qu'une pizza coûte 12 $ et chaque garniture supplémentaire coûte 0,75 $.

C(n) = 0,75n + 12

{(0,12), (1, 12,75), (2, 13,50), (3, 14,25), (4, 15), (5, 15,75)}

Ex :

Le coût de location d'une voiture est de 60 $, plus 20 $ par 100 km parcourus. La variable indépendante est la distance parcourue et la variable dépendante est le coût. Il existe différentes façons de vérifier s'il s'agit d'une relation linéaire.

2.6.1 Les Table de Valeurs

Variable indépendante → Distance (km) | Coût ($) ← Variable dépendante

	Distance (km)	Coût ($)	
	0	60	
+100	100	80	+20
+100	200	100	+20
+100	300	120	+20
+100	400	140	+20

Dans une relation linéaire, une variation constante de la variable indépendante produit une variation constante de la variable dépendante.

Exemple 1 :

Quelle table de valeurs représente une relation linéaire ? Justifie ta réponse.

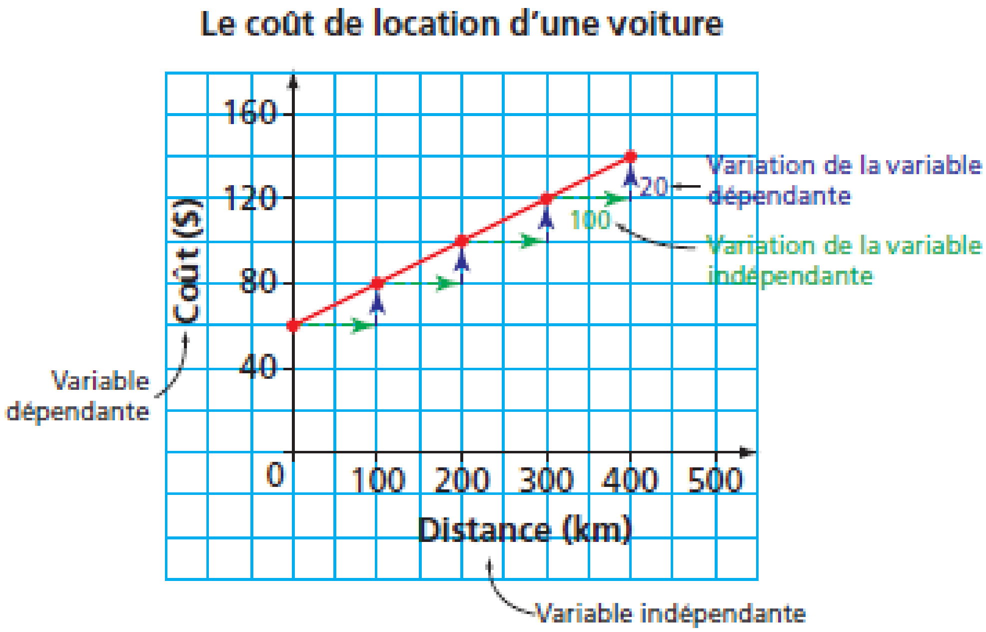
a) La relation entre la température en degrés Celsius, *C*, et la température en degrés Fahrenheit, *F*

C	*F*
0	32
5	41
10	50
15	59
20	68

b) La relation entre l'intensité du courant en ampères, *I*, et la puissance en watts, *P*, dans un circuit électrique

I	*P*
0	0
5	75
10	300
15	675
20	1 200

2.6.2 Les Graphiques

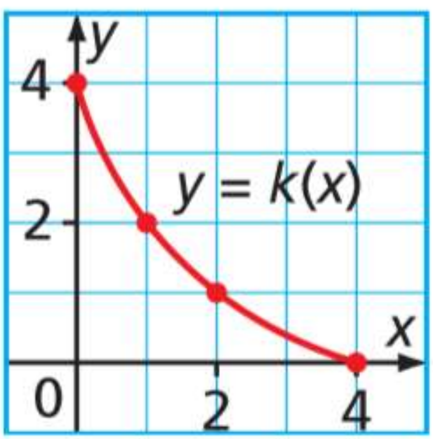


Le graphique d'une relation linéaire est une droite.

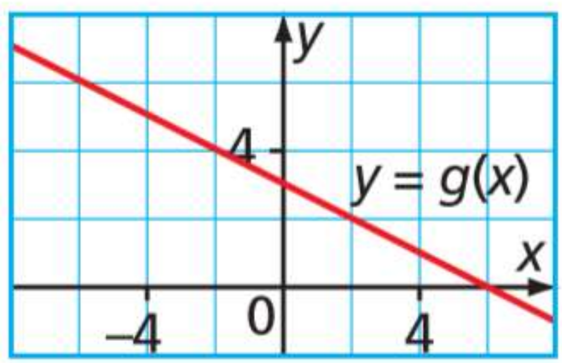
Exemple 2 :

Quel graphique représente une relation linéaire ? Justifie ta réponse.

a)



b)



2.6.3 Une Équation

Chaque représentation ci-dessus permet de calculer le **taux de variation.** Ce taux correspond à la fraction suivante :

$$\frac{\text{variation de la variable dépendante}}{\text{variation de la variable indépendante}} = \frac{20\ \$}{100\ \text{km}}$$

$$= 0{,}20\ \$/\text{km}$$

Le taux de variation est de 0,20 $/km, c'est-à-dire que pour chaque kilomètre supplémentaire parcouru, le coût de location augmente de 20 ¢. Dans une relation linéaire, le taux de variation est constant.

Tu peux déterminer le taux de variation à partir de l'équation qui définit la relation linéaire. Soit *C*, le coût de location en dollars, et *d*, la distance parcourue en kilomètres. Voici une équation de cette relation linéaire :

$$C = 0{,}20d + 60$$

montant initial

variable indépendante

taux de variation

variable dépendante

Le **montant initial** représente **l'ordonnée à l'origine** dans un graphique. La valeur de y quand x = 0

L'abscisse à l'origine représente la valeur de x quand y = 0.

Exemple 3 :

Quelle équation représente une relation linéaire ? Justifie ta réponse. Détermine sa taux de variation.

a) $D(t) = 2t + 8$ b) $F(x) = x^2 + 4$

2.6.4 Les Paires ordonnées

$$\begin{array}{c} +100 \qquad +100 \qquad +100 \qquad +100 \\ \{(0, 60), (100, 80), (200, 100), (300, 120), (400, 140)\} \\ +20 \qquad +20 \qquad +20 \qquad +20 \end{array}$$

Exemple 4 :

Quelle paire ordonnée représente une relation linéaire ? Justifie ta réponse.

a) $\{(3, 11), (5, 9), (7, 7), (9, 5)\}$

b) $\{(-2, 3), (0, 1), (2, -3), (4, -7)\}$

2.6.5 Relation en mots

Le coût de location d'une voiture est de 60 \$, plus 20 \$ par 100 km parcourus.
{(0, 60),(100, 80), (200, 100), (300, 120)}

Exemple 5 :

Laquelle de ces relations est linéaire ? Justifie ta réponse.

a) Une voiture neuve coûte 24 000 \$. Chaque année, sa valeur diminue de 15 %.

b) Pour une visite à une domicile, un plombier facture un montant de base de 75 \$, plus 50 \$ par heure de travail.