Mathématique Appliquée et Pré-Calcul 20S

Note : Radicaux et Exposants

Nom : ____________________

Table des matières

Leçon 1 : Les exposants

A) Les règles des exposants :

La règle	L'exemple
1. $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$	
2. $(a^n)^m = a^{mn}$	
3. $(ab)^m = a^m b^m$	
4. $a^0 = 1; a \neq 0$	
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; a \neq 0$	
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}; b \neq 0$	

B) Les puissances/exposants négatives

Une réponse simplifiée va toujours avoir seulement des exposants positifs !!

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}; a \neq 0$ Ex : $3^{-2} =$ Ex : $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$, où $a \neq 0$ Ex : $\frac{1}{4^{-2}} =$

Exemple 1 :

Simplifie chaque expression en une seule puissance.

a) $0{,}3^{-3} \cdot 0{,}3^{5}$

b) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4}\right]^{2} \cdot \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}\right]^{3}$

c) $\dfrac{(1{,}4^{3})(1{,}4^{4})}{1{,}4^{-2}}$

d) $\left(\dfrac{7^{\frac{2}{3}}}{7^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}\right)^{6}$

Exemple 2 :

Simplifie chaque expression.

a) $(x^{3}y^{2})(x^{2}y^{-4})$

b) $\dfrac{10a^{5}b^{3}}{2a^{2}b^{-2}}$

C) Les puissances/exposants rationnels (fraction)

Exemple 3 :

Simplifie chaque expression comportant des exposants rationnels en une seule puissance pour chaque coefficient et variable.

a) $(8a^3b^6)^{\frac{1}{3}}$

b) $(x^{\frac{3}{2}}y^2)(x^{\frac{1}{2}}y^{-1})$

c) $\dfrac{4a^{-2}b^{\frac{2}{3}}}{2a^2b^{\frac{1}{3}}}$

d) $\left(\dfrac{100a}{25a^5b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Exemple 4 :

Évaluez :

a) $(-2)^{-4}$

b) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-3}$

c) $\dfrac{5^2}{5^0}\cdot\dfrac{5^{-1}}{5^3}$

d) $\dfrac{3^{-3}}{3^5\cdot 3^{-2}}$

Exemple 5 :

Simplifiez :

a) $(x^3)^{-2}$ b) $(x)^{-3}(x)^{9}(y)^{7}(y)^{-2}$ c) $\left(\frac{y(4m^2)^0}{-y^2}\right)^{-1}$

Leçon 2 : Les radicaux d'ordre supérieur et l'estimation

A) Les Radicales

$\sqrt[n]{x}$ → est **le radicale**

x → est **la radicande**

n → est **l'indice du radical**

NB : Avec les racines carrées, l'indice est toujours ____.

Si on calcule une racine carrée, on trouve un nombre qui, lorsqu'on le multiplie par lui-même, donne le nombre sous la racine. On peut aussi trouver des racines plus grandes :

RACINE	**CECI VEUT DIRE**	**EXEMPLE** (x = 2)
$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = x$	$x \cdot x = a$ **ou** $x^2 = a$	
$\sqrt[3]{a} = x$	$x \cdot x \cdot x = a$ **ou** $x^3 = a$	
$\sqrt[4]{a} = x$	$x \cdot x \cdot x \cdot x = a$ **ou** $x^4 = a$	
$\sqrt[5]{a} = x$	$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = a$ **ou** $x^5 = a$	

Base

Base	x^2	x^3	x^4	x^5
x = 1	1	1	1	1
x = 2	4	8	16	32
x = 3	9	27	81	243
x = 4	16	64	256	1024
x = 5	25	125	625	3125
x = 6	36	216	1296	7776
x = 7	49	343	2401	16807
x = 8	64	512	4096	32 768
x = 9	81	729	6561	59 049
x = 10	100	1000	10 000	100 000

Exemple 1 : Déterminez la valeur de $\sqrt{12}^2$, expliquez votre réponse avec les lois des exposants.

Exemple 2 :

a) $\sqrt[3]{-8}$ b) $\sqrt[4]{256}$ c) $\sqrt[4]{81x^4y^{12}}$ d) $\sqrt[3]{64w^6x^9y^{30}}$

B) Estime la valeur de chaque radical au dixième près.

Étape 1 : Détermine quel 2 numéros, qui ont une racine carrée, que le radicande se trouve entre.

Étape 2 : Détermine quelle valeur le radicande se trouve plus proche à.

Étape 3 : Donne une estimation de la racine.

Exemple :

$$\sqrt{15}$$

Étape 1 : les valeurs de 9 et 16 on des racines carrés et 15 se trouve entre ces 2 numéros.

$$\sqrt{9} < \sqrt{15} < \sqrt{16}$$
$$3 < \sqrt{15} < 4$$

Étape 2 : 15 se trouve plus proche 16, alors sa racine carrée est plus proche à la racine carrée de 16.

Étape 3 : $\sqrt{15} \approx 3,9$

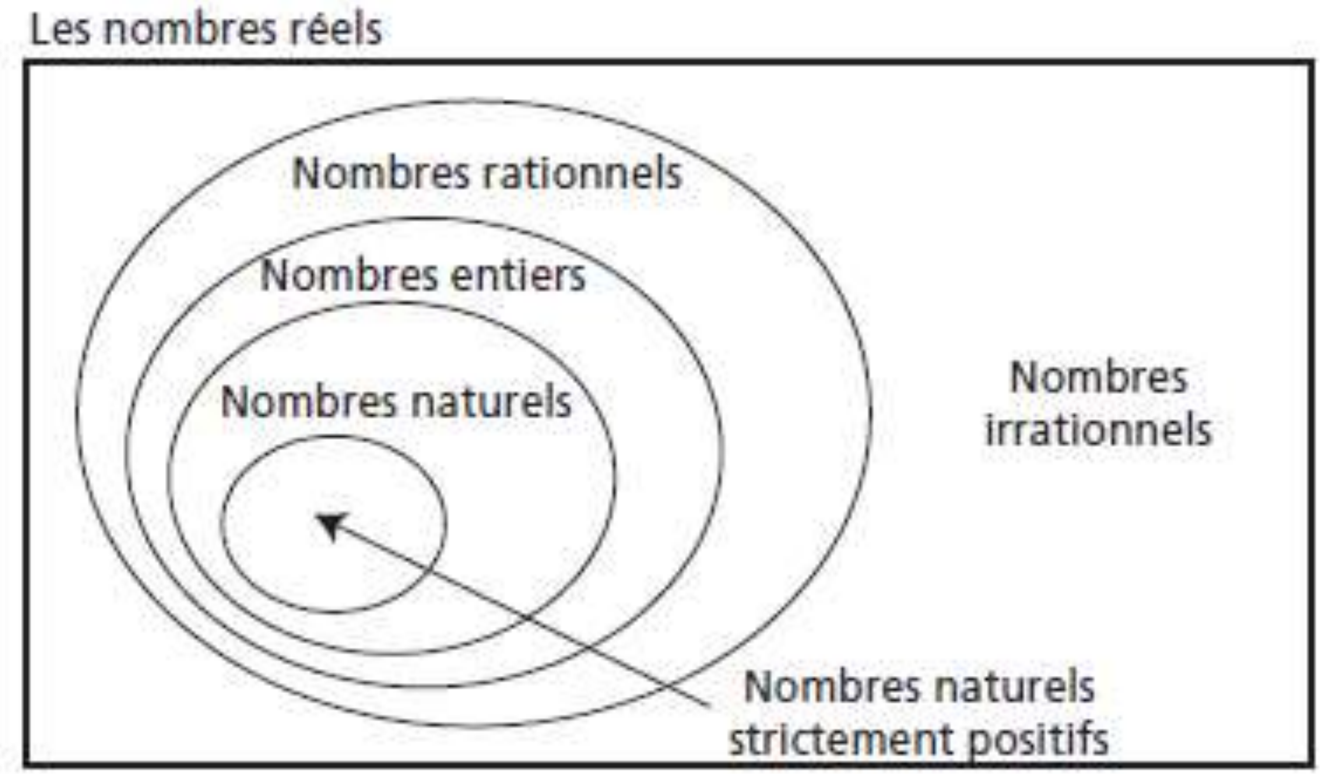
Exemple 3 :
Estime la valeur de chaque radical au dixième près. Justifie ta réponse.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{9}$ c) $\sqrt[4]{10}$ d) $\sqrt{13}$

Leçon 3 : Les nombres rationnels

Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres réels.

Le diagramme suivant montre la relation entre ces ensembles de nombres.



Un nombre irrationnel ne peut pas s'écrire sous la $\frac{m}{n}$, où m et n sont des nombres entiers et où n ≠ 0. La représentation décimale d'un nombre irrationnel n'est ni finie ni périodique (répète).

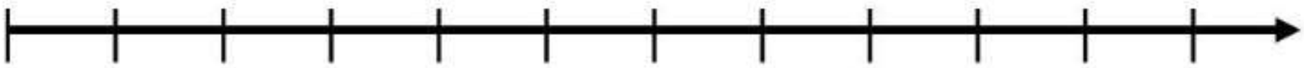
Exemple 1 : Indique si chaque nombre est rationnel ou irrationnel. Explique.

a) $-\frac{3}{5}$ b) $\sqrt{14}$ c) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

Exemple 2 :

Place ces nombres par ordre croissant à l'aide d'une droite numérique

$\sqrt[3]{13}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt[4]{27}$, $\sqrt[3]{-5}$



Exemple 3 :

Une sphère a un volume de 425 m^3. Quel est le rayon de la sphère, au dixième de mètre près ?

Le volume V d'une sphère de rayon r est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Remplace V par 425, puis résous l'équation r.

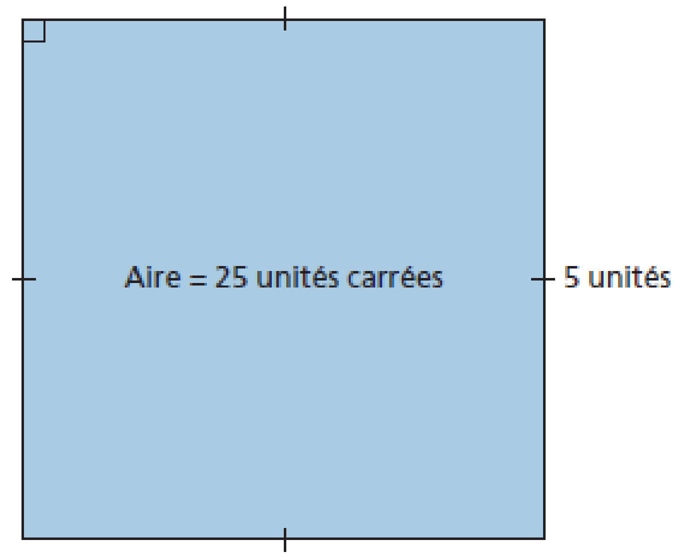
Leçon 4 : Les Radicaux parfaits

A) Les Carrés parfaits et leurs racines

Un nombre naturel que tu peux représenter par l'aire d'un carré dont la longueur de côté est un nombre naturel est un carré parfait. La longueur de côté carré est la racine carrée de l'aire du carré.

Aire = longueur $\cdot$ largeur = $x \cdot x = x^2$
$25 = x^2$
$\sqrt{25} = x = 5$

longueur $\cdot$ largeur = Aire
$5 \cdot 5 = 25$
Le nombre 25 est un carré parfait, et le 5 est la racine carrée.

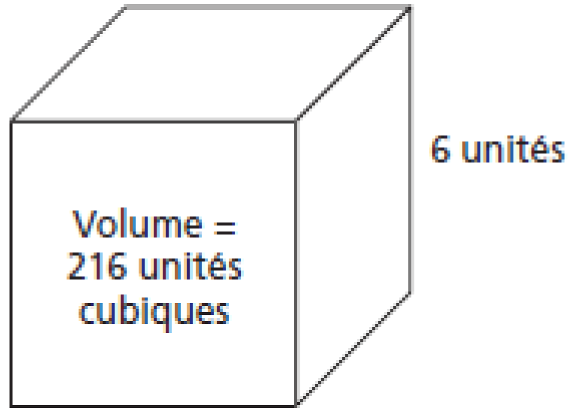


La *racine carrée* d'un nombre *n*, notée $\sqrt{n}$, est un nombre positif dont le carré est *n*.

Exemple 1 :
Détermine la racine carrée de 1 296 (un nombre naturel) sans calculatrice

B) Les Cubes parfaits et leurs racines

Un nombre naturel que tu peux représenter par le volume d’un cube dont la longueur d’arête (côté) est un nombre naturel. Le volume est un cube parfait.
La longueur d’arête du cube est la racine cubique du volume du cube.



Volume = longueur $\cdot$ largeur $\cdot$ hauteur

Volume = $x \cdot x \cdot x$
Volume = 216
Volume = $\sqrt[3]{216} = 6$
Volume = $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Le nombre 216 est un cube parfait, et le nombre 6 est sa racine cubique.

La **racine cubique** d’un nombre *n*, notée $\sqrt[3]{n}$, est un nombre dont le cube est *n*.

Un nombre naturel peut-il être à la fois un carré parfait et un cube parfait ? Justifie ta réponse.

Exemple 2 :
Détermine la racine cubique de 1 728 sans calculatrice.

Leçon 5 : Les Radicaux sous forme composée et sous forme entière

La multiplication de radicaux

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$,
où n est un nombre naturel strictement positif, et a et b sont des nombres réels.

Les radicaux de la forme $\sqrt[n]{x}$, tels que $\sqrt{80}$, $\sqrt[3]{144}$ et $\sqrt[4]{162}$, sont des **radicaux sous forme entière.**

Les radicaux de la forme $a\sqrt[n]{x}$, tels que $4\sqrt{5}$, $2\sqrt[3]{18}$ et $3\sqrt[4]{2}$, sont des **radicaux sous forme composée.**

A) Les Radicaux sous forme composée

1) Les Racines Carrées

- L'expression $\sqrt{16 \cdot 9}$ est équivalente à $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$ parce que :

$\sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144}$ $\quad$ et $\quad$ $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} = 4 \cdot 3$

$= 12$ $\quad\quad\quad\quad$ $= 12$

Exemple :

$$\sqrt{24} = \sqrt{4 \cdot 6}$$
$$= \sqrt{4} \cdot \sqrt{6}$$
$$2 \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

Exemple 1 :

Simplifie chaque radical.

a) $\sqrt{80}$ $\quad$ **b)** $\sqrt[3]{144}$ $\quad$ **c)** $\sqrt[4]{162}$

Certains nombres ont plus d'un facteur qui est un carré parfait.

$$\sqrt{200} = \sqrt{4 \cdot 50} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{50} = 2\sqrt{50}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{25 \cdot 8} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{8} = 5\sqrt{8}$$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

Lequel est la forme le plus simplifiée ?

En plus :

Exemple :
Écris chaque radical sous sa forme simplifiée

a) $2\sqrt{25}$ b) $3\sqrt{12}$ c) $-5\sqrt{32}$

Exemple :
Quelle radicale est plus grande ?

$3\sqrt{3}$ ou $4\sqrt{2}$

2) Les Racines Cubiques et plus

- De même, l'expression $\sqrt[3]{8 \cdot 27}$ est équivalente à $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$ parce que :

$$\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6 \qquad \text{et} \qquad \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$$

Exemple :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \cdot 3} \\ &= \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= 2 \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= 2\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

Exemple 2 :

Écris chaque radical sous sa forme simplifiée, lorsque c'est possible.

a) $\sqrt[3]{40}$ **b)** $\sqrt{26}$ **c)** $\sqrt[4]{32}$

B) Les Radicaux sous forme entière

Exemple :
Écris le radical sous forme entière.

$$3\sqrt{5}$$
$$= \sqrt{(3)^2 \cdot 5}$$
$$= \sqrt{9 \cdot 5}$$
$$= \sqrt{45}$$

Exemple 3 :

Écris chaque radical sous forme entière.

a) $4\sqrt{3}$ b) $3\sqrt[3]{2}$ c) $2\sqrt[5]{2}$

Exemple 4 :

Écris chaque radical sous forme entière.

a) $2\sqrt[3]{4}$ b) $3\sqrt[3]{2}$

Leçon 6 : Les exposants rationnels et les radicaux

A) Les puissances avec un numérateur de 1 et un nombre entier pour le dénominateur

Les puissances qui ont un exposant rationnel dont le numérateur est 1

Si n est un nombre naturel strictement positif et que x est un nombre rationnel, alors $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

$$5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{25}$$

$$= 5^1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 5$$

$$= 5$$

$5^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{5}$ sont des expressions équivalentes, c'est-à-dire que $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$.

De même, $5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$ et $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{125}$

$$= 5^1 \qquad\qquad\qquad\qquad = 5$$

$$= 5$$

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

- qu'élever un nombre à l'exposant $\frac{1}{2}$ équivaut à extraire sa racine carrée;
- qu'élever un nombre à l'exposant $\frac{1}{3}$ équivaut à extraire sa racine cubique, et ainsi de suite.

Exemple 1 : Évalue chaque puissance sans utiliser une calculatrice.

a) $27^{\frac{1}{3}}$ b) $0{,}49^{\frac{1}{2}}$ c) $(-64)^{\frac{1}{3}}$ d) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$

B) Les puissances avec un numérateur et un dénominateur qui sont des nombres entiers

Les puissances qui ont un exposant rationnel

Si m et n sont des nombres naturels strictement positifs et que x est un nombre rationnel, alors

$$x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$$

et

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Pour saisir la signification d'une puissance telle que $8^{\frac{2}{3}}$, étends la loi des exposants $(a^m)^n = a^{mn}$ aux cas où m et n sont des nombres rationnels.

Écris l'exposant $\frac{2}{3}$ sous la forme $\frac{1}{3} \cdot 2$ ou $2 \cdot \frac{1}{3}$.

Alors, $8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} \cdot 2}$
$= \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$
$= (\sqrt[3]{8})^2$

Extrais la racine cubique de 8, puis élève le résultat au carré.

Alors, $8^{\frac{2}{3}} = 2^2$
$= 4$

ou

$8^{\frac{2}{3}} = 8^{2 \cdot \frac{1}{3}}$
$= (8^2)^{\frac{1}{3}}$
$= \sqrt[3]{8^2}$

Élève 8 au carré, puis extrais la racine cubique du résultat.

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64}$
$= 4$

Exemple 2 :

a) Écris $40^{\frac{2}{3}}$ sous la forme d'un radical de 2 façons.

b) Écris $\sqrt{3^5}$ et $\left(\sqrt[3]{25}\right)^2$ sous la forme d'une puissance ayant un exposant rationnel.

Exemple 3 :

Évalue chaque expression.

a) $0{,}04^{\frac{3}{2}}$ **b)** $27^{\frac{4}{3}}$

c) $(-32)^{0{,}4}$ **d)** $1{,}8^{1{,}4}$

Exemple 4 :

Évalue chaque puissance sans utiliser une calculatrice.

a) $8^{-\frac{2}{3}}$ **b)** $\left(\frac{9}{16}\right)^{-\frac{3}{2}}$