Mathématique
Pré-Calcul 40S
Enseignante.
Mme. Layton
Unité :
Note Permutation, Combinaison et Binôme de Newton

Nom : ________________

Table des Matières

Leçon 1 : Principe de dénombrement **p. 3**

Leçon 2 : La Notation Factorielle **p. 9**

Leçon 3 : Permutation **p. 11**

Leçon 4 : Permutation d'Objet Identiques **p. 15**

Leçon 5 : Permutations d'objets distincts et groupes **p. 19**

Leçon 6 : Combinaisons **p. 23**

Leçon 7 : Permutation ou Combinaison **p. 27**

Leçon 8 : Binôme de Newton **p. 29**

Leçon 1 : Principe de Dénombrement

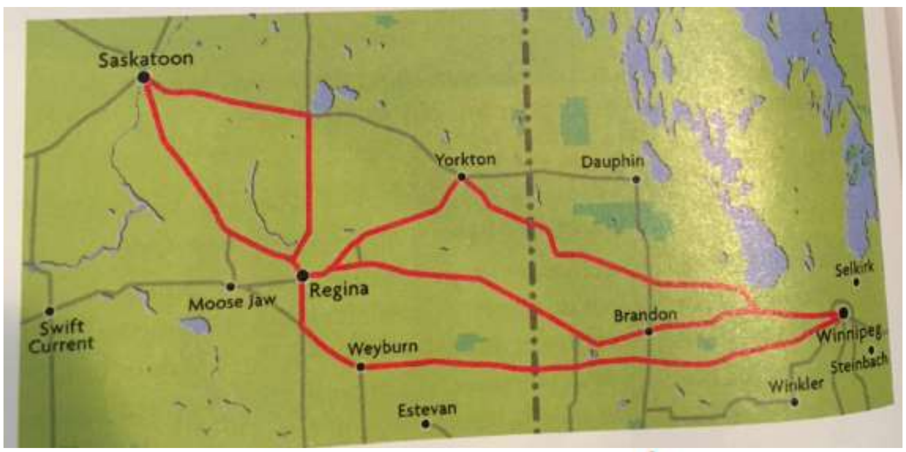
A) L'Introduction au principe de dénombrement

Exemple :
Tu visite à Winnipeg et tu fais une visite guidée des Prairies et visite famille à Regina et Saskatoon.
Il y a trois trajets différents pour Winnipeg à Regina et deux trajets différents pour Regina à Saskatoon

Combien de Trajet possible y a-t-il en total ?

Différentes Stratégies de Dénombrement :

Une Carte

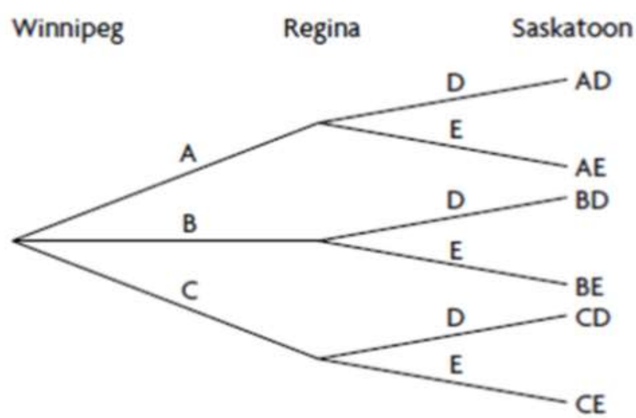


Un Tableau

Il y a six trajets possibles : AD, AE, BD, BE, CD, CE.

		Regina à Saskatoon	
		D	**E**
Winnipeg à Regina	**A**	AD	AE
	B	BD	BE
	C	CD	CE

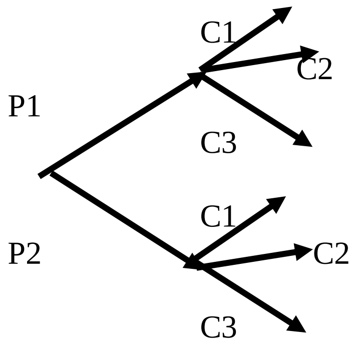
Un Diagramme en arbre



Toutes ces stratégies peuvent prendre du temps, alors il y a une méthode plus vite pour trouver le nombre de résultat pour un problème.

Exemple 1 :
Combien de possibilités de tenues différents y-a-t-il ?

	Chemise 1	Chemise 2	Chemise 3
Pantalon 1	P1C1	P1C2	P1C3
Pantalon 2	P2C1	P2C2	P2C3



B) Principe Fondamental du dénombrement Régulier

Principe fondamental du dénombrement (Le procédé de dénombrement) :

- Si une tâche/objet peut être accomplie de « a » façons et qu'un autre peut être accomplie de « b » façons, alors les deux tâches/objets peuvent être accomplies de a x b façons.
- Alors cette tâche/objet **ET** cette tâche/objet (**ET veut dire multiplier les numéros**).

Exemple 2 :

Combien de trajets sont possibles pour rendre de Winnipeg à Saskatoon ?

Alors combien de tâche (section) y-a-t-il ? Combien de possibilités pour chaque tâche (section) ?

 # de trajets de Saskatoon = # de trajets de Winnipeg à Regina * # de trajets de Regina à Sask

Alors
_3_ * _2_ = 6 **Il y a 6 trajets pour aller de Winnipeg à Saskatoon.**
Tâche 1 et Tâche 2

Exemple 3:
Il existe 2 routes majeurs entre Winnipeg et Fargo. Il existe 5 routes majeurs entre Fargo et Minneapolis.
a) Combien de façons peux-tu conduire de Winnipeg à Minneapolis en allant par Fargo ?

➔ 

b) Si nous voulons aller de Winnipeg – Fargo – Minneapolis – Fargo – Winnipeg**, <u>sans reprendre</u> la même route, combien de façons pouvons-nous le faire ?**

Exemple 4 :
Si un restaurant offre **deux** choix de **salade**, **trois** choix de **plat principal** et **quatre** choix de **dessert** et qu'un repas est constitué **d'une salade, d'un plat principal et d'un dessert**. Combien d'options de repas y-a-t-il ?

Exemple 5 :
Lance un dé rouge ordinaire (6 côtés) et un dé bleu ordinaire (6 côtés).
Combien y a-t-il de résultats différents ?

C) Le Principe fondamental avec ou sans restriction

Exemple 6 :

a) Combien de numéros à 3 chiffres pouvons écrire avec les chiffres 1, 2 et 3 **si la répétition est permise ?**

Faisons une liste :

111	112	113	121	122	123	131	132	133
211	212	213	221	222	223	231	232	233
311	312	313	321	322	323	331	332	333

b) Si la répétition n'est pas permise ?

c) Combien de **numéros à 3 chiffres** pouvons-nous écrire avec les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 si la répétition n'est pas permise ?

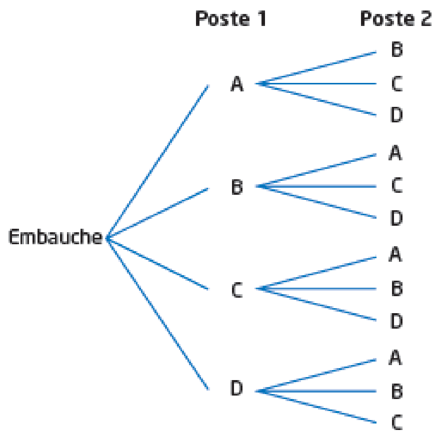
d) Combien de **codes à 3 chiffres** pouvons-nous écrire avec les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 si la répétition n'est pas permise ?

Exemple 7 :

a) Combien y a-t-il de possibilités de plaques d'immatriculation au Manitoba ?

b) Combien y a-t-il de possibilités de plaques d'immatriculation au Manitoba s'ils doivent commencer par un M et terminer par un 7 ?

Exemple 8 :
La gérante d'un grand magasin a retenu quatre candidats pour combler deux postes différents. Combien de résultats possibles y a-t-il ?



Combien de positions y-a-t-il ?
Et combien d'options par positions ? Est-ce que les personnes peuvent occuper deux postes ?

Exemple 9 :
Henry a 10 disques compacts dans sa collection. De combien de façons peut-il choisir 3 de ces disques compacts ?

Exemple 10 :
Une pizzeria offre les choix suivants :

- 3 types de croûtes
- 2 types de sauces
- 5 types de fromages
- 6 types de garnitures de viande
- 8 types de garnitures de légumes

Charles aimerait faire une pizza en choisissant un aliment dans chaque catégorie. Détermine combien de pizzas différentes peuvent être faites.

Exemple 11 :
Vous êtes allés pour souper avec votre famille. Vous pouvez choisir :
- un salade parmi un caesar, house et greek
- un viande parmi le poulet, le bœuf, le saumon, le pasta
- et un dessert parmi un gateau au chocolat, un cheesecake

Combien de possibilités de repas avez-vous ?

Exemple 12 :

a) De combien de façons un enseignant peut-il ordonner **quatre filles et trois garçons** dans une rangée de sept places, s'il doit y avoir un garçon à chaque extrémité de la rangée ?

b) Combien existe-t-il de permutations d'une rangée composée de 4 filles et 3 garçons s'il doit avoir deux personnes du même sexe aux extrémités.

Il y a 2 cas !!!

Cas 1 : Les filles aux extrémités OU Cas 2 : Les garçons aux extrémités

Leçon 2 : La Notation Factorielle

A) Développe la Notation Factorielle et Évalue :

Représentation concise du produit de nombres **naturels strictement <u>positifs</u>**, **<u>consécutifs</u>** et **<u>décroissants</u>** (on soustrait une unité chaque fois) :

Alors (-2)! N'est pas possible !!! et 0 ! = 1

4! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24
6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 720

n! = n(n – 1)(n – 2)(n – 3)….
(n + 3)! = (n + 3)(n + 2) (n + 1)(n)!
(n – 2)! = (n – 2)(n – 3)(n – 4)….

Exemple 1 :

a) Développe 8!

b) Développe et évalue 8 !

Avec la Calculatrice Graphique :

5! = 5 ➔ $\boxed{\text{MATH}}$ ➔ PRB ➔ 4 : ! ➔ $\boxed{\text{ENTER}}$ = 120

Exemple 2 :
Évalue les expressions suivantes.

a) 10!

b) 5! X 6!

B) Simplifier la Notation Factorielle.

$$\frac{7!}{4!} = \frac{(7)(6)(5)\cancel{(4)}\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}{\cancel{(4)}\cancel{(3)}\cancel{(2)}\cancel{(1)}}$$

Exemple 3 :
Simplifier et évalue les expressions.

a) $\frac{12!}{9!3!}$

b) $\frac{5!x\ 6}{6!2!}$

Exemple 4 :

Simplifie l'expression, quand $n \epsilon N$. N* veut dire quoi ?

a) $\frac{(n+3)(n+2)!}{(n+4)!}$ b) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$ C) **Évalue :** $\frac{100\,!}{98\,!}$

Exemple 5:

Quand (n + 3)(n+2)! est multiplié par (n + 4) puis divisé par (n + 2)!, quel est le résultat ?

C) Résous les équations comportant la notation factorielle

Exemple 6 :

Résous les équations factorielles.

a) $\frac{(n+1)!}{n!} = 10$ b) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} = 8$

c) Résous $\frac{n!}{(n-2)!} = 90, quand\ n\epsilon\ Z.$

Leçon 3 Les Permutations :

- Une suite ou un groupe ordonné de tous les éléments ou d'une partie des éléments d'un ensemble.
- Par exemple, les permutations possibles des lettres A, B et C sont ABC, ACB, BAC, BCA, CAB et CBA

A) Introduction à la formule de Permutation

La notation $_nP_r$ représente le nombre de permutations, ou d'éléments ordonnés, de « r » éléments pris dans un ensemble de n éléments distincts.

Tu veux choisir 3 éléments d'un groupe de 7.

$$_7P_3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 210$$

Il y a 210 résultats possibles.

$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

n = le nombre d'élément (objets) total

r = le nombre d'élément utiliser.

À noter : On ne peut PAS avoir *r* plus grand que *n* : IMPOSSIBLE. Pourquoi ?

Exemple 1 :

a) Nous voulons placer no figurines de Star Wars sur une étagère. Nous avons à placer. Han Solo, Chewbacca, Luke, Leia, Darth Vader et l'Empereur. Combien de façons y a-t-il de placer les figurines ? (Utilise le principe de dénombrement)

_____ _____ _____ _____ _____ _____

Il y a 6 positions pour les figurines (6 tâches)

Nous avons 6 options pour la position 1.

Combien sont pour la 2e position ?

Continuons avec les autres positions.

On peut utiliser une formule de permutation aussi !

b) Refait avec les permutations.

c) Prenons nos 6 figurines de Star Wars. Cette fois, ton ami te demande d'ordonner quatre figurines préférées en ordre. Combien de façons existe-t-il de faire ceci ?

Exemple 2 :
Combien de possibilités de tenues différents y-a-t-il ?

ORDRE et les Rôles sont importants pour les Permutations !!!

Exemple 3 :
Combien Mélissa, Nicole et François peuvent-ils former de files différentes quand ils font la queue à la caisse d'un restaurant ?

Mélissa, Nicole, François ou Mélissa, François, Nicole

Nicole, Mélissa, François ou Nicole, François, Mélissa

François, Mélissa, Nicole ou François, Nicole, Mélissa

$${}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(3-2)!}$$

$${}_{3}P_{2} = \frac{3!}{(1)!} = \frac{3\ x\ 2\ x\ 1!}{1!} = 6$$

Exemple 4 :
Henry a 10 disques compacts dans sa collection. De combien de façons peut-il choisir 3 de ces disques compacts ?

Exemple 5 :
Vous voulez créer un play liste avec la musique de Ariana Grande sur votre Ipod. Vous voulez choisir 6 chansons parmi les 9. Combien de possibilités avez-vous ?

Exemple 6 :
Combien de **codes** de quatre chiffres pouvez-vous former avec les chiffres de 0 à 9
a) Si la répétition est permise ? b) Si la répétition n'est pas permise ?

Exemple 7 :

Dans une classe de 10 élèves, certains disent qu'ils veulent jouer le jeu ***Bourrique***. Dans ce jeu, il y a une bourrique, un trésorier, une secrétaire, un vice-président et un président. Combien de façons peut-on débuter ce jeu ?

Exemple 8 :

L'entraîneur loue une camionnette et conduit son équipe à une course. Calcule le nombre de façons dont les élèves peuvent être assis s'il y a 9 sièges passagers.

B) Résous les équations de permutations

Exemple 8 :

Résous.

a) $2({}_nP_2) = 60$

b) ${}_8P_r = 56$

Leçon 4 : Permutations d'objets identiques

Examine les deux mots BRIE et RIRE. De quelle façon le nombre de façons de disposer les 4 lettres de chaque mot diffère-t-il ? Pourquoi ?

BRIE, BREI, BIRE, BIER, BEIR, BERI, IBRE, IBER, IRBE, IREB, IERB, IEBR, EBIR, EBRI, EIBR, EIRB, ERBI, ERIB, RBIE, RBEI, RIBE, RIEB, REBI, REIB Il y a 4!, soit 24 arrangements possibles.	RIRE, RERI, IRRE, IERR, IRER, ERRI, EIRR, ERIR, RRIE, RREI, RIER, REIR Il y a 12 arrangements possibles.

Examine le nombre de façons d'ordonner les quatre lettres du mot *polo*.

polo pool opol oopl oolp oplo olpo olop ploo lpoo lopo loop
polo pool opol oopl oolp oplo olpo olop ploo lpoo lopo loop

Le nombre de permutations possibles quand deux des quatre lettres sont identiques est égal à $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2}$ ou 12. Pourquoi divises-tu par 2!?

$$P = \frac{n!}{a!b!c!\ldots}$$

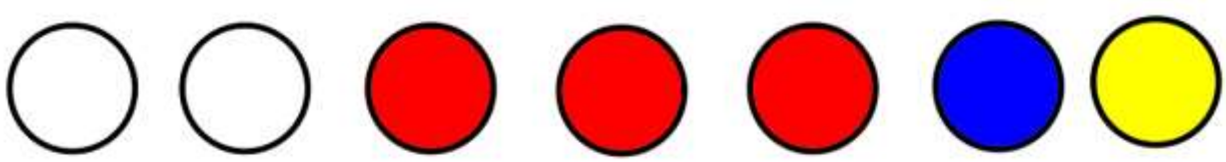
1) Nombre d'élément/objet total
2) Divise par le nombre d'élément qui sont identiques (repéte) (et combien de fois il répète)

A) Permutations des Objets/Éléments qui sont identiques

Exemple 1 :

Tom range la vaisselle après le souper. En plus de ranger les bols, les tasses et les couverts, il doit empiler les sept grandes assiettes. Trois d'entre elles sont rouges et identiques, deux d'entre elles sont blancs et identiques, tandis que les deux autres sont bleu et jaune.

Supposons que Tom doit empiler ces assiettes : De combien de façons différentes Tom peut-il empiler les sept assiettes pour les ranger dans l'armoire ?



Exemple 2 :

Une équipe de hockey a un dossier de 10 victoires, 5 défaites et 3 parties nulles en 18 matchs. De combien de façons ce dossier a-t-il pu se constituer ?

Soit A, le nombre d'arrangements des 18 matchs :

Exemple 3 :
Dans les régions montagneuses de l'Inde, de la Chine, du Népal et du Bhoutan, on voit couramment des drapeaux à prière. Il y a une prière sur chaque drapeau, dont la couleur symbolise des éléments différents : vert (l'eau), jaune (la terre), blanc (l'air/le vent), azur (le cien/l'espace) et rouge (le feu).

Combien Dorji peut-il faire d'arrangements différents de la même prière en utilisant ces 9 drapeaux : 1 vert, 1 jaune, 2 blancs, 3 azur et 2 rouges ?

Soit A, le nombre d'arrangements de 9 drapeaux :

Exemple 4 :
Un navire est en trouble sur l'océan. Il n'a que des drapeaux à placer sur l'eau pour envoyer son message. Les 6 drapeaux sont :

bleu, bleu, jaune, rouge, rouge, rouge

De combien de façons est-ce qu'il peut envoyer son code ?

B) Les Mots avec des lettres identiques

Exemple 5 :
Combien d'arrangements possibles des lettres de nom BREANNE ?

Exemple 6 :

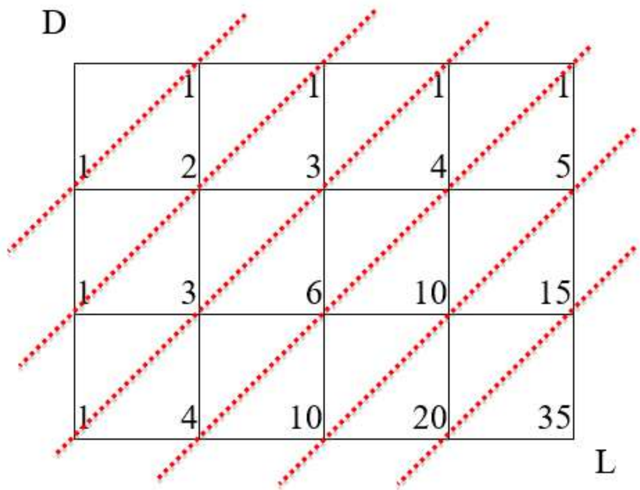
a) De combien de façons les lettres du mot CANADA peuvent-elles être disposées

b) De combien de façons les lettres du mot CANADA peuvent-elles être disposées si la première et la dernière lettre doivent être respectivement N et C ?

c) La première lettre doit être A.

C) Les Routes pour un tableau (des directions spécifiques)

Exemple 7 :
Darlene veut se rendre chez Lucille.



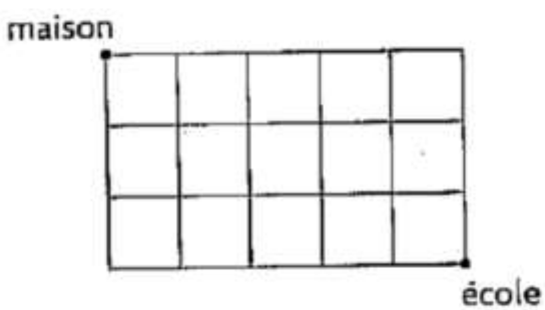
On additionne les nombres le long des lignes diagonales.

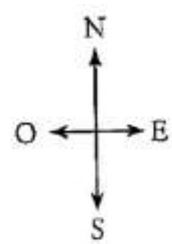
OU
4 block horizontal + 3 vertical = 7 block en total Alors :

$$\frac{7!}{4!3!} = 35$$

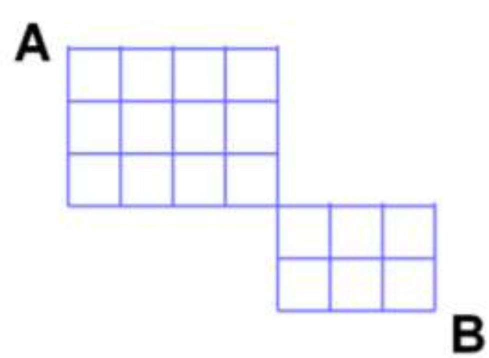
Exemple 8 :
Résoudre un problème comportant des permutations et des trajets

a) de la maison à l'école

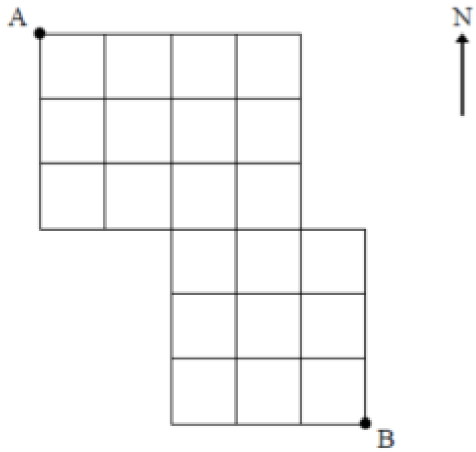




Exemple 9 :
Combien de trajets mènent du point A au point B si tu peux te déplacer seulement vers la droite ou vers le bas ?

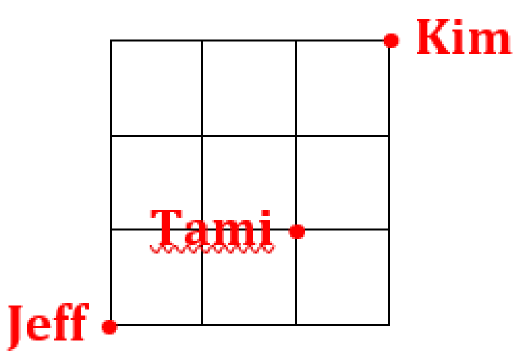


Exemple 10:
Détermine le nombre de chemins qu'on peut emprunter pour se rendre du point A au point B si on ne peut aller que vers le sud ou vers l'est. Montre ton travail

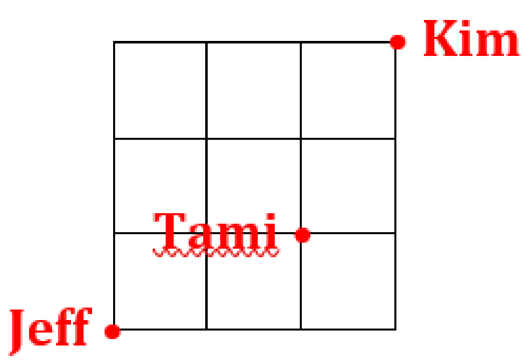


Exemple 11 :

À Grand Beach, une section des rues est numérotée de 1 à 5 (rue) et de 1 à 5 (avenue). Kim habite au coin de 1^{e} rue et 1^{e} avenue. Son chum, Jeff, a un chalet au coin de 4^{e} rue et 4^{e} avenue. Si elle prend son vélo et conduit seulement vers le sud ou l'ouest.
a) Combien de différentes façons peut-elle se rendre chez Jeff ?



b) Tami a un chalet au coin de 2^{e} rue et 3^{e} avenue. Si Kim veut ramasser son amie en route, combien de routes possibles peut-elle prendre ?



Leçon 5 : Permutations d'objets distincts/Groupes

A) Permutations d'éléments avec les cas spécifiques

Exemple 1 :

Tessy doit inventer un mot de passe pour un site Web de réseautage où elle est inscrite. Le mot de passe peut comporter les chiffres 0 à 9, les lettres A à Z, **ou les deux**. Comme les caractères sont sensibles à la casse, Tessy peut utiliser les lettres minuscules ou majuscules. Le mot de passe doit comporter au **moins 5 caractères et au plus 7 caractères**, et chaque caractère ne peut être utilisé qu'une seule fois.

Combien de mots de passe différents peuvent être créés ?

Exemple 2 :

Combien de nombres pairs **supérieurs** à 300 peux-tu former à l'aide de trois chiffres pris parmi 1, 2, 3, 4, 5 et 6 ? Aucun chiffre ne doit se répéter.

Cas 1 : Les nombres sont pairs et commencent par 3 ou 5

Dans ce cas, il y a deux choix pour le premier chiffre, 3 et 5.

Les nombres sont pairs ; donc, il y a trois choix pour le troisième chiffre.

Nombre de choix pour le 1^er chiffre	Nombre de choix pour le 2^e chiffre	Nombre de choix pour le 3^e chiffre
2	4	3

$$\text{Nombre de possibilités} = 2(4)(3) = 24$$

Cas 2 : Les nombres sont pairs et commencent par 4 ou 6

Dans ce cas, il y a deux choix pour le premier chiffre, 4 et 6.

Les nombres sont pairs ; donc, il reste deux choix pour le troisième chiffre.

Nombre de choix pour le 1^er chiffre	Nombre de choix pour le 2^e chiffre	Nombre de choix pour le 3^e chiffre
2	4	2

$$\text{Nombre de possibilités} = 2(4)(2) = 16$$

La réponse finale est la somme des possibilités des deux cas.

Il y a 24 + 16, ou 40 nombres pairs de 3 chiffres supérieurs à 300.

B) Permutations d'éléments d'un groupe

Exemple 3 :

7 élèves de la classe de mathématique vont s'assoir en rangée en avant de la classe.

a) Combien de différentes façons est-ce que les 7 étudiants peuvent s'assoir ?

b) Combien de différents façons est-ce que Brenna et Amandine peut s'assoir ensemble.

______ Combien de façons est-ce que Brenna et Amandine peut s'assoir ensemble ?

______ Combien d'étudiant sont de reste qui n'ont pas besoin de s'assoir ensemble ?

______ Combien de groupes y-t-il de reste qui vont être permuté (arrangé)?

____ ____ # d'éléments dans un groupe ensemble ! x # de groupe d'éléments arrangés
OU Permutation

Exemple 4 :

Cinq personnes (Billy, Sammy, Joe, Manuel, Drew) s'assoient sur un banc. De combien de façons peuvent-elles se placer si :

a) Si Joe s'assoit au milieu ?

b) Billy et Sammy s'assoient côté à côté ?

c) Billy et Sammy ne s'assoient pas côté à côté ?

Exemple 5 :

a) Un groupe de 6 amis va à un concert. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir le long d'une rangée si Ben et Blanca doivent être l'une à côté de l'autre ? Montre ton travail. (240)

b) Un groupe de 6 amis va à un concert. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir le long d'une rangée si Ben et Blanca doivent être l'une à côté de l'autre à chaque bout ? Montre ton travail. (96)

Exemple 6 :
Soit une affiche de français, deux de mathématiques et trois de sciences. De combien de façons peuvent-elles être ordonnées en rang :
a) Si les deux affiches de mathématiques sont côté à côté à l'une ou l'autre des extrémités ? (96)

b) Si les trois affiches de sciences sont côté à côté ? (144)

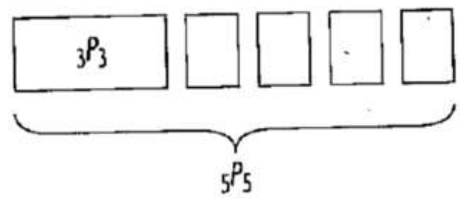
c) Si les trois affiches de sciences ne sont pas toutes ensemble ? (576)

Exemple 7 :
Dans une classe de sciences, un prof a 6 textes de Biologie, 4 textes de Chimie et 3 textes de Physique. Combien de façons pourrait-on les arranger sur une étagère si chaque matière doit rester ensemble ?

Exemple 8 :
Nous avons 4 livres de physique, 3 livres de mathématique et 8 livres de Calvin et Hobbes. Combien de façon pouvons-nous placer 2 livres de chaque sorte sur une étagère si les livres de même sorte doivent être côté à côté.

Exemple 9 :
Chez un vendeur de véhicules d’occasion, sept autos différentes seront en montre le long de la rue.
a) Les trois autos rouges doivent être stationnées de manière qu’il y en ait une à chaque extrémité et une exactement au milieu. De combien de façons les sept autos peuvent-elles être stationnés ?

b) Les trois autos rouges doivent être stationnées l’une à côté de l’autre. De combien de façons les sept autos peuvent-elles être stationnées ?



c) De combien de façons les sept autos peuvent-elles stationnées si les trois rouges doivent être stationnées côte à côte et si les quatre autres doivent aussi être stationnées côte à côte

C) Les permutations circulaires

Le nombre de permutations de n éléments dans un cercle est (n – 1) !

Ex : 6 personnes sont assises en cercle. Combien de différents arrangements peuvent-ils s’assoir ?

Exemple 10 :
On place 4 clés sur un anneau. Combien de différentes façons y a-t-il de placer ces clés ?

Exemple 11 :

A, B, C, D, E et F sont assis en cercle, combien de possibilités y-a-t-il si A et C ne peuvent pas s’assoir ensemble ?

Leçon 6 : Exploration des Combinaisons

Combinaison :

Lorsqu'on calcule le nombre de combinaisons possibles, on ne considère plus l'ordre des objets, mais combien de façons qu'on peut faire des « sous-groupes ».

Groupement d'objets dans lequel l'ordre n'a pas d'importance. Par exemple, il n'y a aucune combinaison possible des objets a et b parce que ab équivaut à ba. Un groupe de personnes sera un exemple.

$${}_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad \textbf{Ou} \qquad nCr = \binom{n}{r}$$

Exemple : Choisir un groupe avec Josée, Juan et Julio d'un groupe de 5 personnes sera le même groupe que si on choisit Juan, Josée et Julio.

A) Combinaisons d'objets

Exemple 1 :
a) Katie, Kiara, Lauren, Agnessa et Easton sont en classe. Le prof a besoin d'aide pour transporter des boîtes. S'il choisit 4 des 5 élèves, combien de façons peut-il choisir ?

b) Si on choisit 2 des 5 élèves, combien de façons peut-il choisir ?

Exemple 2 :
Il y a 12 chiens dans le refuge pour animaux de la ville. Pour accroître les probabilités d'adoption, 3 de ces chiens seront en vedette dans une émission de télé du matin. De combien de façons la sélection de 3 des 12 chiens peut-elle se faire pour l'émission ?

Exemple 3 :
Pour la loterie 6/49, on choisit 6 numéros parmi les numéros de 1 à 49. Combien de billets avec des combinaisons différentes peut-on acheter ?

Exemple 4 :
Dans un jeu de Cribbage, combien de façons peut-on recevoir une main de 6 cartes qui ont :
(N'oubliez pas il y a 52 cartes dans un jeu de cartes (4 suites de cartes))

a) les quatre 5 ?

b) aucune restriction ?

c) exactement deux 7 et deux 8 ?

d) exactement 5 ♥ ?

e) exactement 3 cœurs et 2 trèfles et 1 pique ou exactement 3 trèfles et 1 trèfle et 2 piques

Exemple 5 :

a) Un restaurant offre 10 saveurs de crème glacée. Danielle a commandé une grosse coupe glacée à 3 boules. Parmi combien de combinaisons différentes de crèmes glacées Danielle peut-elle choisir si elle veut que chaque boule ait une saveur différente et l'ordre n'a pas d'importance ?

b) La saveur préférée de Danielle est le chocolat. Si une boule de sa coupe glacée doit être au chocolat et que les autres doivent être de saveurs différentes, combien de combinaisons de crème glacée sont possibles ?

Exemple 6 :
Rianna passe un examen de géographie. Selon les consignes, elle doit répondre à un certain nombre de questions de chaque section. Combien de possibilités s'offrent à Rianna si elle doit répondre :

a) À deux des quatre questions de la partie A et à trois des cinq questions de la partie B ?

b) À deux des quatre questions de la partie A et à au moins quatre des cinq questions de la partie B ?
L'expression « au moins quatre » signifie que Rianna peut répondre à quatre ou à cinq questions de la partie B. Alors il y a deux cas !

B) Combinaisons pour former des comités sans et avec restrictions

Exemple 7 :

Chaque année durant le Festival du Voyageur, qui se tient en février à Winnipeg, les écoles secondaires se font compétition lors du Concours de sculpture sur neige du Voyageur.

Cette année, l'école de Hayley présentera une équipe de 3 élèves; 9 élèves se sont proposés pour faire partie de l'équipe. De combien de façons les 3 membres de l'équipe de sculpture sur neige peuvent-ils être choisis pour représenter l'école de Hayley parmis les 9 élèves qui ont proposé leurs services ?

Exemple 8 :

Dans un groupe de 12 élèves (3 filles et 9 garçons), combien de comités de 4 élèves peut-on former si on veut :

a) exactement 3 gars ?

b) exactement 2 filles ?

c) aucun gars ?

d) aucune fille ?

e) doit avoir Ben ?

f) doit avoir Bill et Betty ?

g) Fred ou Harry, mais pas les deux ?

Exemple 9 :

Il y a 12 filles et 18 garçons dans une classe de 12^{e} année. La directrice de l'école souhaite rencontrer un groupe de 5 élèves pour discuter de la cérémonie de remise des diplômes.

a) Combien de groupes possibles y a-t-il ?

b) Combien de groupes possibles y a-t-il composés de deux filles et de trois garçons ?

c) Anya est une élève de la classe. Combien de groupes possibles y a-t-il composés d'Anya, d'une autre fille et de trois garçons ?

3 garçons et 1 filles de les 11 filles de restent et Anya

Exemple 10 :

Il faut former un comité de planification pour un programme du Jour de la Terre institué à l'école. Il y a 13 bénévoles : 8 enseignants et enseignantes et 5 élèves. De combien de façons le directeur de l'école peut-il choisir un comité de 4 personnes comprenant au moins 1 enseignant ?

DIRECT (Solution de Jérémie)
Additionne toutes les possibilités voulues ensembles

Cas 1 : 1 enseignant et 3 élèves

Cas 2 : 2 enseignants et 2 élèves

Cas 3 : 3 enseignants et 1 élève

Cas 4 : 4 enseignants et aucun élève

INDIRECT (Solution de Sylvie)
Total – ce qui n'est pas voulu = ce qui est voulu

Nombre de comités sans conditions

Nombre de comités comprenant 0 enseignants et 4 élèves

Nombre de comités comprenant au au moins 1 enseignant.

C) Simplifie et Résous les Combinaisons

Exemple 11 :
Résous.

$${}_{n+1}C_{n-1} = 15$$

Exemple 12:
Simplifier des expressions et résoudre des équations comportant des combinaisons

a) Réécris $\dfrac{{}_{n}C_{5}}{{}_{n-1}C_{3}}$ à l'aide de factorielles, puis simplifie l'expression.

Leçon 7 : Permutations ou Combinaisons

Exemple 1 :

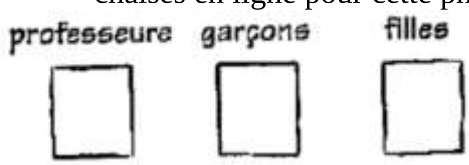
Il y a cinq nageuses dans la première épreuve d'une compétition : Audrey, Béatrice, Camille, Diane et Ella.

a) De combien de façons les première, deuxième et troisième place pourraient-elles être réparties entre les cinq nageuses ?

b) De combien de façons les cinq nageuses peuvent-elles se qualifier pour la finale si les trois premières se qualifient ?

Exemple 2 : Résoudre un problème comportant des permutations et des conditions.

a) Une professeure de piano et ses élèves font prendre une photo de groupe. Il y a trois garçons et cinq filles. Le photographe veut faire asseoir les garçons ensemble et les filles ensemble pour l'une des photos. De combien de façons les élèves et la professeure peuvent-ils s'asseoir sur 9 chaises en ligne pour cette photo ?



b) Combien de façons les élèves et la professeure peuvent-ils s'asseoir sur 9 chaises en ligne pour cette photo si Luke et Sandra ne peuvent pas s'asseoir l'un à côté de l'autre ?

Exemple 3 : Résoudre un problème comportant des combinaisons et des choix multiples.

Les problèmes comportant des combinaisons sont courants en informatique. Supposons qu'il faut disposer un ensemble de 10 données différentes, représentées par {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, entre 4 cellules mémoires différentes d'un ordinateur. Il faut mettre 3 données dans la première cellule, 4 données dans la deuxième, 2 données dans la troisième et 1 donnée dans la quatrième. De combien de façons les 10 données peuvent-elles être réparties dans les 4 cellules mémoires ?

Exemple 4 : Résoudre un problème comportant des combinaisons et des cas

Combien de mains différentes de 5 cartes comportant au plus 1 carte noire peuvent être données à partir d'un jeu de cartes ordinaires ?

Leçon 8 : Le Théorème du binôme de Newton

A) Le Triangle Pascal et le binôme de Newton

a) $(x + y)^2$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2;$$

b) $(x + y)^3$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3;$$

c) $(x + y)^4$

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$(a + b)^n$ a : premier terme du binôme
b : deuxième terme du binôme
n : exposant du binôme qui vous donne de l'information importante! $n \in$ N*

- Le développement du binôme aura a^n comme premier terme et b^n comme dernier terme
- L'exposant du premier terme « a » diminue de 1 à chaque terme (les puissances des variables diminue) et l'exposant de « b » augmente de 1 (les puissances des variables augmentent).
- Il y a toujours « n + 1 » termes dans le développement. (1 de plus que l'exposant avec le binôme)
- L'exposant du binôme est égal à la somme des exposants de chaque terme individuel dans le développement.

Comment trouver les coefficients de $(x + y)^4$

n = 4 alors combien de termes va le développement avoir ? _____

t1 t2 t3 t4 t5
${}_4C_0 = 1$, ${}_4C_1 = 4$, ${}_4C_2 = 6$, ${}_4C_3 = 4$, ${}_4C_4 = 1$

N'oubliez pas !!! Le coefficient du 1^er^ terme est ${}_4C_0 = 1$, donc on utilise la valeur de 0 pour le 1^er^ terme et 1 pour le 2^e^ terme, etc…

Exemple 1 :
Développe $(x + y)^5$ utilisant le théorème de binômes

Binôme	Triangle de Pascal sous la forme de développements de binôme	Rangée
$(x+y)^0$	1	1
$(x+y)^1$	$1x + 1y$	2
$(x+y)^2$	$1x^2 + 2xy + 1y^2$	3
$(x+y)^3$	$1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$	4
$(x+y)^4$	$1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$	5

Trouve les prochains 4 rangées !!

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Trouve la connexion entre le triangle de Pascal et le théorème du binôme.

Ex : Développe $(p + q)^6$. **n = 6 alors il y a 6 + 1 terme (7 termes)**

$$
\begin{aligned}
(p+q)^6 &= 1(p)^6(q)^0 + 6(p)^5(q)^1 + 15(p)^4(q)^2 + 20(p)^3(q)^3 + 15(p)^2(q)^4 \\
&\quad + 6(p)^1(q)^5 + 1(p)^0(q)^6 \\
&= p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3 + 15p^2q^4 + 6pq^5 + q^6
\end{aligned}
$$

Les coefficients des termes sont identiques aux nombres de la $(n + 1)^e$ rangée du triangle Pascal.

Exemple 2 :
Trouve le coefficient numérique de 6^e terme du développement du binôme $(x + y)^7$.

Explique dans quelle situation le Triangle de Pascal ne te donnerait pas le coefficient de chaque terme 6

Truc!!!

Au lieu d'utiliser les coefficients du triangle Pascal, il y a une formule qui peut être utiliser !!!

La formule de binôme de Newton!

B) Le binôme de Newton est dénoté par $(a + b)^n$

Tu peux aussi déterminer les coefficients du développement d'un binôme.

Triangle de Pascal	Combinaisons
1	$_0C_0$
1 1	$_1C_0$ $_1C_1$
1 2 1	$_2C_0$ $_2C_1$ $_2C_2$
1 3 3 1	$_3C_0$ $_3C_1$ $_3C_2$ $_3C_3$
1 4 6 4 1	$_4C_0$ $_4C_1$ $_4C_2$ $_4C_3$ $_4C_4$
1 5 10 10 5 1	$_5C_0$ $_5C_1$ $_5C_2$ $_5C_3$ $_5C_4$ $_5C_5$

Binôme de Newton :

- Une formule qui permet de développer $(x + y)^n$, oû n∈ N*
- Chaque terme du développement est de la forme $_nC_k(x)^{n-k}(y)^k$, où k + 1 est le rang du terme.

$$t_{k+1} = {_nC_k} a^{n-k} b^k$$

k = 1 unité de moins que le nombre de terme :

Ex : Le 12^e^ terme (t_{12}) veut dire que k = 11

À l'aide du binôme de Newton, développe $(x + y)^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$(x+y)^n = {_nC_0}(x)^n(y)^0 + {_nC_1}(x)^{n-1}(y)^1 + {_nC_2}(x)^{n-2}(y)^2 + \cdots + {_nC_{n-1}}(x)^1(y)^{n-1} + {_nC_n}(x)^0(y)^n$$

Exemple 3 :
Développer un binôme $(p + q)^6$ avec la formule.

$$(p + q)^6 = {}_6C_0(p)^6(q)^0 + {}_6C_1(p)^5(q)^1 + {}_6C_2(p)^4(q)^2 + {}_6C_3(p)^3(q)^3 + {}_6C_4(p)^2(q)^4 + {}_6C_5(p)^1(q)^5 + {}_6C_6(p)^0(q)^6$$
$$= p^6 + 6p^5q + 15p^4q^2 + 20p^3q^3 + 15p^2q^4 + 6pq^5 + q^6$$

Montre que ${}_6C_4 = 15$. Comment la symétrie t'aide-t-elle à déterminer les termes?

Exemple 4 :
À l'aide du binôme de Newton, développe $(2a – 3b)^4$.

$$(2a - 3b)^4$$
$$= {}_4C_0(2a)^4(-3b)^0 + {}_4C_1(2a)^3(-3b)^1 + {}_4C_2(2a)^2(-3b)^2 + {}_4C_3(2a)^1(-3b)^3 + {}_4C_4(2a)^0(-3b)^4$$
$$= 1(16a^4)(1) + 4(8a^3)(-3b) + 6(4a^2)(9b^2) + 4(2a)(-27b^3) + 1(1)(81b^4)$$
$$= 16a^4 - 96a^3b + 216a^2b^2 - 216ab^3 + 81b^4$$

Quelle régularité remarques-tu dans les signes des termes?

Exemple 5 :
Quel est le troisième terme du développement de $(4b – 5)^6$?

Les coefficients du développement de $(4b - 5)^6$ suivent la régularité ${}_6C_0$, ${}_6C_1$, ${}_6C_2$, ${}_6C_3$, …

Le coefficient du troisième terme contient ${}_6C_2$.

Pourquoi le coefficient du troisième terme ne contient-il pas ${}_6C_3$?

Dans le terme général $t_{k+1} = {}_nC_k(x)^{n-k}(y)^k$, remplace x par $4b$, y par -5, n par 6 et k par 2.

$$t_3 = {}_6C_2(4b)^{6-2}(-5)^2$$
$$= \frac{6!}{4!2!}(4b)^4(-5)^2$$
$$= (15)(256b^4)(25)$$
$$= 96\ 000b^4$$

Le troisième terme du développement de $(4b - 5)^6$ est $96\ 000b^4$.

Exemple 6 :
Trouve le 9e terme dans le développement du binôme $(x – 2)^{12}$.

Exemple 7 :
Trouve le 4^e terme dans le développement du binôme.

$$\left(x + \frac{1}{2x^2}\right)^9$$

C) Cas spécifique

Méthode 1 : Avec la formule

Exemple 8 :
Trouve le terme qui contient x^4 dans le développement du binôme

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{11}$$

- On sait que le terme qu'on cherche est tk+1.
- On sait que ce terme aura x^4 comme variable
- Le coefficient numérique ne fait pas de différence (un coefficient n'influence pas la réponse de la puissance d'une variable.

Alors :

$$t_{k+1} = {}_nC_k a^{n-k} b^k$$

$$x^4 = (x^2)^{n-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k$$

* le numérateur de 2 pour le deuxième terme n'a pas d'influence sur la réponse.

NB : Pour changer le signe (+ ou -) d'une puissance on inverse la fraction :

Ex : $\mathbf{x^{-3} = \frac{1}{x^3}}$

En substituant tous dans la formule vous allez être capable de trouver la valeur de k, ensuite faire k + 1 pour trouver le terme. **(NB : k doit être un nombre entier positif, tu ne peux pas avoir un terme décimal.)**

Méthode 2 : Avec le patron

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{11}$$

$t_1 \longrightarrow$

$t_2 \longrightarrow$

$t_3 \longrightarrow$

$t_4 \longrightarrow$

$t_5 \longrightarrow$

.

.

$t_{12} \longrightarrow$

Exemple 9 :

Dans le développement de $\left(a^2 - \frac{1}{a}\right)^5$, quel terme sous forme simplifiée contient « a » ? Détermine la valeur de ce terme.

Méthode 1 :

$a = {}_5C_k(a^2)^{5-k}(a^{-1})^k$

$a^1 = a^{10-2k}\,(a^{-k})$

$1 = 10 - 2k + -k$

$-9 = -3k$

$3 = k$

$t_{3+1} = t_4$

Alors le 4^{e} terme

$t_4 = {}_5C_4(a^2)^{5-4}(a^{-1})^4$

$t_4 = -10a$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned}\left(a^2 - \frac{1}{a}\right)^5 &= {}_5C_0(a^2)^5\left(-\frac{1}{a}\right)^0 + {}_5C_1(a^2)^4\left(-\frac{1}{a}\right)^1 + {}_5C_2(a^2)^3\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + \cdots \\ &= {}_5C_0a^{10} + {}_5C_1(a^8)\left(-\frac{1}{a}\right) + {}_5C_2a^6\left(\frac{1}{a^2}\right) + \cdots \\ &= {}_5C_0a^{10} - {}_5C_1a^7 + {}_5C_2a^4 + \cdots\end{aligned}$$

Diminue par a^3, alors t_3 aura « a ».

Exemple 10 :

Trouve la constante dans le développement du binôme

$$\left(3a - \frac{1}{a}\right)^{18}$$

Constante : Le terme sans variable (seulement un coefficient), donc a^0.

$$a^0 = (a)^{18-k}\left(\frac{1}{a}\right)^k$$

Il y a 19 terme ici alors une question pourrait aussi vous demander de trouver le terme au milieu. Dans cette question le terme au milieu sera le 10^e terme.

Exemple 11 :

Trouve la valeur de « n » si le 5^e terme dans le développement du binôme $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^n$ est $280x^2$.

NB : On peut simplement travailler avec la variable et son exposant.

Exemple 12 :

Trouve la valeur de m si le 10e terme du développement du binôme $(2x + mx^2)^{11}$ est $-112640x^{20}$.

Ici on a seulement besoin de travailler avec les coefficients parce la variable avec une puissance ne va pas influencer la réponse d'un coefficient, « m » dans ce cas.