Leçon 3 : Les suites géométriques (SG)

Suite géométrique :

- Une suite dans laquelle le rapport entre deux termes consécutifs est constant.
- Par exemple, 3, 12, 48.

Raison géométrique :

- Le rapport entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

- Par exemple, la raison géométrique de la suite 2, 4, 8, 16, … est 2

La suite géométrique générale est $t_1, t_1r, t_1r^2, t_1r^3, \ldots$, où t1 est le premier terme et r est la raison géométrique.

$t1 = t1$
$t2 = t_1r$
$t3 = t_1r^2$
$t4 = t_1r^3$ …
$tn = t_1r^{n-1}$

Le terme général d'une suite géométrique où n est un nombre entier positif correspond à
$\mathbf{t_n = t_1r^{n-1}}$

où t1 est le premier terme de la suite,
n est le nombre de termes,
r est la raison géométrique, et
tn est le terme général (ou le n^e terme).

1. Soit la SG : 4, 12, 36, … $r = 3$
a) Donne l'expression du terme général.
b) Calcule t_7.

$t_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

$t_7 = 4 \cdot 3^{7-1}$
$t_7 = 4 \cdot 3^6$
$t_7 = 2916$

2. Soit la SG définie par son terme général : $t_n = (-7)2^{n-1}$ $t_1 = -7$ $r = 2$
a) Calcule les trois premier termes
b) Quelle est la raison de cette SG. $r = 2$

$t_1 = (-7) \cdot 2^{1-1} = -7$
$t_2 = -7 \cdot 2^{2-1}$
$t_2 = -14$
$t_3 = -28$

3. Soit la SG finie : 5, 20, 80, …, 20480.

$20480 = 5 \cdot 4^{n-1}$
$4096 = 4^{n-1}$
$4^6 = 4^{n-1}$
$6 = n-1$
$\boxed{n = 7}$

Combien y a-t-il de termes dans cette suite ? 7 termes

4. Dans une SG : $t_3 = 9$ et $t_6 = 1125$

a) Quel est le premier terme de la suite ?

$9 = t_1 \cdot r^{3-1}$

$9 = t_1 \cdot r^2$

$\frac{9}{r^2} = t_1$

$1125 = t_1 \cdot r^{6-1}$

$1125 = t_1 \cdot r^5$

$1125 = \frac{9}{r^2} \cdot r^5$

$1125 = 9r^3$

$125 = r^3$

$r = 5$

$\frac{9}{(5)^2} = t_1$

$\frac{9}{25} = t_1$

b) Que vaut t_9 ?

$t_9 = \frac{9}{25} \cdot 5^{9-1}$

$t_9 = \frac{9}{25} \cdot 5^8$

$\boxed{t_9 = 140625}$

5. x – 6, x, x + 8 sont trois termes consécutifs d'une SG

a) Détermine x

$\frac{x}{x-6} = \frac{x+8}{x}$

$x^2 = x^2 + 2x - 48$

$48 = 2x$

$x = 24$

b) Détermine les trois termes.

$t_1 = 24 - 6$
$= 18$

$t_2 = 24$

$t_3 = 24 + 8$
$= 32$

6. Monsieur X a acheté une maison à St. Vital pour 150 000 $ il y a 11 ans. Le taux d'appréciation est de 7 % par année. Quelle est la valeur actuelle de la maison.

$r = 1,07$

$t_{11} = 150\,000 \cdot 1,07^{11-1}$

$t_{11} = 295\,072,70\$$

7. Dans la nature, de nombreux organismes unicellulaires, comme les bactéries, se reproduisent en se divisant en deux. Ainsi, une cellule produit 2, puis 4, puis 8 cellules, et ainsi de suite, ce qui forme une suite géométrique. Suppose qu'un échantillon contient 10 bactéries au départ.

a) Détermine le terme général qui représente la relation entre le nombre de bactéries et leur période de division.

$t_n = 10 \cdot 2^{n-1}$

b) Indique les valeurs de t1 et de r dans la suite géométrique générée.

$t_1 = 10 \quad r = 2$

8. Le troisième terme d'une suite géométrique est 54 et son sixième terme est -1 458. Détermine les valeurs de t1 et de r, puis indique les trois premiers termes de la suite.

$t_3 = 54$

$t_6 = -1458$

$54 = t_1 \cdot r^{3-1}$

$54 = t_1 \cdot r^2$

$\frac{54}{r^2} = t_1$

$-1458 = t_1 \cdot r^{6-1}$

$-1458 = t_1 \cdot r^5$

$-1458 = \frac{54}{r^2} \cdot r^5$

$-1458 = 54 r^3$

$-27 = r^3$

$r = -3$

$\frac{54}{(-3)^2} = t_1$

$t_1 = 6$

$t_2 = -18$

$t_3 = 54$

Pratique :

1. Détermine les quatre premiers termes de chaque suite géométrique.

a) t1 = 2 et r = 3

$t_1 = 2$

$t_2 = 6$

$t_3 = 18$

$t_4 = 54$

b) t1 = 2 et 4 = 0,5

$t_1 = 2$

$t_2 = 1$

$t_3 = \frac{1}{2}$

$t_4 = \frac{1}{2}$

2. ~~Détermine~~ les termes manquants, t2, t3 et t4, de la suite géométrique dans laquelle ~~t1~~ = 8,1 et t5 = 240,1

$$\frac{240{,}1}{8{,}1} = \frac{8{,}1 \cdot r^4}{8{,}1}$$

$$\sqrt[4]{r^4} \quad \sqrt[4]{\frac{240{,}1}{8{,}1}}$$

3. Écris une formule du terme général de chaque suite géométrique.

a) r = 2 et t1 = 3

$t_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

b) 192, -48, 12, -3 …

$r = \frac{-1}{4}$

$t_n = 192 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$

c) t3 = 5 et t6 = 135

$5 = t_1 \cdot r^2$

$\frac{5}{r^2} = t_1$

$135 = t_1 \cdot r^5$

$135 = \frac{5}{r^2} \cdot r^5$

$27 = r^3$ $\quad r = 3$

$\frac{5}{3^2} = t_1 \quad \frac{5}{9} = t_1$

4. La couleur de certains vêtements s'estompe au lavage avec le temps. La couleur d'un jean s'estompe de 5 % à chaque lavage.

a) Quel pourcentage de couleur reste-t-il après un lavage ? 0,95

b) Si t_1 = 100, quels sont les quatre premiers termes de la suite ?

$t_1 = 100$

$t_2 = 100 \cdot 0{,}95$

$t_2 = 95$

$t_3 = 100 \cdot 0{,}95^2$

$t_3 = 90{,}25$

$t_4 = 100 \cdot 0{,}95^3$

$t_4 = 85{,}7375$

c) Quelle est la valeur de r pour la suite géométrique trouvée en b) ?

0,95

d) Quel pourcentage de couleur reste-t-il après 10 lavages ?

$t_{10} = 100 \cdot 0{,}95^9$ $\quad t_{10} = 63{,}02\%$

e) Après combien de lavages reste-t-il seulement 25 % de la couleur initiale du jean ? Quelles suppositions as-tu faites ?

$25 = 100 \cdot 0{,}95^{n-1}$

$0{,}25 = 0{,}95^{n-1}$

$n = 28$ $\quad 100 \cdot 0{,}95^{27} = 25\%$