Mathématique Appliquée 30S

Note : Géométrie et la Trigonométrie :

Nom : ____________________

Table Des Matières

Leçon 1 : Les Propriétés des Angles et les Droites p. 3

Leçon 2 : Les Propriétés des Angles dans les Triangles p. 11

Leçon 3 : Les Polygones p. 13

Leçon 4 : La loi de sinus p. 17

Leçon 5 : La loi de cosinus p. 24

Leçon 1 : Les Angles et les Droites

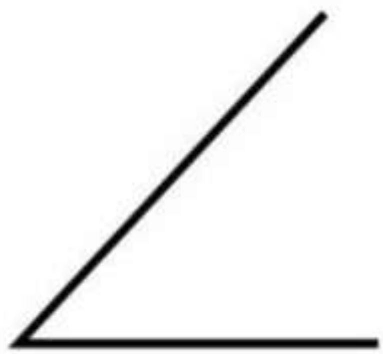
A) Vocabulaire

1) Les types d'angles :

Angle nul : Un angle de 0^o.

$$\hat{\alpha} = 0^\circ$$

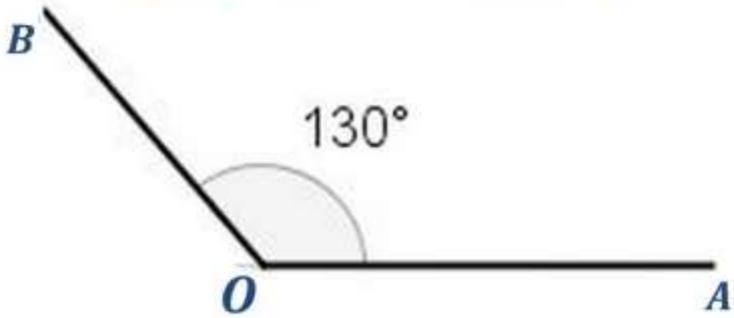
Angle aigu : Un angle plus petit que 90^o.



Angle droit : Un angle égal à 90^o.

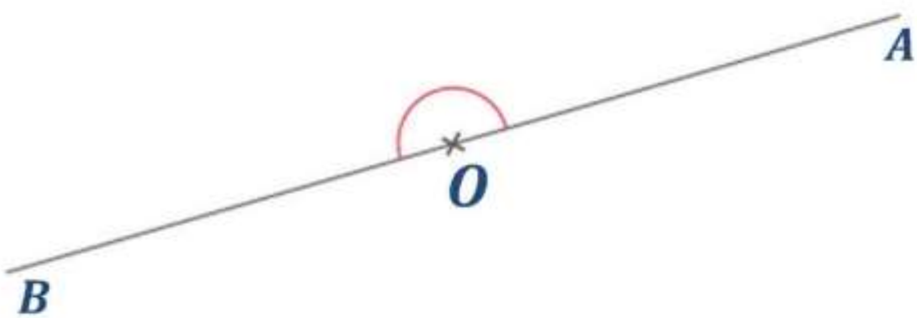
Angle obtus : Un angle plus grand que 90° et plus petit que 180°.

$$\widehat{AOB} = 130°$$

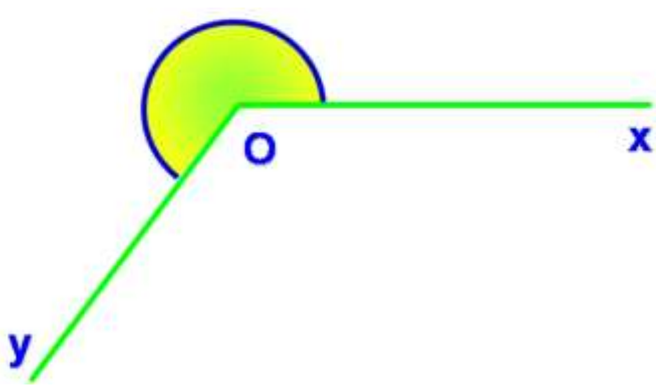


Angle plat : Un angle égal à 180° (segment plat).

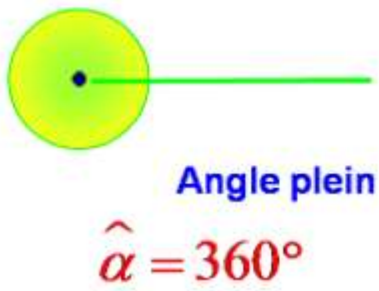
$$\widehat{AOB} = 180°$$



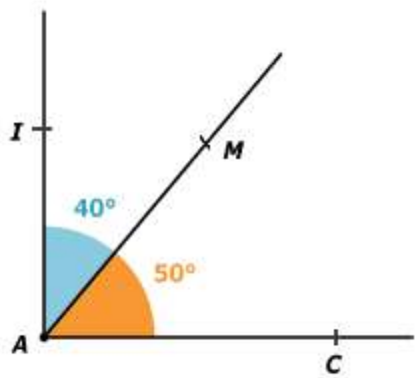
Angle rentrant : Un angle plus grand que 180°.



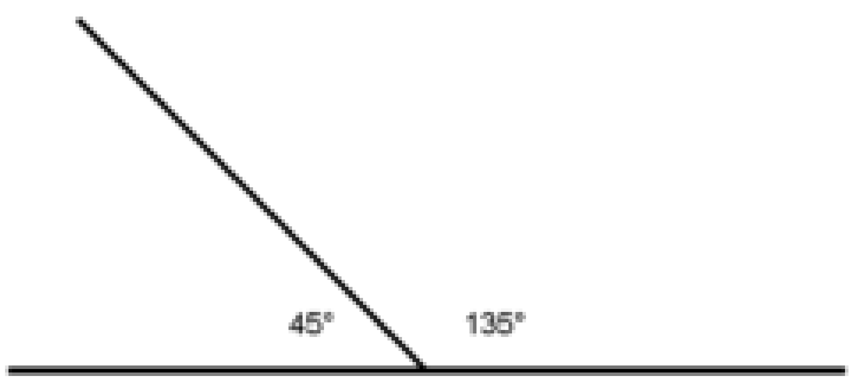
Angle plein : Un angle égal à 360º. (Un cercle)



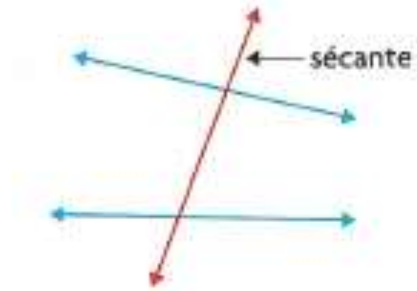
Angles complémentaires : Somme de deux angles sont égaux à 90º.



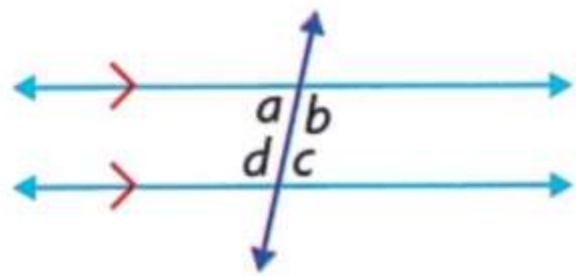
Angles supplémentaires : Somme de deux angles sont égaux à 180º.



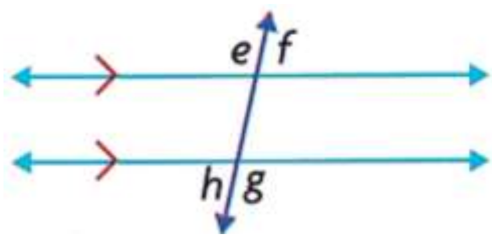
Sécante : Droite qui possède un point commun avec une autre droite ou une figure quelconque. Dans ce chapitre, droite qui coupe deux autres droites ou plus à des points distincts.



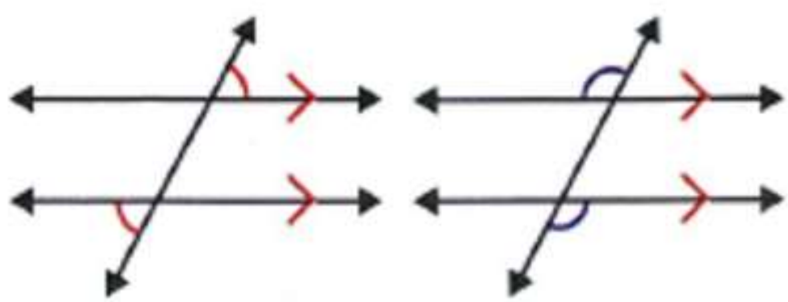
Angles Internes : Angles qui sont formées par une sécante et deux droites parallèles, et qui sont situés entre ces droites parallèles.



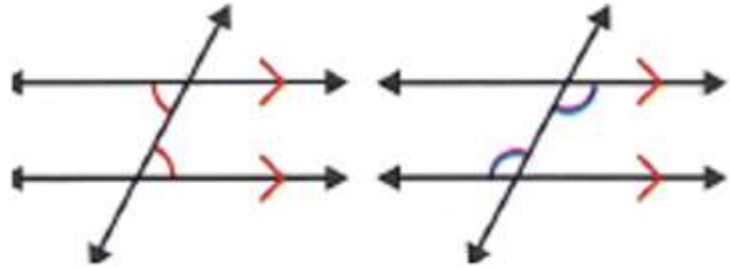
Angles Externes : Angles qui sont formés par une sécante et deux droites parallèles, et qui sont situés à l'extérieur de ces droites parallèles.



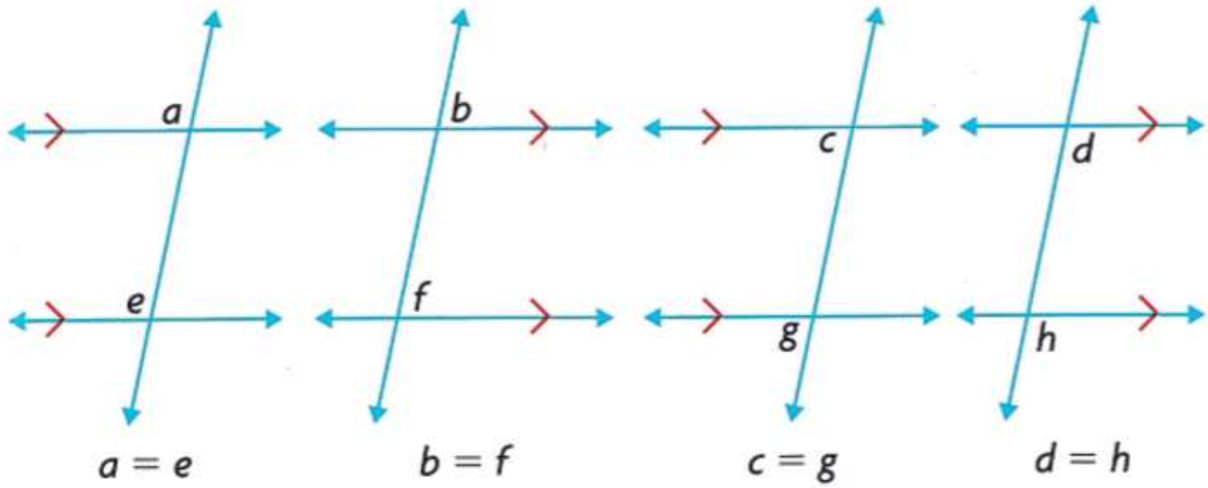
Angles Alternes-Externes : Deux angles externes formés par deux droites et une sécante, sur des côtés opposés de la sécante.



Angles alternes-Internes : Deux angles internes non adjacents situés sur des côtés opposés d'une sécante.

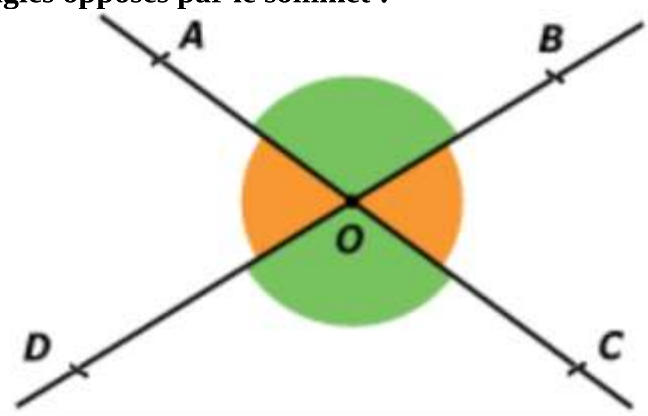


Angles Correspondants (des angles congruents/égaux) : Un angle interne et un angle externe qui ne sont pas adjacents et qui sont placés du même côté d'une sécante.



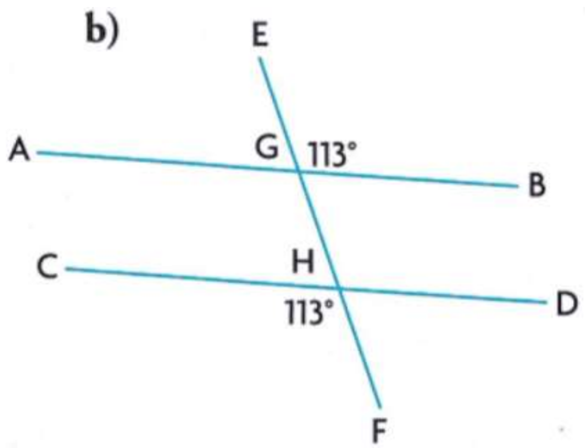
Réciproques : Énoncé formulé en inversant la prémisse et la conclusion d'un autre énoncé.

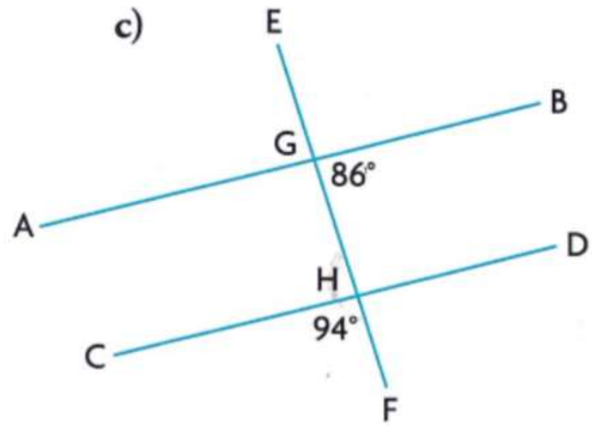
Angles opposés par le sommet :



B) Détermine la mesure des angles des droites parallèles avec des sécantes

Exemple 1 : Détermine la mesure de tous les angles.

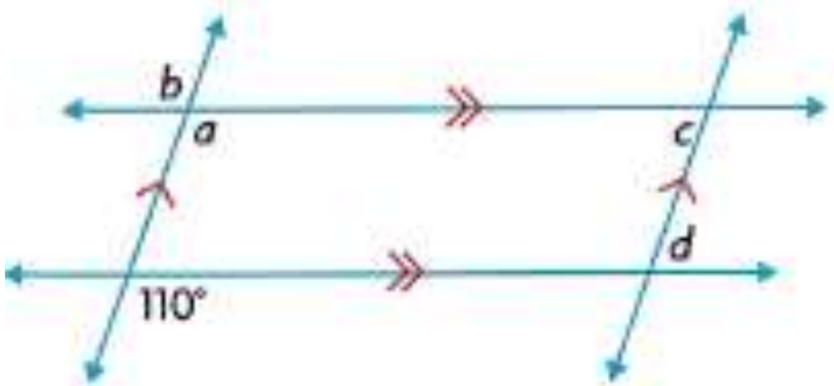


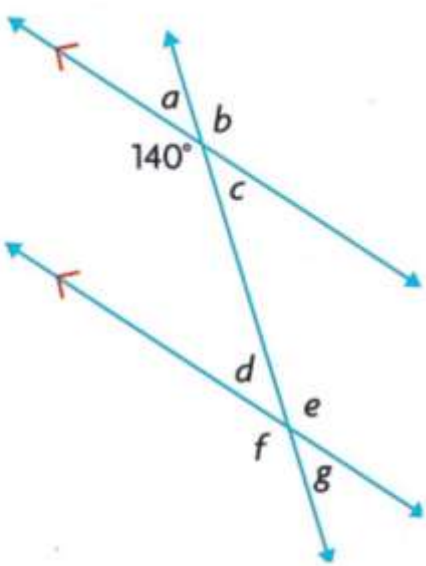


G = ________ G = _________

H = ________ H = _________

Exemple 2 : Trouve les mesures de a, b, cet d si a = 110°.





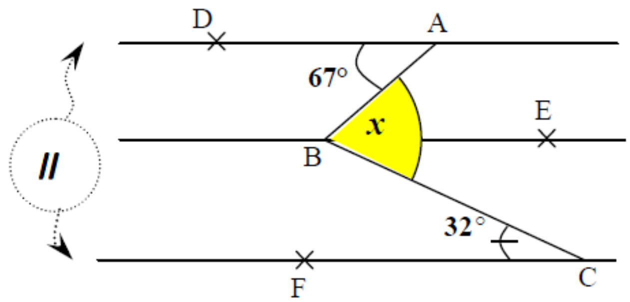
Exemple 3 : Détermine la mesure de tous les angles.

a = _________ b = __________ c = __________

d = _________ e = __________ f = __________

g = _________

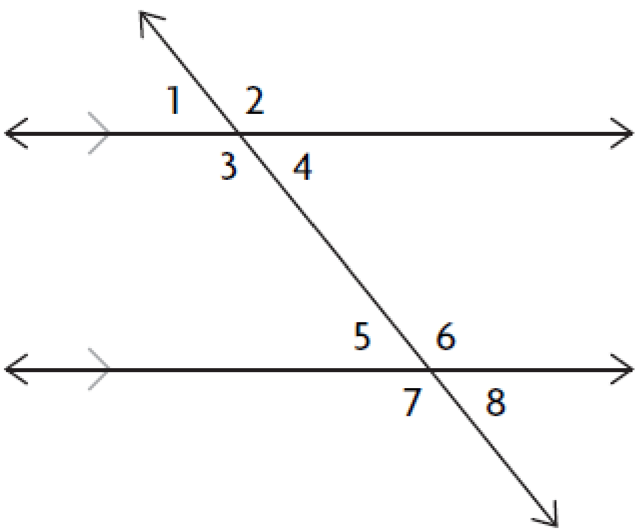
Exemple 4 : Détermine la mesure de « x ». Justifie votre réponse.



Exemple 5 :

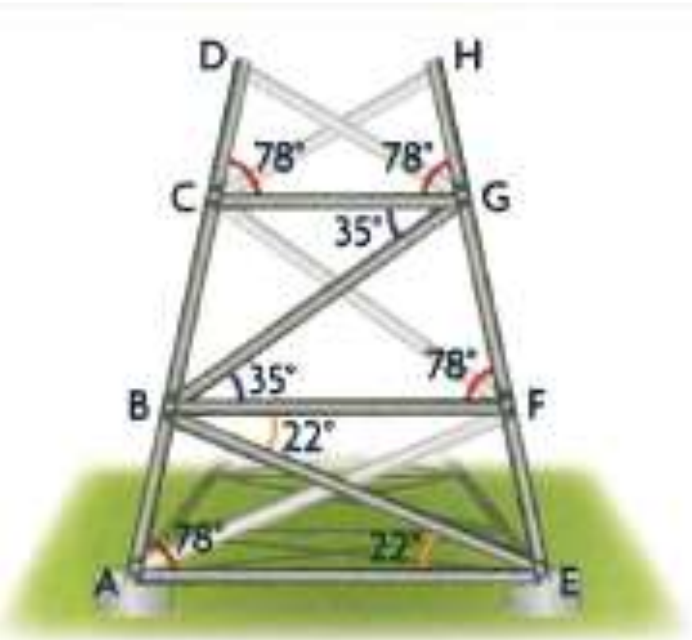
a) Détermine quels angles sont congruents (égaux).

b) Détermine quels angles sont égaux à 180°.



C) Preuve que des segments de droite sont parallèles à l'aide des propriétés des angles.

Exemple 5 : Un côté d'une tour de télécommunications sera construit comme ci-contre. À l'aide des meusres d'angle, prouve que les segments CG, BF et AE sont parallèles.



$\angle BAE = 78°$ et $\angle DCG = 78°$

$\overline{AE} \parallel \overline{CG}$ ....

$\angle CGH = 78°$ et $\angle BFG = 78°$

$\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ ....

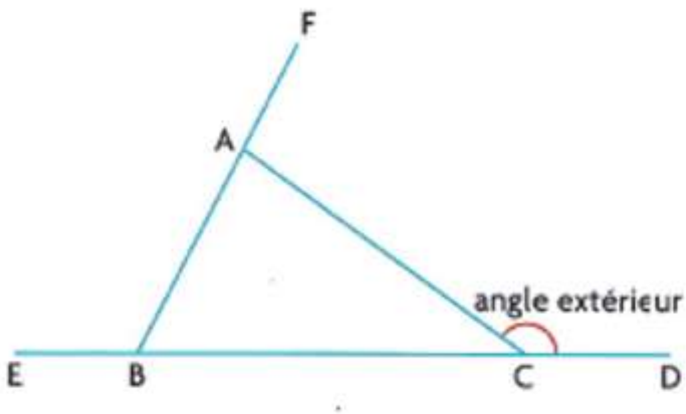
$\overline{AE} \parallel \overline{CG}$ et $\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ ......

Énoncé	Justification
$\angle CGB = 35°$ et $\angle GBF = 35°$	Donné
$\overline{CG} \parallel \overline{BF}$	Angles alternes-internes
$\angle FBE = 22°$ et $\angle BEA = 22°$	Donné
$\overline{BF} \parallel \overline{AE}$	Angles alternes-internes
$\overline{CG} \parallel \overline{BF}$ et $\overline{BF} \parallel \overline{AE}$	Transitivité .....

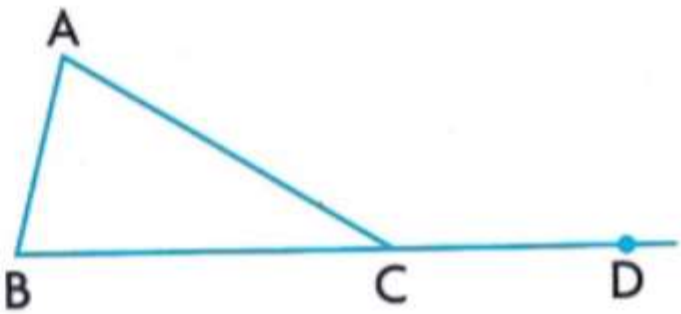
Les trois étais sont parallèles.

Leçon 2 : Propriétés des Angles dans les Triangles

Angles Extérieur :



Angles Intérieurs non adjacents : Les deux angles d'un triangle qui n'ont pas le même sommet qu'un angle extérieur.



$\angle A$ et $\angle B$ sont les angles intérieurs non adjacents à l'angle extérieur ACD.

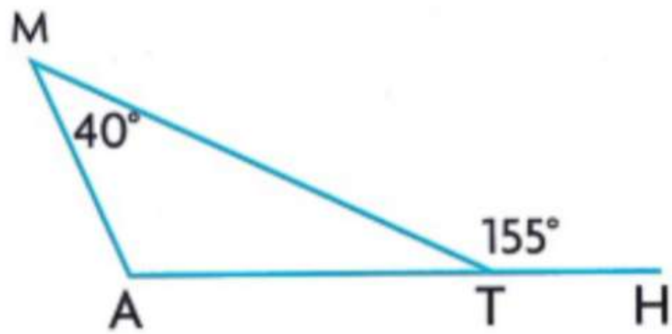
La relation entre des angles d'un triangle.

$$\angle d + \angle c = 180°$$
$$\angle d = 180° - \angle c$$

$$\angle a + \angle b + \angle c = 180°$$
$$\angle a + \angle b = 180° - \angle c$$

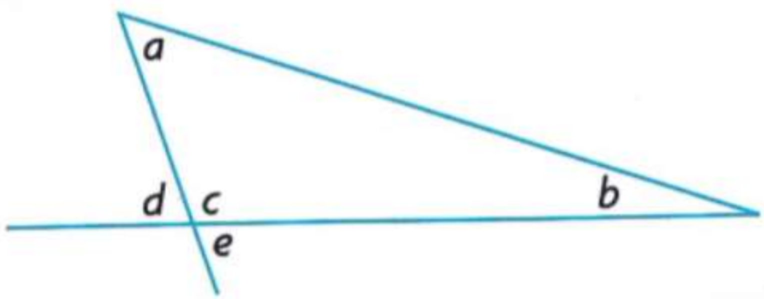
$$\angle d = \angle a + \angle b$$

Exemple 1 : Détermine les mesures des angles intérieurs du triangle.



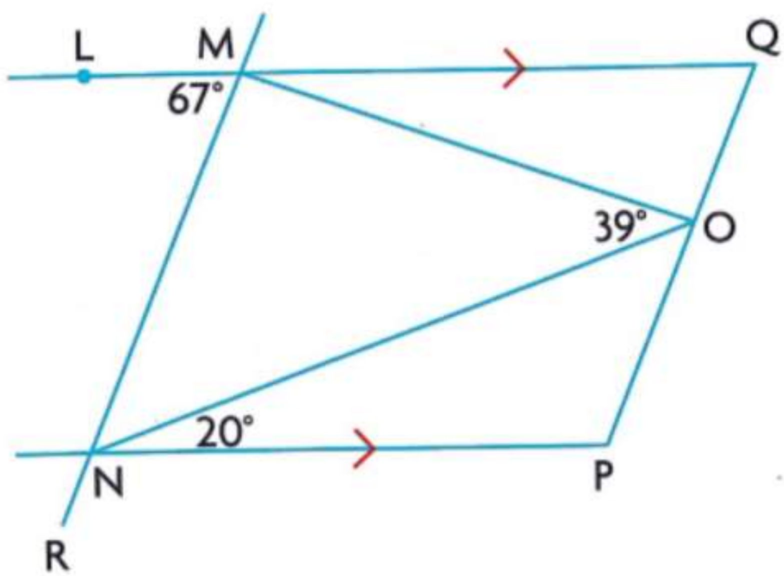
Exemple 2 : Prouve que

$\angle e = \angle a + \angle b.$

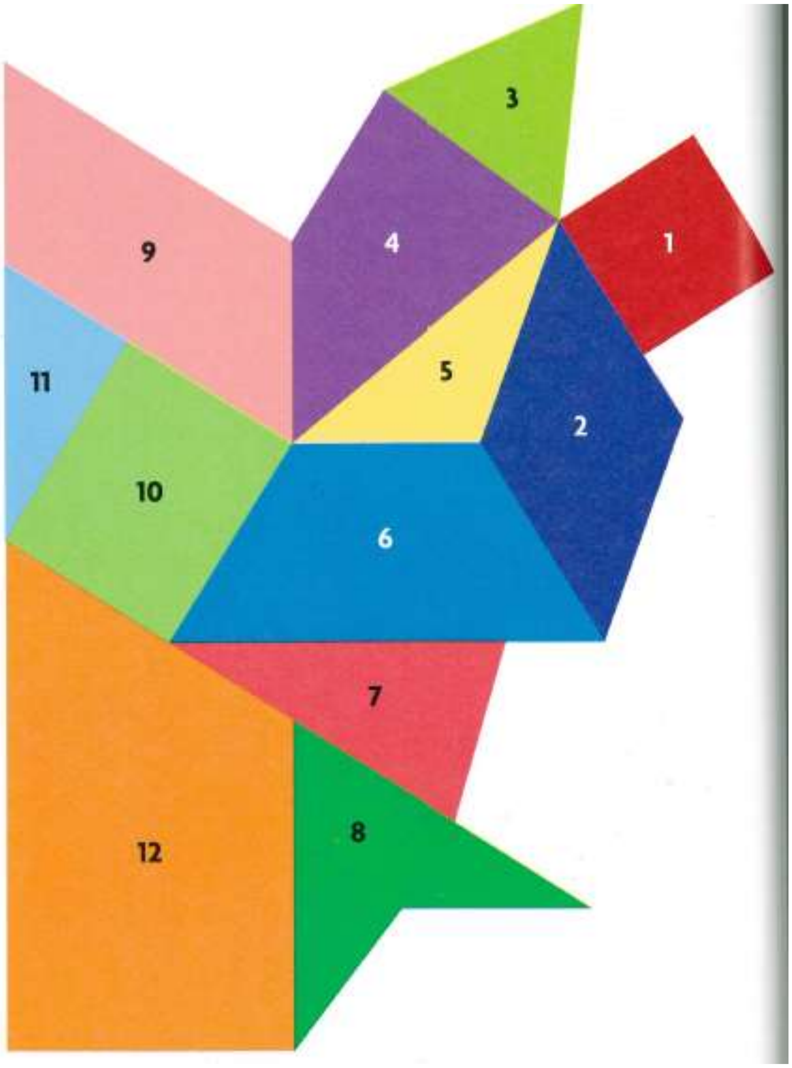


Exemple 3 : Détermine les mesures de

$\angle$NMO, $\angle$MNO et $\angle$QMO.



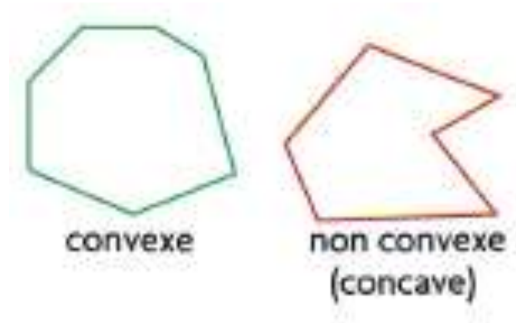
Leçon 3 : Les Polygones et leurs Propriétés



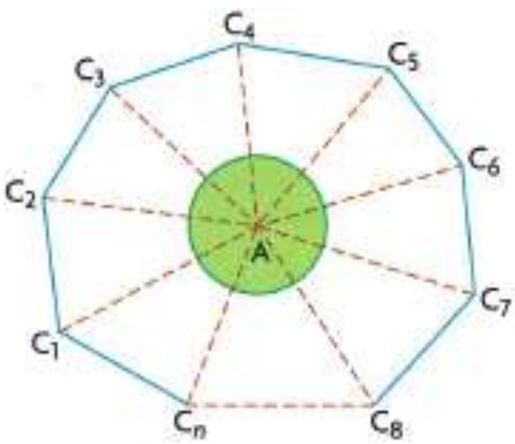
Polygone	Nombre de côtés	Nombre de triangles	Somme des mesures des angles
triangle	3	1	180°
quadrilatère	4		
pentagone	5		
hexagone	6		
heptagone	7		
octogone	8		

Polygone convexe : Polygone dont chaque angle intérieur mesure moins de 180°.

Polygone concave : Polygone dont au moins un angle intérieur mesure plus de 180°.



La somme des mesures des angles intérieurs de tout polygone convexe à n côtés est égale à 180° (n – 2)



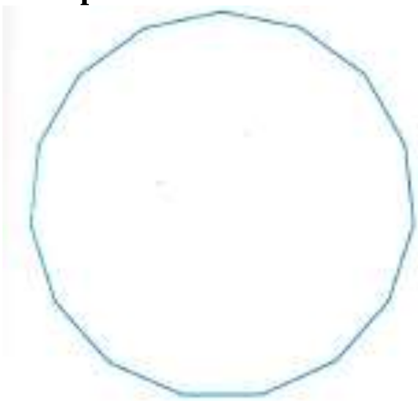
La somme des mesures des angles intérieurs du polygone, $S(n)$, pour laquelle n est le nombre de côtés du polygone, peut s'exprimer sous la forme :

$S(n) = 180°n - 360°$

$S(n) = 180°(n - 2)$

Exemple 1 : Les plans des meubles d'extérieur et des structures comme les gloriettes comportent parfois un hexagone régulier. Détermine la mesure de chaque angle intérieur d'un hexagone régulier.

Exemple 2 : Détermine la mesure de chaque angle intérieure d’un pentadécagone (15 côtés) régulier.



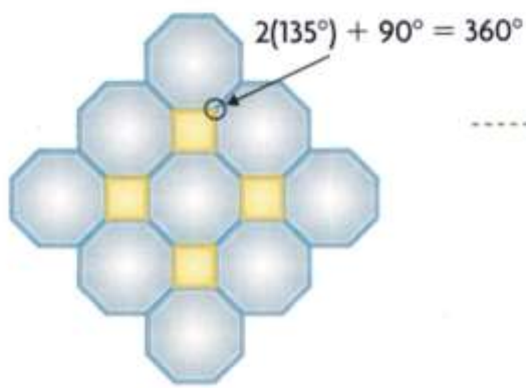
Exemple 3 :

Un carreleur couvre des planchers sur mesure en se servant de carreaux de forme plygonale régulière. Le carreleur peut-il utiliser des octogones réguiers congruents et des carrés congruents pour couvrir u nplancher si leurs côtés ont la même longueur ?

$S(n) = 180°(n - 2)$
$S(8) = 180°[(8) - 2]$
$S(8) = 1\,080°$
$\frac{1\,080°}{8} = 135°$

Chaque angle intérieur d’un octogone régulier mesure 135°.
Chaque angle intérieur d’un carré mesure 90°.

Deux octogones s’assemblent bien en formant un angle de 270°.
$2(135°) = 270°$
Il reste un intervalle de 90°.
$2(135°) + 90° = 360°$
Un carré peut remplir cet intervalle si les côtés du carré sont de la même longueur que les côtés de l’octogone.



Leçon 4 : La loi de sinus

Triangle oblique :

- Tout triangle qui n'est pas un triangle rectangle (il y a un angle plus grand que 90º).
- On dit aussi « triangle quelconque »

A) La loi des sinus : (utilisé quand il n'y a pas un triangle rectangle)

- La relation selon laquelle les longueurs des côtés d'un triangle sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C}$$

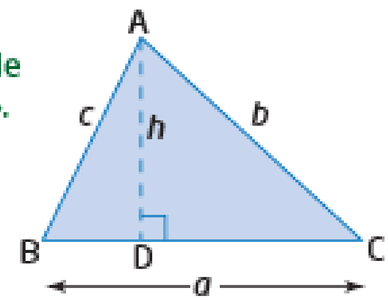
Théorie :

Démonstration

Dans le $\triangle ABC$, trace une hauteur $AD \perp BC$.

Soit $\overline{AD} = h$.

Le symbole $\perp$ signifie « perpendiculaire à ».



Dans le $\triangle ABD$:

$$\sin \angle B = \frac{h}{c}$$

$$h = c \sin \angle B$$

Dans le $\triangle ACD$:

$$\sin \angle C = \frac{h}{b}$$

$$h = b \sin \angle C$$

Pose que ces deux équations sont égales, puisqu'elles sont toutes deux égales à h :

$$c \sin \angle B = b \sin \angle C$$

Divise les deux membres de l'équation par $\sin \angle B \sin \angle C$.

$$\frac{c}{\sin \angle C} = \frac{b}{\sin \angle B}$$

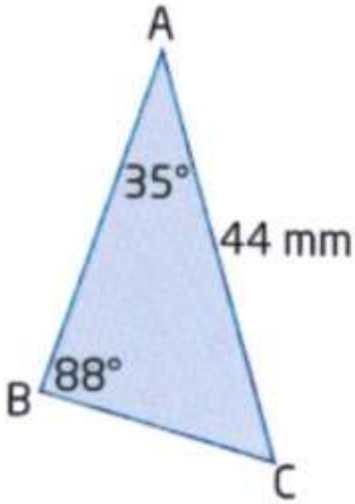
Ceci est la première partie de la loi des sinus.

On utilise la loi des sinus dans deux situations :

- Lorsque l'on connaît 2 angles et 1 côté.
- Lorsque l'on connaît 2 côtés et 1 angle opposé à un de ces deux côtés.

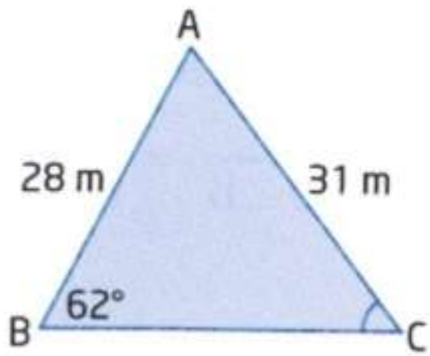
Exemple 1 : Côté, son angle et un autre angle sont donnés.

Détermine la mesure du côté AB ou côté c.



Exemple 2 : Un côté, son angle et un autre côté sont donnés.

Détermine la mesure de l'angle C.



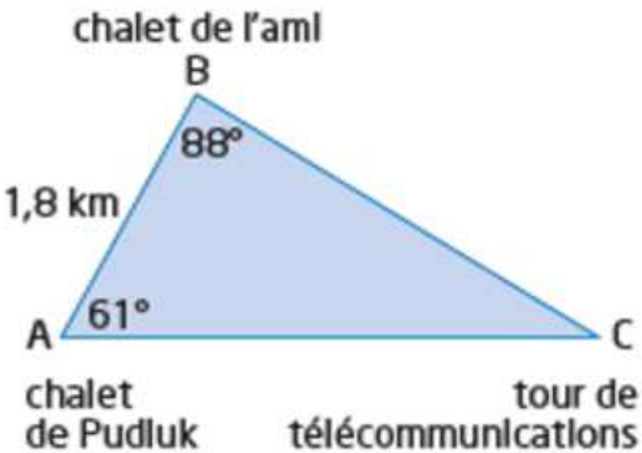
Exemple 3 : Un côté, son angle et un côté sont donnés autre que le côté de l'angle voulu.

Dans le ΔPQR, l'angle $P = 36^o$, $p = 24{,}8$ m et $q = 23{,}4$ m. Détermine la mesure de l'angle R, au degré près.

Exemple 4 : Problème à mot avec une distance inconnue.

Pudluk et son ami possèdent chacun un chalet le long de la rivière Kalit, au Nunavut. Ils veulent déterminer la distance qui sépare le chalet de Pudluk du magasin situé à l'entrée du village. Ils savent que leurs chalets sont à 1,8 km l'un de l'autre. À l'aide d'un théodolite, ils estiment la mesure des angles formés par leurs chalets et la tour de télécommunications qui est à côté du magasin. Ces angles sont indiqués dans le schéma.

a) Détermine la distance qui sépare le chalet de Pudluk du magasin, au dixième de kilomètre près.



b) Détermine la distance qui sépare le chalet de l'ami de Pudluk du magasin.

Exemple 5 : Problème à mot plus complexe.

Deux bateaux quittent le quai au même moment. Le bateau de Layton quitte au N29°O et le bateau Billingham quitte au S25°O. La vitesse du bateau Billingham est de 48 km/h et celle du bateau Layton est de 53,6 km/h.

a) Quelle distance est-ce que le bateau de Billingham a voyagé dans 4 heures ? (1)

b) Quelle distance est-ce que le bateau de Layton a voyagé dans 4 heures ? (1)

c) Fais un schéma pour représenter les données. (1)

d) Quelle distance sépare ces deux bateaux au bout de 4 h ? (2)

B) Loi de sinus et le cas ambigu :

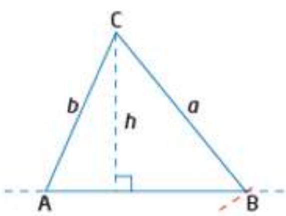
Cas ambigu :

- Un cas où l'information n'est pas suffisante pour déterminer une solution unique : Il peut y avoir un seul triangle, deux triangles ou n'y avoir aucun triangle.

Avant de résoudre un triangle, tu dois analyser les données connues afin d'établir s'il existe une solution. Si tu connais la mesure de deux angles et la longueur d'un côté (ACA), alors il y a seulement un triangle possible. Cependant, si tu connais la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle opposé à l'un de ces côtés (CCA), le cas ambigu peut se présenter. Il y a trois possibilités dans le cas ambigu :

- **Aucune solution** : il existe aucun triangle correspondant aux mesures données ;
- **Une solution** : il existe un seul triangle correspondant à ces mesures ;
- **Deux solutions distinctes** : il existe deux triangles distincts correspondants à ces mesures.

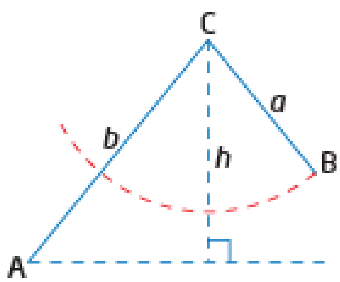
N'oubliez pas :



Alors :

$$sinA = \frac{h}{b}$$

h = bsinB



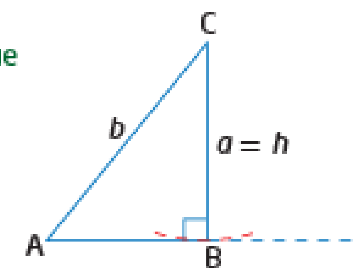
Souviens-toi que $h = b \sin \angle A$.

$a < h$

$a < b \sin \angle A$

pas de solution

Pourquoi n'y a-t-il pas de solution dans ce cas ?

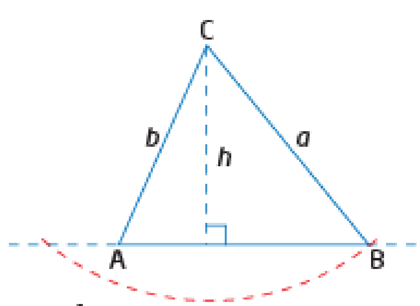


Quel type de triangle correspond à ce cas?

$a = h$

$a = b \sin \angle A$

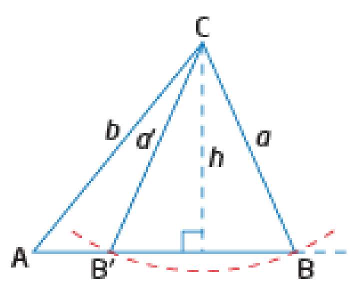
une solution



$a \geq b$

une solution

Pourquoi n'y a-t-il pas une autre solution avec l'angle B à gauche de l'angle A?

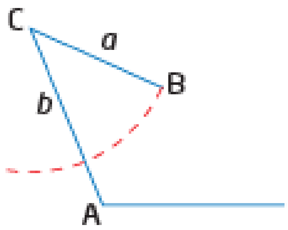


$h < a < b$

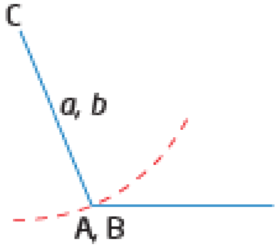
$b \sin \angle A < a < b$

deux solutions

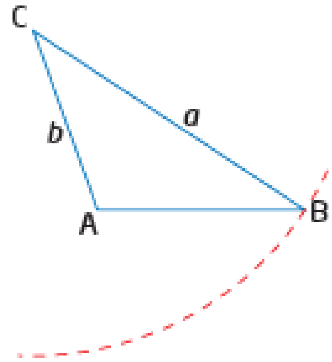
Si ∠A est un angle obtus, trois cas peuvent se présenter.



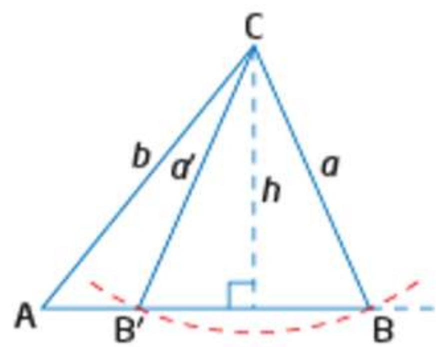
$a < b$
pas de solution



$a = b$
pas de solution



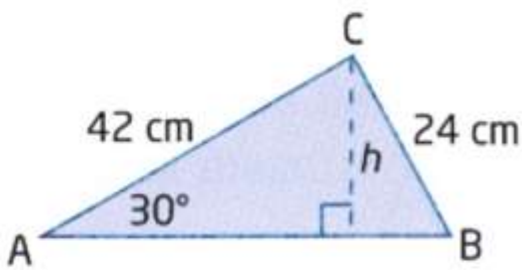
$a > b$
une solution



$h < a < b$
$b \sin \angle A < a < b$
deux solutions

Exemple 6 :

Dans le ΔABC, l'angle A = 30º, a = 24 cm et b = 42 cm. Détermine les mesures manquantes. Arrondis test réponses à l'unité près.



Détermine la hauteur du triangle pour vérifier combien de triangle il y a.

$$\sin \angle A = \frac{h}{b}$$
$$h = b \sin \angle A$$
$$h = 42 \sin 30°$$
$$h = 21$$

$21 < 24 < 42$

Puisque $24 > 21$, le cas $a > b \sin \angle A$ s'applique.

Par conséquent, il y a deux triangles possibles.

Calcul

$\Delta 1$ $\Delta 2$

Leçon 5 : La loi du cosinus

La loi du cosinus (utilisé quand il n'y a pas un triangle rectangle) :

- Si a, b et c sont les côtés d'un triangle et si C est l'angle opposé au côté c, alors la loi du cosinus s'écrit $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
- Est utilisé si deux côtés sont données et l'angle opposé du côté inconnu ou si tous les 3 côtés sont donnés et aucun angle.
- Décrit la relation qui existe entre le cosinus d'un angle et la longueur des trois côtés d'un triangle quelconque.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\text{Cos}A$

$$\frac{\cancel{2bc}CosA}{\cancel{2bc}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

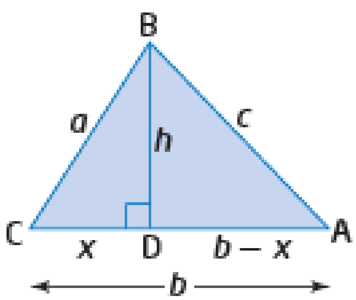
$$CosA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\text{Cos}B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\text{Cos}C$

Démonstration

Dans le $\triangle ABC$, trace une hauteur h.



Dans le $\triangle BCD$:

$\cos \angle C = \frac{x}{a}$ $\qquad a^2 = h^2 + x^2$

$x = a \cos \angle C$

Dans le $\triangle ABD$, utilise le théorème de Pythagore:

$c^2 = h^2 + (b - x)^2$

$c^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$ — Développe le binôme.

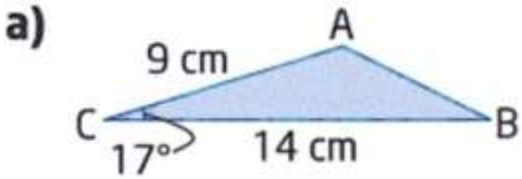
$c^2 = h^2 + x^2 + b^2 - 2bx$ — Pourquoi a-t-on déplacé les termes?

$c^2 = a^2 + b^2 - 2b(a \cos \angle C)$ — Explique les substitutions.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C$

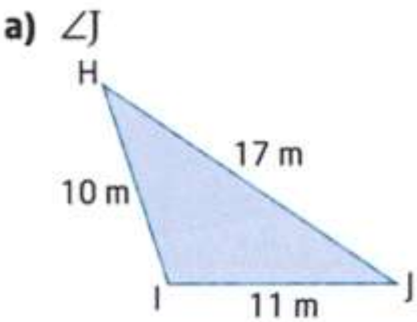
Exemple 1 : Détermine le côté si son angle et les deux autres côtés sont donnés.

Détermine la mesure du troisième côté.



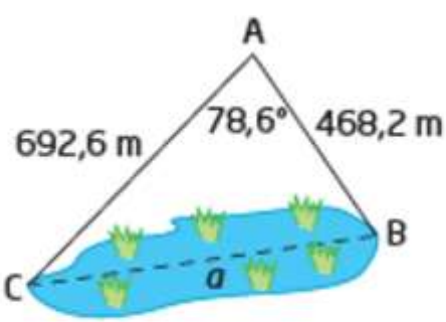
Exemple 2 : Détermine un ou les angles avec les trois côtés.

Détermine la mesure de l'angle indiqué.



Exemple 3 : Problème à mot

Une arpenteuse doit déterminer la longueur d'un marécage près du lac Fishing, au Manitoba. Elle installe son théodolite au point A. De là, elle mesure une distance de 468,2 m jusqu'à une extrémité du marécage et une distance de 692,6 m jusqu'à l'autre extrémité du marécage. L'angle de vision entre ces deux points est de 78,6°. Détermine la longueur du marécage, au dixième de mètre près.



Exemple 4 : Problème à mot

Le pont Lion's Gate est un lieu d'intérêt à Vancouver depuis son inauguration en 1938. C'est le plus long pont suspendu de l'Ouest canadien. Des entretoises triangulaires renforcent le pont. Les côtés d'une entretoise mesurent 14 m, 19 m et 12,2 m. Détermine la mesure de l'angle opposé au côté de 14 m, au degré près. Ensuite détermine la mesure des 2 autres angles.

Exemple 5 : Résous le triangle

Dans le ΔABC, $a = 11$, $b = 5$ et l'angle $C = 20^o$. Fais un schéma et détermine les mesures manquantes, au dixième près.