Pré-Calcul 40S

Enseignante :
Mme. Layton

Nom de l'élève :

____

Unité :
Les Fonctions Trigonométriques graphiques,

Table des matières

Les Fonctions Trigonométriques graphiques

Leçon 1 : Le graphique des fonctions sinus et cosinus

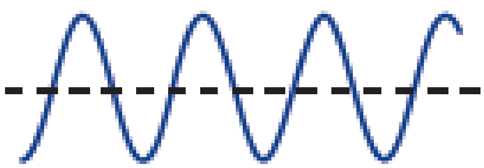
Le graphique de la fonction y = sinθ est une courbe appelée sinusoïde.

Fonction périodique :

- Une fonction qui se répète sur des intervalles réguliers (cycles) de son domaine.
- y = asin(b(x – c)) + d
    - a : amplitude
    - b : le nombre de cycle dans 360° ou 2π.
    - c : le déphasage (déplacement horizontal) = h
    - d : droite médiane (déplacement vertical) = k

Sinusoïde :

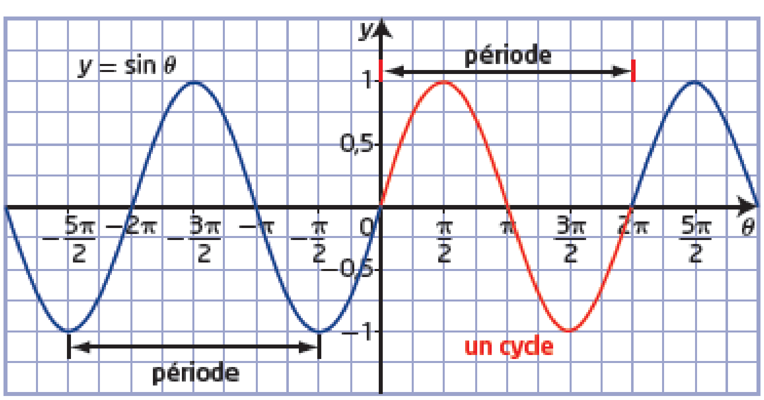
- Le nom donné à une courbe qui fluctue régulièrement comme celle de la fonction sinus.
- Une courbe qui oscille à répétition au-dessus et en dessous d'une droite horizontale centrale, la droite médiane.



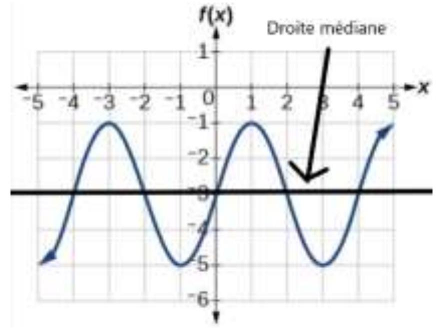
Les fonctions trigonométriques sont parfois appelées fonctions circulaires, car elles se basent sur le cercle unitaire.

Période :

- La longueur de l'intervalle du domaine au bout duquel un graphique se répète.
- La longueur horizontale d'un cycle d'un graphique périodique.
- y = sin(bx)
- **période :** $\frac{\mathbf{360°}}{|\boldsymbol{b}|}$ $\boldsymbol{ou}$ $\frac{\mathbf{2\pi}}{|\boldsymbol{b}|}$ **donc b =** $\frac{\mathbf{360°}}{\boldsymbol{période}}$ $\boldsymbol{ou}$ $\frac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{période}}$
- **La Période d'une fonction sinusoïdale est associée à la valeur de b qui représente un étirement horizontal.** y = f(bx) y = sin**b**x ou y = cos**b**x



Médiane (d) :

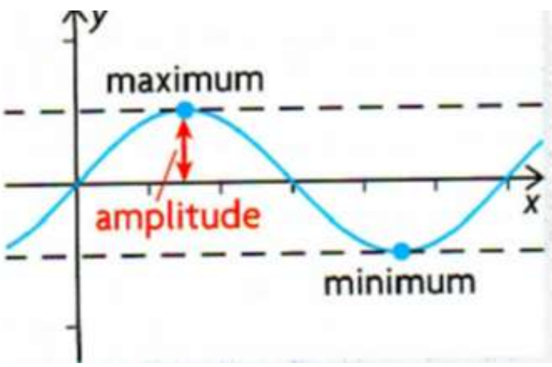


- Le milieu entre les points max. et les points min. y = sinx + d
  d = médiane
- C'est une moyenne entre ton max. et min.

$$\frac{valeur\ maximale + valeur\ minimale}{2}$$

Amplitude (d'une fonction sinusoïdale) (a) :

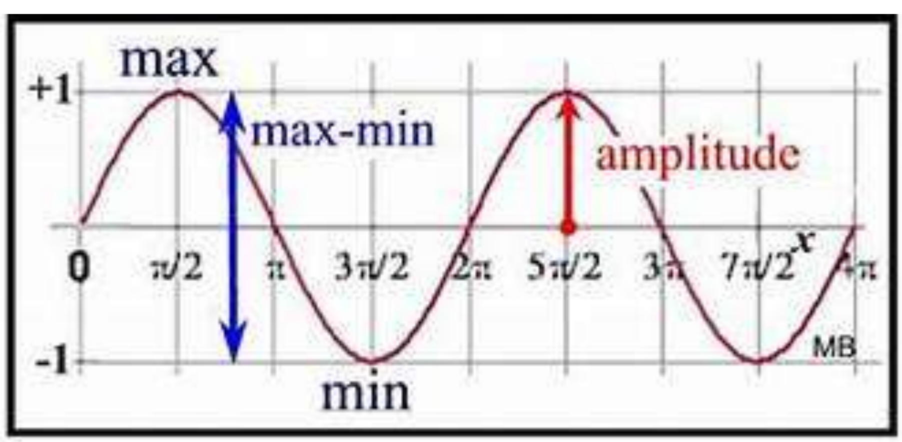
- y = **a**f(x) y = **a**sinx ou y = **a**cosx
- La distance verticale maximale entre la courbe et la droite médiane du graphique d'une fonction sinusoïdale. y =asinx
- a = Amplitude $= \frac{valeur\ maximale - valeur\ minimale}{2}$
  - **Parce que c'est une distance la valeur de l'<u>amplitude</u> est toujours <u>positive</u>.**
  - **L'amplitude d'une fonction sinusoïdale est associée à un étirement vertical si « a » est négative il symbolise une réflexion par rapport à l'axe des x.**
    - **Ex : y = -2sin4x**



Amplitude = 2

b = 4 alors période = $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

Maximum (d + $|a|$) et Minimum (d – $|a|$)



On transfère le concept de sinθ et cosθ sur un plan cartésien à un graphique.

y = sin θ

Alors on compare le plan cartésien des angles quadrantales à un plan cartésien pour un graphique de sin θ.

Ex :

Pour sin θ

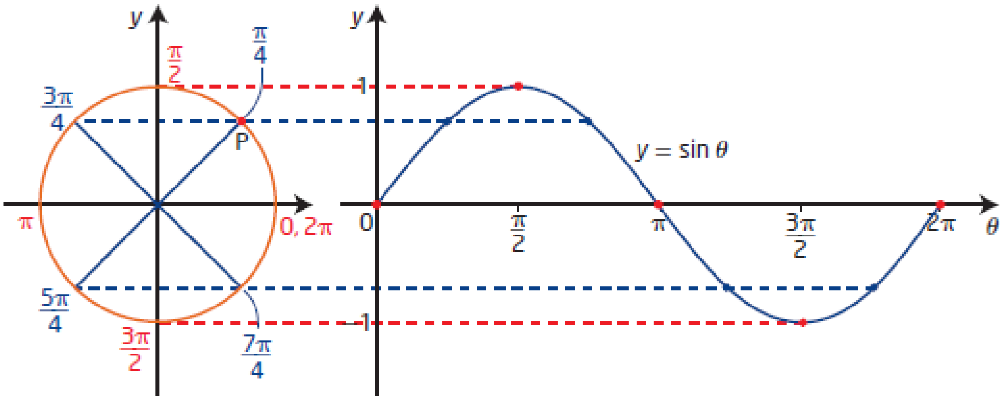
$(0, sin0) = (0, 0)$

$(\frac{\pi}{2}, sin\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 1)$

$(\pi, sin\pi) = (\pi, 0)$

$(\frac{3\pi}{2}, sin\frac{3\pi}{2}) = (\frac{3\pi}{2}, -1)$

$(2\pi, sin2\pi) = (2\pi, 0)$



y = cos θ

Pour cos θ

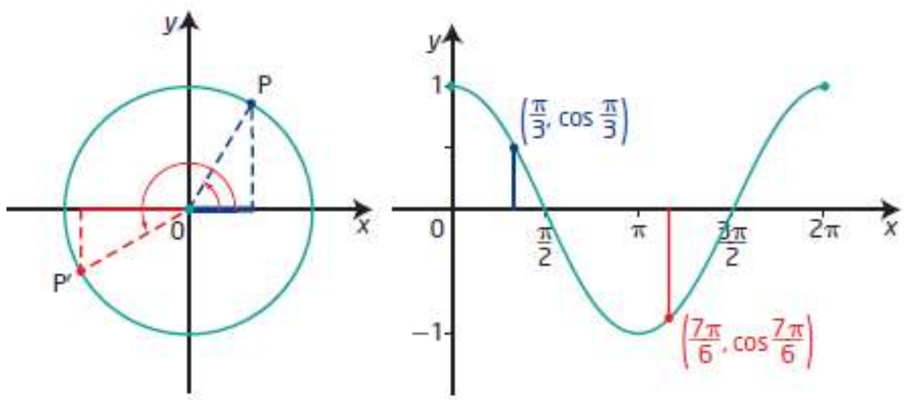
$(0, \cos 0) = (0, 1)$

$(\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 0)$

$(\pi, \cos\pi) = (\pi, -1)$

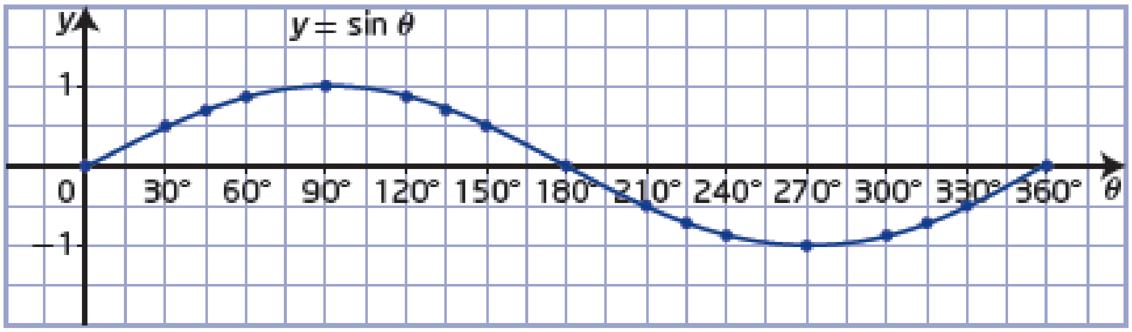
$(\frac{3\pi}{2}, \cos\frac{3\pi}{2}) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$

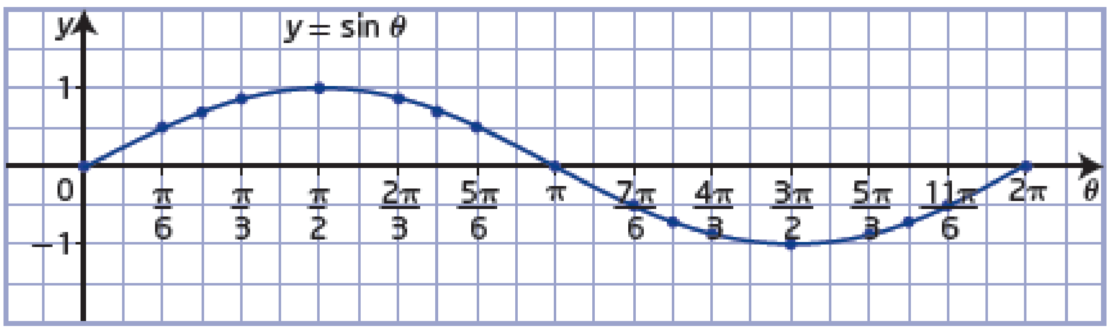
$(2\pi, \cos 2\pi) = (2\pi, 1)$



1. Trace le graphique de y = sin θ pour $0° \leq \theta \leq 360°$ / $[0°, 360°]$ou $0 \leq \theta \leq 2\pi$ / $[0, 2\pi]$

θ																		
	Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
	Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin θ		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0





Caractéristiques :

La courbe est périodique et continue. La valeur maximale est +1 et la valeur minimale est -1.

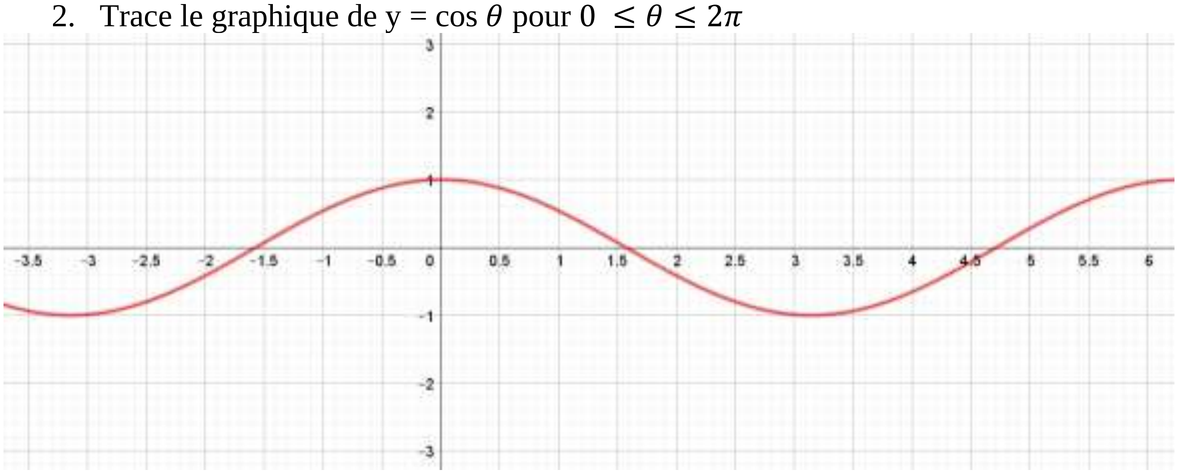
Le domaine est $\{\theta \in R\}$ et l'image est $\{y \in R | -1 \leq y \leq 1\}$.

L'amplitude de la courbe est 1. La période est 360^o ou 2π. L'ordonnée à l'origine est 0.

Les abscisses sont :

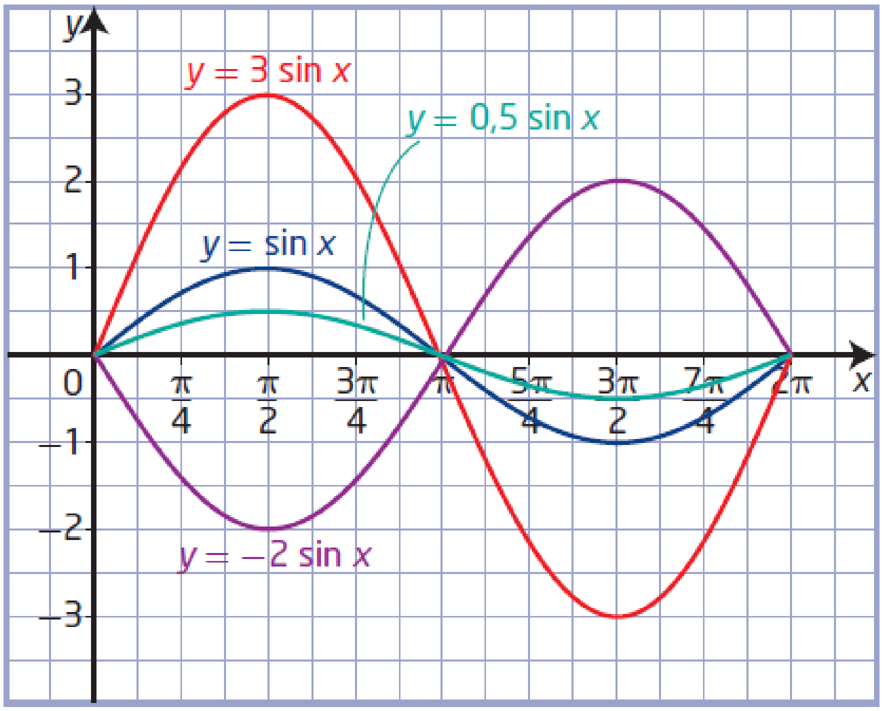
- En degrés : -540^o, -360^o, -180^o, 0^o, 180^o, 360^o,…… ou 180^on
- En rads : $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots.\, ou\ \pi n$, où n $\in Z$

2. Trace le graphique de y = cos θ pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$



A) Les Étirements vertical (a)

1. a) Représente graphiquement y = 3sinx, y = 0,5sinx et y = -2sinx pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Exemple :
y = 3sinx
$(0, 3sin0) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 3sin\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 3)$
$(\pi, 3sin\pi) = (\pi, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, 3sin\frac{3\pi}{2}) = (\frac{3\pi}{2}, -3)$
$(2\pi, 3sin2\pi) = (2\pi, 0)$

y = -2sinx
$(0, -2sin0) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, -2sin\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, -2)$
$(\pi, -2sin\pi) = (\pi, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -2sin\frac{3\pi}{2}) = (\frac{3\pi}{2}, 2)$
$(2\pi, -2sin2\pi) = (2\pi, 0)$

b) Détermine l'amplitude de chaque fonction. (**formule ou avec graphique**)

$$\text{Amplitude} = \frac{\text{maximum} - \text{minimum}}{2}.$$

L'amplitude de $y = \sin x$ est $\frac{1 - (-1)}{2}$, ou 1.

L'amplitude de $y = 3 \sin x$ est $\frac{3 - (-3)}{2}$, ou 3.

L'amplitude de $y = 0{,}5 \sin x$ est $\frac{0{,}5 - (-0{,}5)}{2}$, ou 0,5.

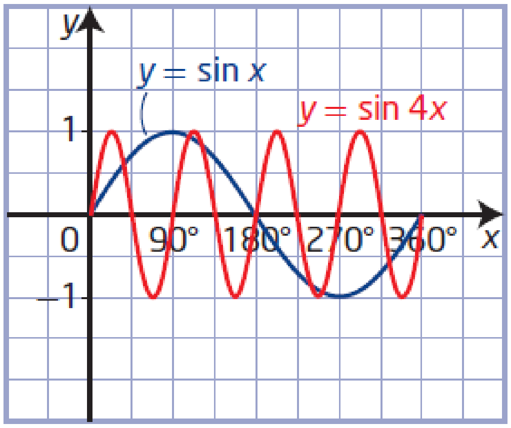
L'amplitude de $y = -2 \sin x$ est $\frac{2 - (-2)}{2}$, ou 2.

c) Compare chaque graphique à celui de y = sinx. Examine la période, l'amplitude, le domaine et l'image.

Fonction	Période	Amplitude	Domaine indiqué	Image
$y = \sin x$	2π	1	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = 3 \sin x$	2π	3	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid -3 \leq y \leq 3\}$
$y = 0{,}5 \sin x$	2π	0,5	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid -0{,}5 \leq y \leq 0{,}5\}$
$y = -2 \sin x$	2π	2	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$

B) Les Étirements horizontales. (b)

2. a) Trace le graphique de la fonction y = sin4x 0° $\leq \theta \leq 360°$. Détermine la période de la fonction et compare au graphique à celui de y = sinx.



b = 4

alors il y a un étirement horizontal par un facteur de $\frac{1}{4}$

(les x sont divisés par 4)

Il y aura 4 cycle dans 360°.

$$\text{Période} = \frac{360°}{|b|}$$

$$\text{Période} = \frac{360°}{|4|}$$

$$\text{Période} = \frac{360°}{4}$$

$$\text{Période} = 90°$$

$(\frac{0}{4}, \sin 0) = (\frac{0}{4}, 0)$

$(\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{8}, 1)$

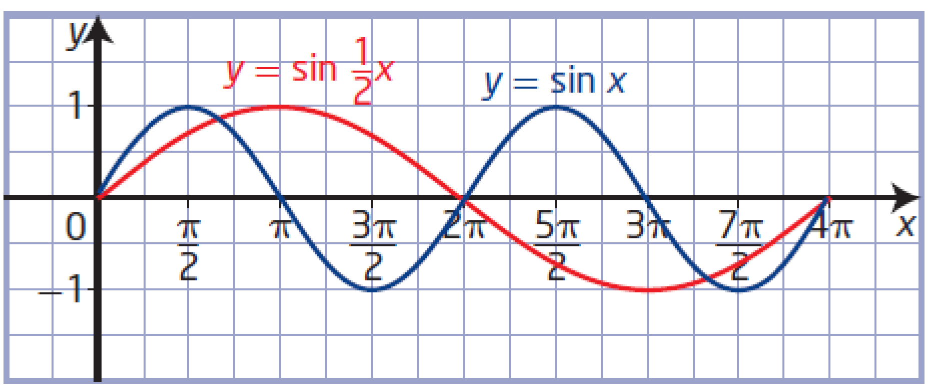
$(\frac{\pi}{4}, \sin\pi) = (\frac{\pi}{4}, 0)$

$(\frac{3\pi}{8}, \sin\frac{3\pi}{2}) = (\frac{3\pi}{8}, -1)$

$(\frac{\pi}{2}, \sin 2\pi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$

Comparé au graphique de y = sinx, le graphique de y = sin4x a la même amplitude, le même domaine et la même image, mais une période différente. Le graphique complète un cycle dans 90° au lieu de 360°.

3. Trace le graphique de la fonction $y = \sin\frac{1}{2}x$ pour 0 $\leq \theta \leq 4\pi$. Détermine la période de la fonction et compare son graphique à celui de y = sinx.



b = $\frac{1}{2}$

alors il y a un étirement horizontal par un facteur de 2.

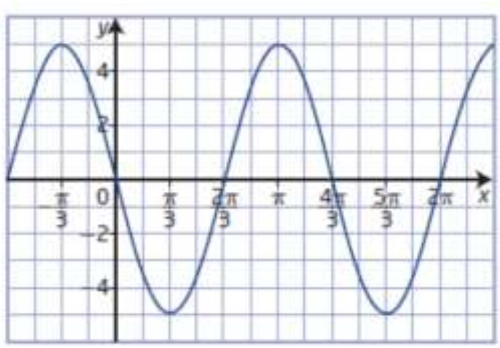
$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}$$

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$$

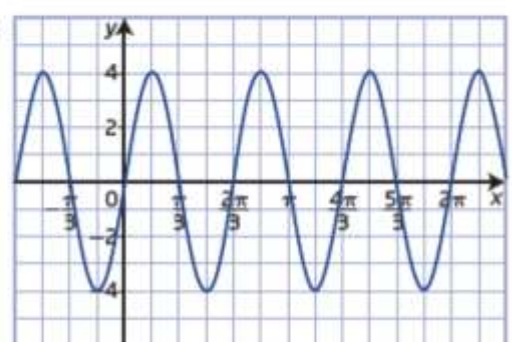
$$\text{Période} = 4\pi$$

4. Détermine l'amplitude et la période de chaque onde sinusoïdale.

a)



b)



Leçon 2 : Les Déphasages et déplacement vertical de fonctions sinusoïdales

y = sin(x – c) + d

A) Déplacement vertical (d) (droite médiane) : (c'est la moyenne)

- La translation verticale du graphique d'une fonction périodique.

Équation de la droite médiane :

$$y = \frac{\text{maximum} + \text{minimum}}{2}$$

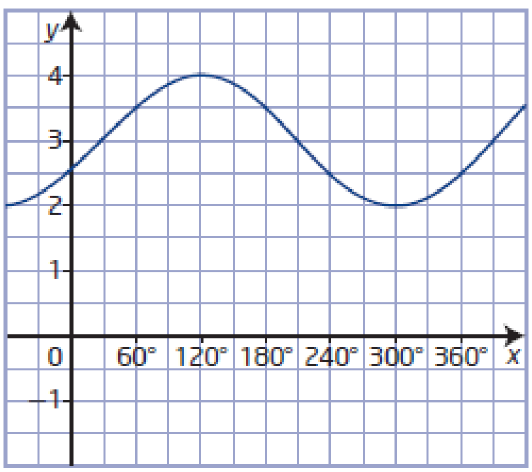
Point Maximum = d + $|a|$ alors point max – $|a|$ = d

Point Minimum = d – $|a|$ alors point min + $|a|$ = d

B) Déphasage (c) :

- La translation horizontale du graphique d'une fonction périodique.

1) Représente graphiquement y = sin(x – c) + d



1. a) Esquisse (trace) le graphique de la fonction $y = \sin(x - 30°) + 3$

Maximum : 3 + 1 = 4

Minimum : 3 – 1 = 2

Déphasage : 30° vers la droite

b) Quels sont le domaine et l'image de la fonction ?

$\{y \in R | min \leq y \leq max\}$ ou $[minimum, maximum]$

Domaine : $\{x \in \mathbb{R}\}$
Image : $\{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leq y \leq 4\}$

c) À l'aide du vocabulaire des transformations, compare ton graphique au graphique de y = sinx.

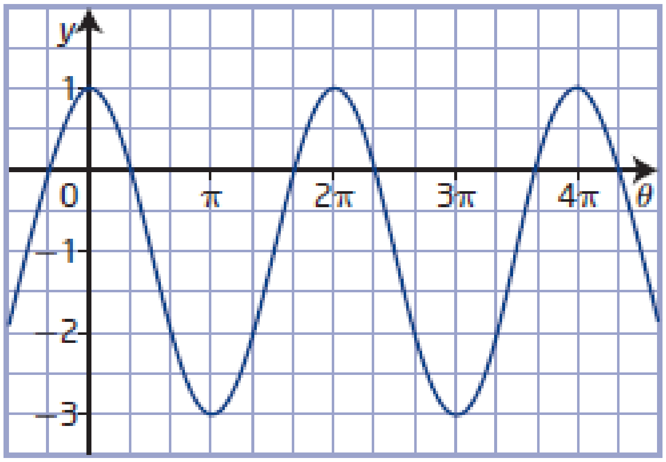
Une translation de 3 unités vers le haut alors un déplacement vertical (droite médiane de 3) et une translation de 30° vers la droite alors un déphasage.

Leçon 3 : Les transformations des fonctions sinus et cosinus

A) Ordre des transformations :

N'oubliez pas les étirements et réflexions sont faits avant les déplacements !!!

1. Représente graphiquement deux cycles de la fonction $\boldsymbol{y = -2\cos(\theta + \pi) - 1}$

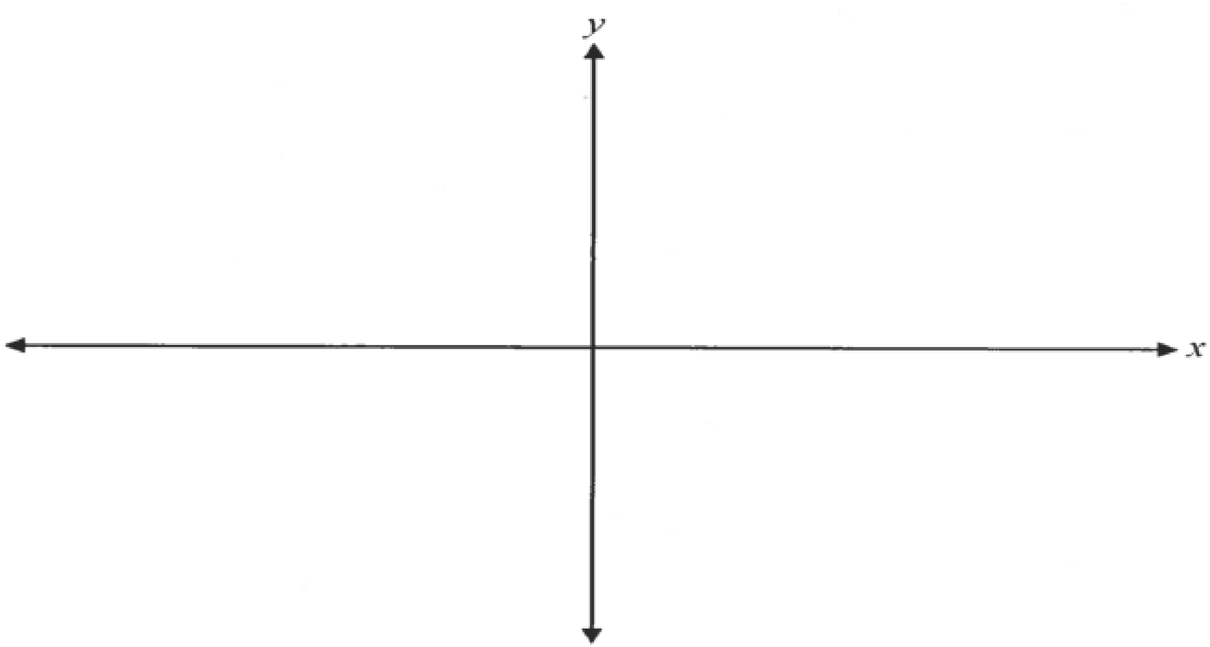


b) À l'aide du vocabulaire des transformations, compare ton graphique au graphique de $y = cos\theta$. Indique le paramètre qui correspond à chaque transformation.

a = - 2, le graphique a subi une réflexion par rapport à l'axe des θ, puis un étirement vertical par un facteur de 2.
d = -1, le graphique a subi une translation de 1 unité vers le bas. La droite médiane est définie par y = -1.
c = $-\pi$, le graphique a subi une translation de π unités vers la gauche.

(x, y) → **(x – π, -2y – 1)**
(0, 1) → **(-π, -3)**
($\frac{\pi}{2}$, 0) → (-$\frac{\pi}{2}$, -1)
(π, −1) → (0, 1)
($\frac{3\pi}{2}$, 0) → ($\frac{\pi}{2}$, -1)
(2π, 1) → (π, -3)

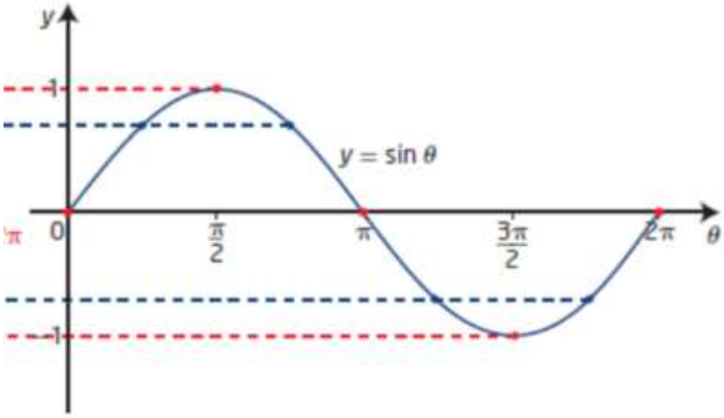
2. a) Trace au moins un cycle de $y = 3sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2$. $y = 3sin\left(2(x - \frac{\pi}{4})\right) + 2$



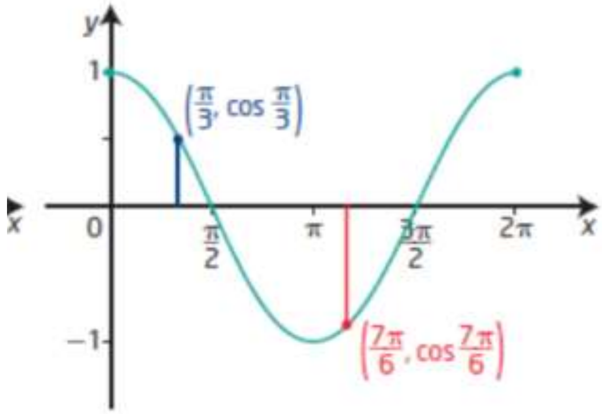
Ceci peut être très compliqué !! Alors il y a des trucs !!!

y = **sin θ :**

Observations de **sin θ :**



Observations de **cos θ :**



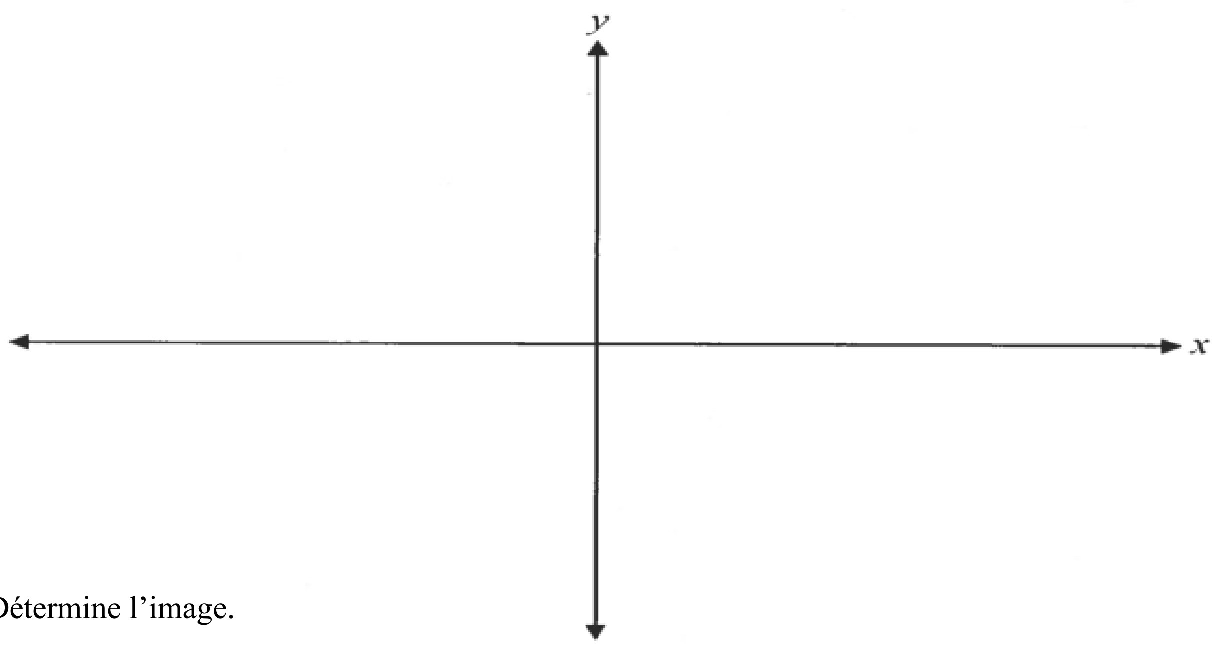
L'ordonnée à l'origine c'est la droite médiane

l'ordonnée à l'origine c'est un max.

Il y a 4 sections dans les deux graphiques de sin et cos.

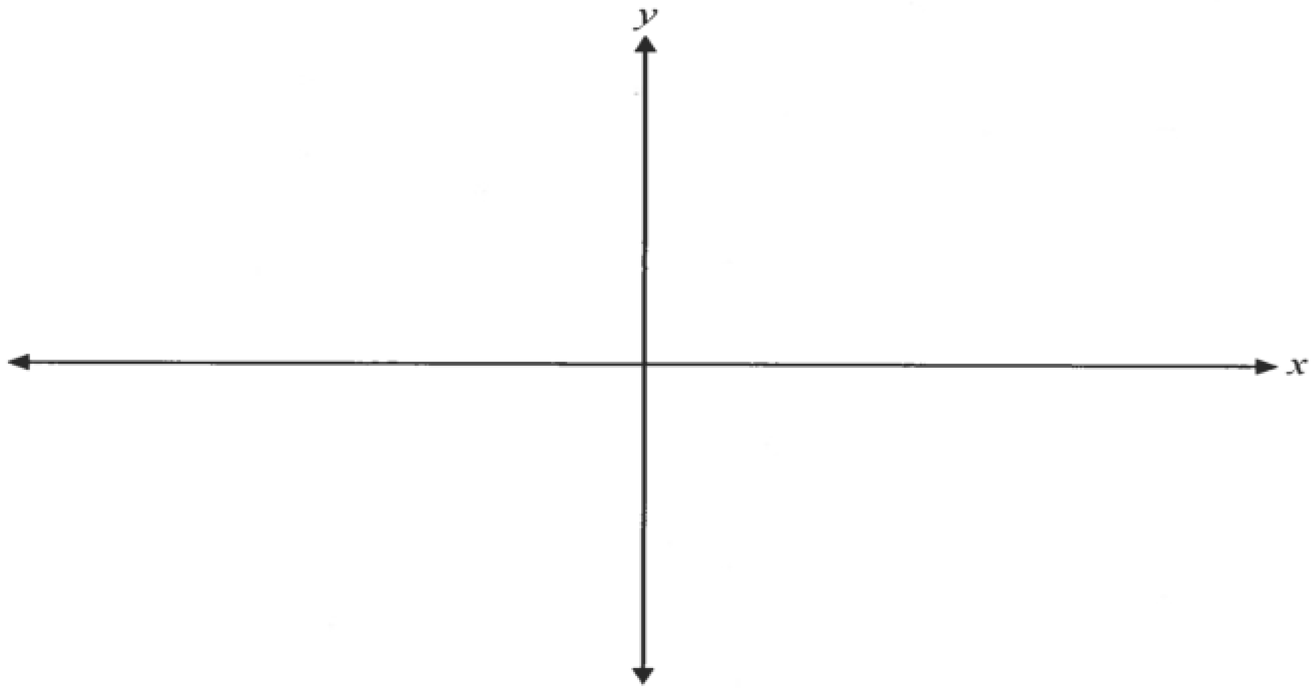
3. a) Trace au moins un cycle de $y = 3sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right) + 2$.

$y = 3sin\left(2(x - \frac{\pi}{4})\right) + 2$



b) Détermine l'image.

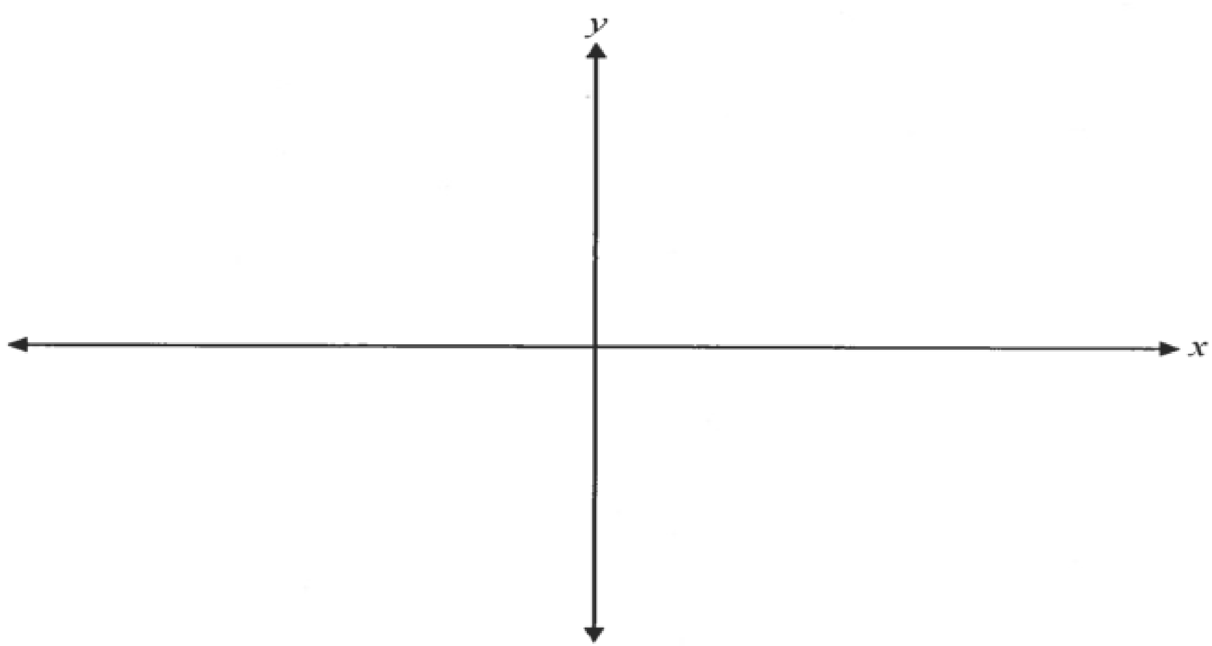
4. Trace au moins 2 cycles de la fonction $y = 2cos4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$.



5. Trace les graphiques pour au moins deux cycles :

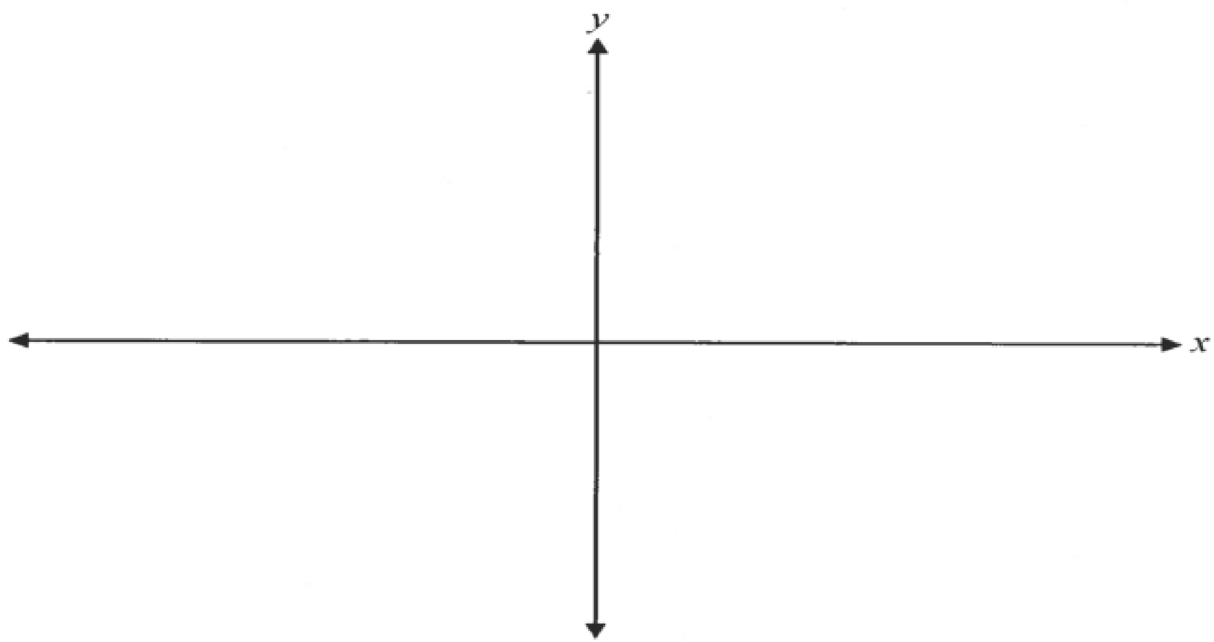
a)

$$h(t) = \cos\left[\frac{\pi}{30}(t - 15)\right]$$



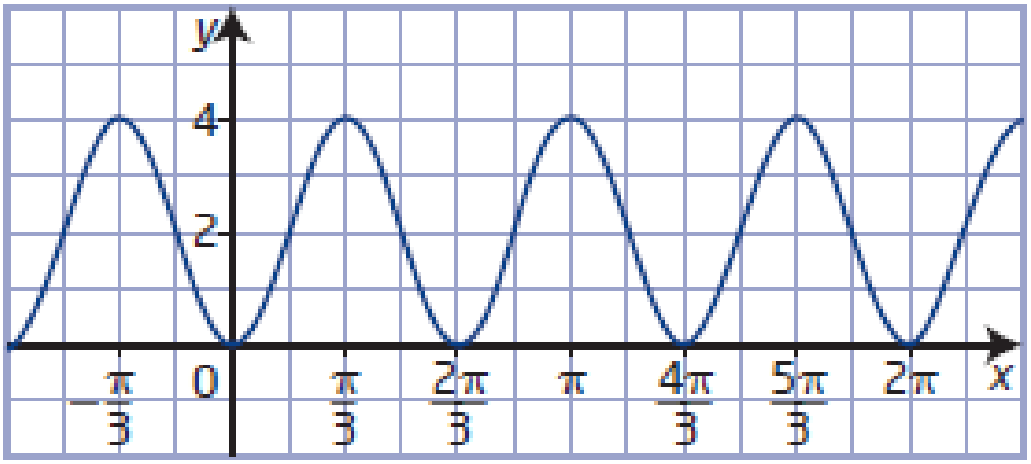
b)

$$f(x) = 12\sin\left[\frac{\pi}{3}(x-2)\right] - 14$$



B) Déterminer une équation à partir d'un graphique

6. Voici le graphique de la fonction
y = f(x).
Détermine l'équation de sinus et de cosinus.



Amplitude $= \frac{valeur\ maximale - valeur\ minimale}{2}$

$\frac{4-0}{2} = 2$

Droite médiane $= \frac{valeur\ maximale + valeur\ minimale}{2}$

$= \frac{4+0}{2} = 2$

Période :

Méthode 1 : compte combien de cycle il y a durant 2π. $\frac{2\pi}{\#\ cycle} = période$ # cycle = valeur de b

Méthode 2 : regarde le graphique (compare un point max. à un max. ou min. à un min.) $\frac{2\pi}{période} = b$

Période = $\frac{2\pi}{3}$

b = $2\pi \div \frac{2\pi}{3}$

b = $2\pi \times \frac{3}{2\pi}$ = 3

Déphasage : $c = \frac{\pi}{6}$ Compare la droite médiane du graphique y = sinx au graphique donné.

$c = \frac{\pi}{3}$ Compare un valeur maximum/minimum du graphique donné.

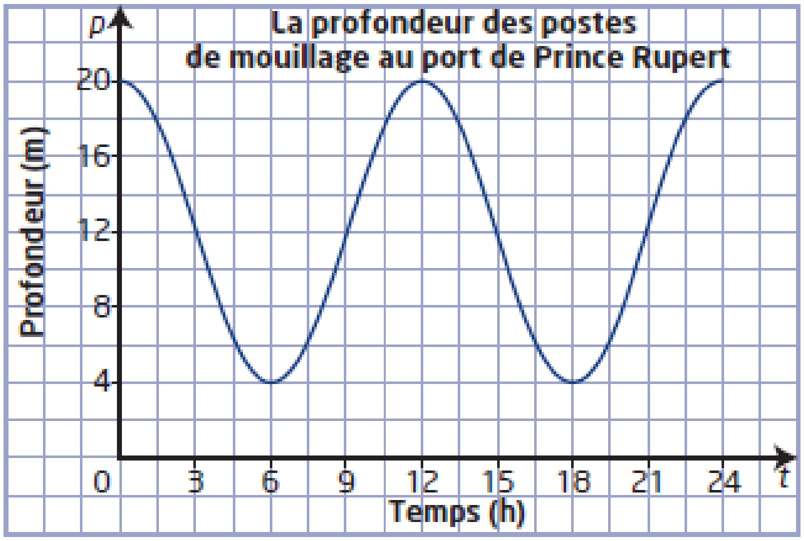
L'équation de sinus :

$y = 2sin3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

L'équation de cosinus :

$y = 2cos3\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$

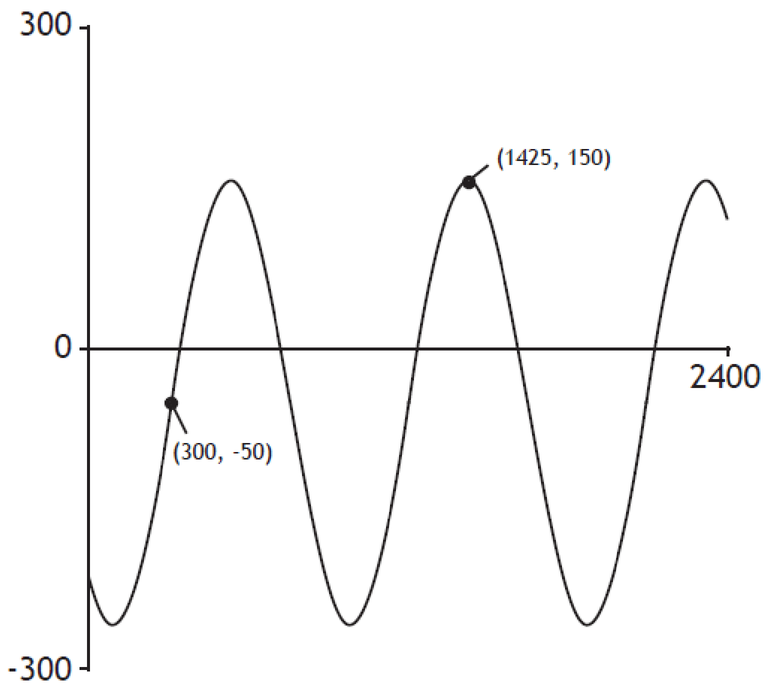
7. a) Détermine l'équation de sous la forme de y = AcosB(x – C) + D



b) À quel temps la profondeur se trouve à 20 m durant le troisième cycle ?

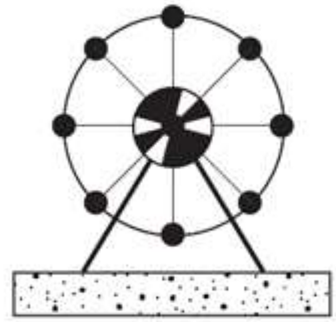
c) Détermine la hauteur après 33 heures ?

8. Détermine les équations de sinus et de cosinus.



9. Une grande roue avec un rayon de 15 m fait une rotation chaque 100 secondes. Les passagers vont monter la grande roue sur une plate-forme qui se trouve à 1 mètre par-dessus la terre.

a) Trace le graphique qui représente deux rotations de la grande roue.



b) Écris une équation de cosinus qui représente la hauteur (m) en fonction du temps (s).

A : ______ B : ______ C : ______ D : ______

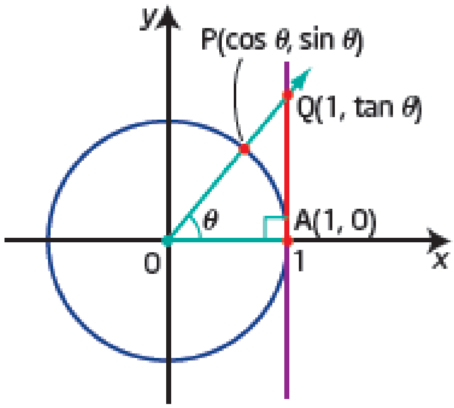
c) Détermine la hauteur du passager après :

150 secondes : ______________

300 secondes : ______________

d) Détermine le temps durant la deuxième rotation que le passager atteint 16 mètres

Leçon 4 : La fonction tangente



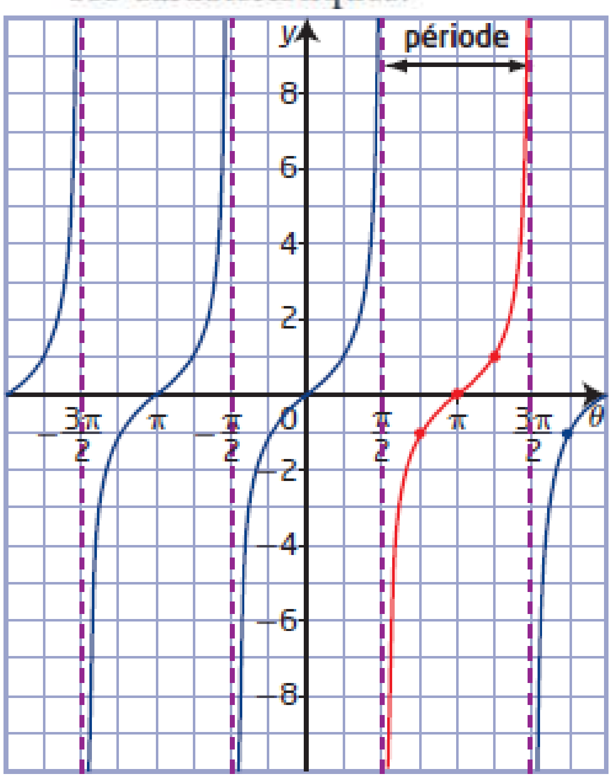
$$tan\theta = \frac{opposé}{adjacent} \qquad tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} \qquad tan\theta = \frac{y}{x}$$

alors, quand vous trouvez la tangent vous trouvez vraiment la pente d'un segment.

1. Détermine les valeurs non-permises pour la fonction $tan\theta$

1.

Trace le graphique de la fonction $y = \tan\theta$ pour $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Décris ses caractéristiques.

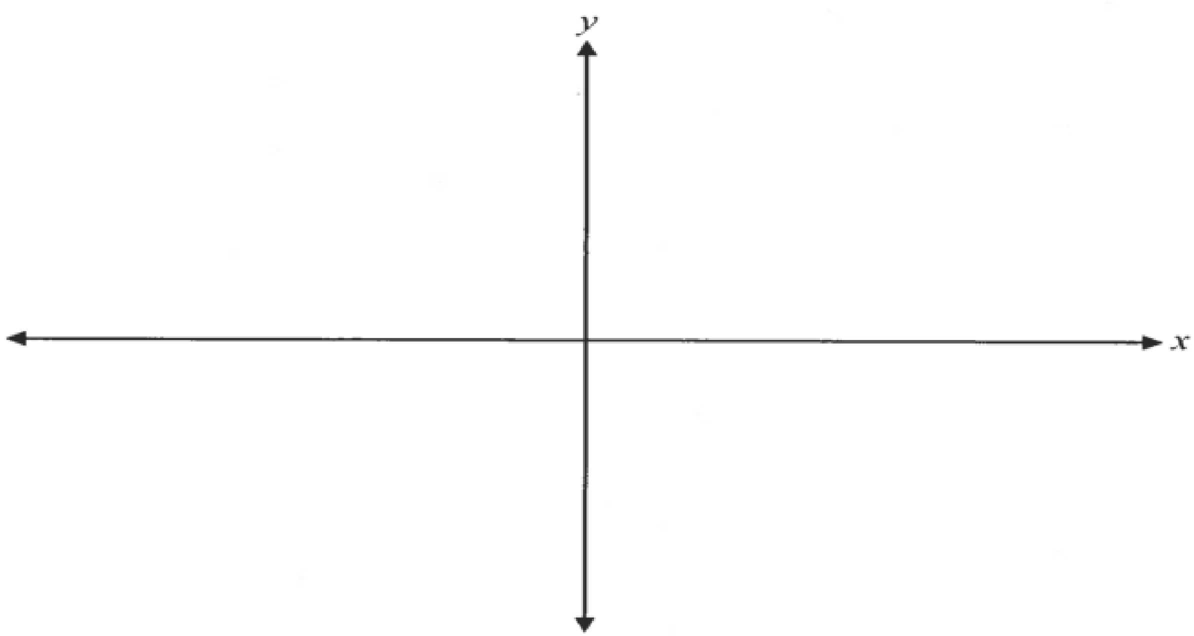


θ	$tan\theta$	θ	$tan\theta$
-2π	0	2π	0
$-\frac{7\pi}{4}$	1	$\frac{7\pi}{4}$	-1
$-\frac{3\pi}{2}$	∅	$\frac{3\pi}{2}$	∅
$-\frac{5\pi}{4}$	-1	$\frac{5\pi}{4}$	1
$-\pi$	0	π	0
$-\frac{3\pi}{4}$	1	$\frac{3\pi}{4}$	-1
$-\frac{\pi}{2}$	∅	$\frac{\pi}{2}$	∅
$-\frac{\pi}{4}$	-1	$\frac{\pi}{4}$	1
0 rads	0		0

- La courbe **n'est pas continue**. Elle est discontinue en $\theta = -\frac{3\pi}{2}, \theta = -\frac{\pi}{2}, \theta = \frac{\pi}{2}, \theta = \frac{3\pi}{2}$, où la fonction est non définie. Alors les **<u>asymptotes verticales</u> se trouve a $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n}$, où n $\in \boldsymbol{Z}$**
- $tan\theta = 0$, lorsque $\theta = -2\pi, \theta = -\pi, \theta = 0, \theta = \pi, \theta = 2\pi$.

  Alors les **abscisses/zéros se trouve à x = $\boldsymbol{\pi n}$, $\boldsymbol{o}$ù $\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}$**
- $tan\theta = 1$, lorsque $\theta = -\frac{7\pi}{4}, \theta = -\frac{3\pi}{4}, \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = \frac{5\pi}{4}$. Alors $\theta = \frac{\pi}{4} + \pi n$, où n $\in Z$
- $tan\theta = -1$, lorsque $\theta = -\frac{5\pi}{4}, \theta = -\frac{\pi}{4}, \theta = \frac{3\pi}{4}, \theta = \frac{7\pi}{4}$. Alors $\theta = \frac{3\pi}{4} + \pi n$, où n $\in Z$
- Le graphique de $tan\theta$ n'a pas d'amplitude, car il n'a ni maximum ni minimum.
- **L'image de y = $\boldsymbol{tan\theta}$ est $\{\boldsymbol{y \in R}\}$.**
- **La période de $\boldsymbol{tan\theta}$ est $\boldsymbol{\pi}$.** **Alors si y = tan2x, la période sera $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$.**
- Le **domaine de $\boldsymbol{y = tan\theta}$ *est* $\left\{\boldsymbol{\theta \in R \middle| \theta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi} \text{ où n} \in \boldsymbol{Z}.\right\}$**
- L'ordonnée à l'origine est y = 0.

2. Trace le graphique de y = secx



b) Indique la période.

c) Écrit la solution générale pour les asymptotes

d) Indique le domaine et l'image.

3. Trace le graphique pour au moins 2 cycle pour y = cotx.