

Leçon 4 : Les Séries (somme) géométriques

Une série géométrique est une expression qui représente la somme des termes d'une suite géométrique.

Série géométrique :

- La somme des termes d'une suite géométrique.
- Par exemple, la Série $3 + 6 + 12 + 24$ est géométrique.

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

1. Quelle est la somme des 7 premiers termes de la série $6 + 12 + 24 + \dots$

$t_1 = 6$
 $r = 2$
 $S_7 = \frac{6(2^7 - 1)}{2 - 1}$
 $S_7 = 762$
 $S_7 = 6(127)$

2. Détermine la somme des séries géométriques dont le nombre de termes n'est pas connu.

a) $1/27 + 1/9 + 1/3 + \dots + 729$

b) $4 - 16 + 64 - \dots - 65536$

$t_1 = 1/27$
 $r = 3$
 $t_n = t_1 r^{n-1}$
 $729 = \frac{1}{27} \cdot 3^{n-1}$
 $19683 = 3^{n-1}$
 $3^9 = 3^{n-1}$
 $9 = n-1$
 $10 = n$
 $S_{10} = \frac{1}{27} \frac{(3^{10} - 1)}{3 - 1}$
 $S_{10} = \frac{59048}{54}$

$t_1 = 4$
 $r = -4$
 $S_8 = \frac{4(-4^8 - 1)}{-4 - 1}$
 $-65536 = 4 \cdot (-4)^8$
 $-16384 = -4^7$
 $(-4)^7 = (-4)^{n-1}$
 $7 = n-1$
 $n = 8$
 $S_8 = \frac{4(65535)}{-5}$
 $S_8 = -52428$

3. Dans une SG : $t_4 = 30$ et $t_9 = 960$, calcule la somme des neuf premiers termes.

$30 = t_1 r^3$
 $960 = t_1 r^8$
 $\frac{30}{r^3} = t_1$
 $t_1 = \frac{30}{r^3} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4}$
 $960 = \frac{30}{r^3} \cdot r^8$
 $960 = 30 r^5$
 $32 = r^5$
 $r = 2$
 $S_9 = \frac{15}{4} \frac{(2^9 - 1)}{2 - 1}$
 $S_9 = \frac{15 \cdot 511}{4}$

4. Célia s'entraîne pour un marathon. Elle parcourt 25 km la première semaine, puis elle augmente la distance parcourue de 10% chaque semaine. La série $25(1,1)^2 + \dots$ représente cette situation. Célia désire poursuivre cette régularité pendant 15 semaines. Quelle distance totale aura-t-elle parcourue à la fin de la 15e semaine?

$t_1 = 25$
 $r = 1,1$
 $S_{15} = \frac{25(1,1^{15} - 1)}{1,1 - 1}$
 $S_{15} = 794,3120424$

Pratique :

1. Détermine la somme des 10 premiers termes de chaque série géométrique.

a) $4 + 12 + 36 + \dots$

b) $t_1 = 5$, et $r = \frac{1}{2}$

$t_1 = 4$
 $r = 3$

$$S_{10} = \frac{4(3^{10} - 1)}{3 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{4(59048)}{2}$$

$$S_{10} = 118096$$

$$S_{10} = \frac{5 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{10} - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{10} = \frac{5 \left(\frac{1}{1024} - 1 \right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$S_{10} = 5(-1023)$$

$$S_{10} = 10230$$

2. Détermine la somme de chaque série géométrique.

a) $\frac{1}{64} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \dots + 1024$

b) $-2 + 4 - 8 + \dots - 192$

$t_1 = \frac{1}{64}$
 $r = 4$

$1024 = \frac{1}{64} (4^{n-1})$

$65536 = 4^{n-1}$

$4^8 = 4^{n-1}$

$n = 9$

$$S_9 = \frac{1}{64} \frac{(4^9 - 1)}{4 - 1}$$

$$S_9 = \frac{262143}{64} = 4096$$

$$S_{13} = \frac{-2(-2^{13} - 1)}{-2 - 1}$$

$$S_{13} = \frac{16386}{-1} = 16386$$

$$S_9 = \frac{262143}{192} = 1365$$

3. Le Western Scrabble Network est un organisme dont le but est de promouvoir le jeu de scrabble. Toute l'année, il organise des tournois en ligne à l'intention de ses membres. Dans ces tournois, les perdants de chaque ronde sont éliminés et n'atteignent donc pas la ronde suivante. Les gagnants continuent à jouer jusqu'à ce qu'un match final détermine la championne ou le champion. S'il y a 256 personnes inscrites à un tournoi de scrabble en ligne, combien de matchs y aura-t-il en tout durant le tournoi?

$$S_n = \frac{r^n t_1 - t_1}{r - 1}$$

$$S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8 (1) - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1}$$

$$S_n = \frac{-255}{2}$$

$$S_n = 255$$

ou, $t_n = 1$
 $t_1 = 128$
 $r = \frac{1}{2}$

$$1 = 128 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$\frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{n-1}}$
 $n = 8$

$$S_8 = \frac{128 \left(\left(\frac{1}{2} \right)^8 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

$$S_{\infty} = 255$$

4. Une balle est lâchée d'une hauteur de 10 m. Quelle distance parcourt-elle après 6 rebonds sachant qu'elle rebondit au $\frac{3}{4}$ de sa hauteur précédente ?

$10 \cdot \frac{3}{4} = \frac{30}{4}$

$$S_7 = \frac{10 \left(\left(\frac{3}{4} \right)^7 - 1 \right)}{\frac{3}{4} - 1}$$

$$S_7 = \frac{10 \left(\frac{2187}{16384} - 1 \right)}{-\frac{1}{4}}$$

$$S_7 = -34,66064453$$