Pré-Calcul 40S

Enseignante :
Mme. Layton

Nom de l'élève :

____

Note d'Unité :

Les Fonctions Rationnelles

Les Opérations sur les Fonctions

Table des matières

PRÉ-CALCUL 40S

Unité

LES FONCTIONS RATIONNELLES

Revue Mathé 11e

A) Les Valeurs non permises/restrictions (On ne peut pas diviser par 0!)

1. Quelles sont les valeurs non permises des expressions :

a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{2x+6}$ c) $\frac{x+2}{4x-9}$

2. Simplifie l'expression et nomme les restrictions (valeurs non permises).

a) $\frac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)}$ b) $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ c) $\frac{2x-5}{2x^2-3x-5}$

3. Effectue la division. Écris la réponse sous forme irréductible. Indique toutes les valeurs non permises.

a) $\frac{6x-18}{5x-x^2} \div \frac{12x^2-12}{2x^2-8x-10}$

b) $\frac{x^2-4}{x^2-4x} \div \frac{x^2+x-6}{x^2+x-20}$

c) $\frac{2x^2-7x-15}{2x^2-10x} \div \frac{4x^2-9}{6} \times (3-2x)$

4. Trouve l'équation de l'asymptote de la fonction suivante : $f(x) = \frac{1}{x+5}$

a) x = -5 b) x = 5 c) $x \neq 5$ d) $x \neq -5$

5. Le point (-3, 1) se trouve sur le graphique $y = \frac{1}{f(x)}$. Quel était le point qui se trouvait sur le graphique y = f(x) ?

a) (-3, -1) b) (-3, 1) c) $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ d) $\left(-\frac{1}{3}, -1\right)$

6. Trouve l’équation de(s) asymptote(s) des graphiques suivants : f(x) = $\frac{1}{x^2-5x-24}$

___

7. Trouve l’équation de l’asymptote vertical de f(x) = $\frac{1}{x^2+4}$

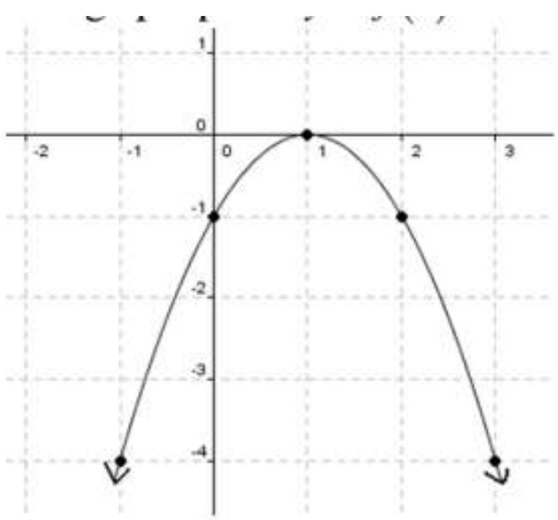
___

8. Trouve le(s) valeur(s) non permises : f(x) = $\frac{x+4}{(3x-4)(x+4)}$

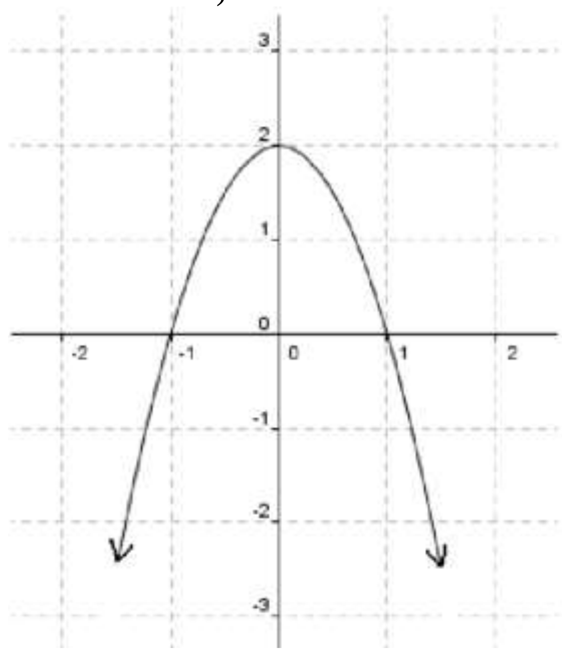
___

9. i) Voici le graphique de y = f(x). Trace le graphique de y = $\frac{1}{f(x)}$.

a)



b)

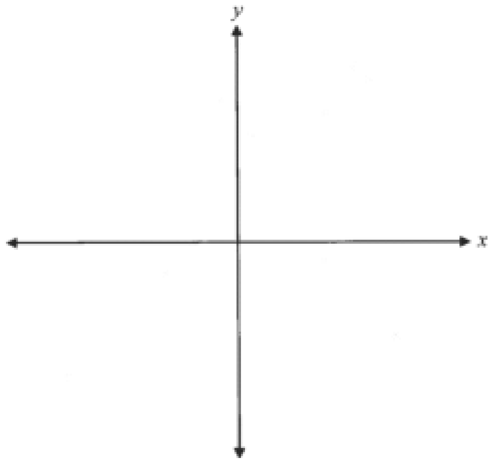


ii) Détermine les points invariants pour les deux fonctions.

10. Détermine le domaine et l’image de la fonction F(x) = $\frac{1}{2x-3}$.

Domaine : ______________________ Image : _________________________________

11. a) Étant donné f(x) = x + 3 trace le graphique de y = $\frac{1}{f(x)}$. Faites certain de bien étiqueter vos graphiques !!!



b) Trouve l'ordonné à l'origine de la fonction inverse.

c) Trouve les points invariants.

12. Résous chaque équation algébriquement.

a) $30g - 4g^2 = 0$

b) $6fg - 8g^2 = 0$

c) $x^2 - 6x + 5 = 0$

d) $2x^2 + 11x + 5 = 0$

e) $6a^2 - 11a + 3 = 0$

f) $20x^2 - 45 = 0$

g) $x^2 - 14x + 49 = 0$

h) $x^2 - 6x + 7 = 0$

Leçon 1 : Les Fonctions Rationnelles et leurs transformations

Fonction rationnelle :

- Une fonction qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, où p(x) et q(x) sont des polynômes et q(x) ≠ 0.
- Exemples : $y = \frac{20}{x}$, C(n) = $\frac{100+2n}{n}$ et f(x) = $\frac{3x^2+4}{x-5}$

Directives pour représenter graphiquement des fonctions rationnelles. f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$

Si p(x) et q(x) sont des polynômes n'ayant aucun facteur commun.

1. Trouve l'ordonnée à l'origine. (0, y)

2. Trouve les zéros du numérateur en résolvant l'équation p(x) = 0.

3. Identifie les asymptotes verticales (x) (valeurs non permises du dénominateur) et les points de discontinuités.

4. Trouvez et tracez l'asymptote horizontale (le cas échéant) en utilisant la règle suivante pour trouver l'asymptote horizontale :

La représentation graphique de f(x) a au maximum une asymptote horizontale.

   a) **Si le degré de p(x) est inférieur au degré de q(x), alors la droite y = 0 est l'asymptote horizontale. Exemple :** $y = \frac{x}{2x^2-4}$ **ou** $y = \frac{1}{2x-4}$

   b) **Si le degré de p(x) = degré de q(x), alors la droite y = a/b est une asymptote horizontale où a est le coefficient principal de p(x) et b est le coefficient principal de q(x).**
   Exemple : $y = \frac{3x}{x-4}$. **y = 3/1 = 3**

   c) **Si le degré de p(x) est supérieur au degré de q(x), la représentation graphique ne comporte aucune asymptote horizontale. Exemple :** $y = \frac{3x^2}{x-4}$.

5. Trouve des points de marquage pour savoir les sections que vos courbes se trouvent.

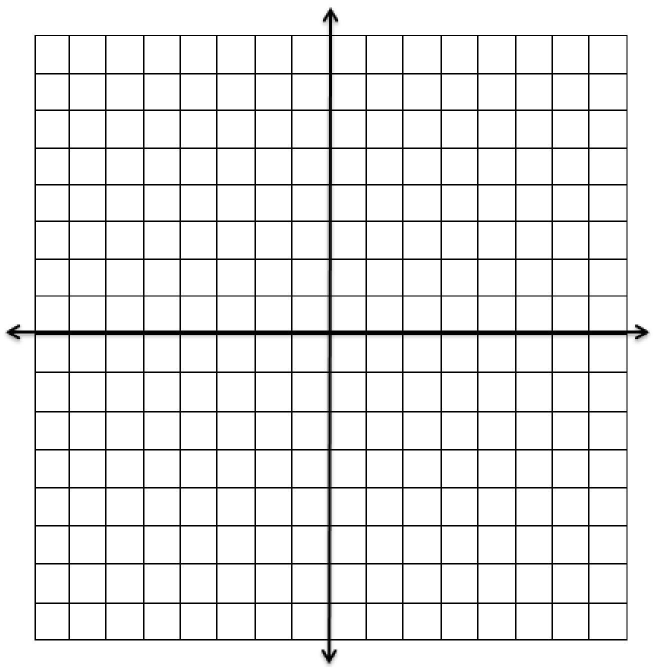
6. Utilisez l'analyse des signes pour illustrer là où la portion de la fonction est négative et là où elle est positive.

7. Utilisez des courbes lisses pour compléter la représentation graphique entre les asymptotes verticales et au-delà.

A) Tracer le graphique d’une fonction rationnelle avec un coefficient sur le numérateur et polynôme sur le dénominateur

Exemple 1 :

Trace le graphique y = $\frac{6}{x-2}$



1) Ordonnée :

2) Abscisse :

3) Asymptote vertical :

4) Asymptote horizontal :

5) Points de marquage :

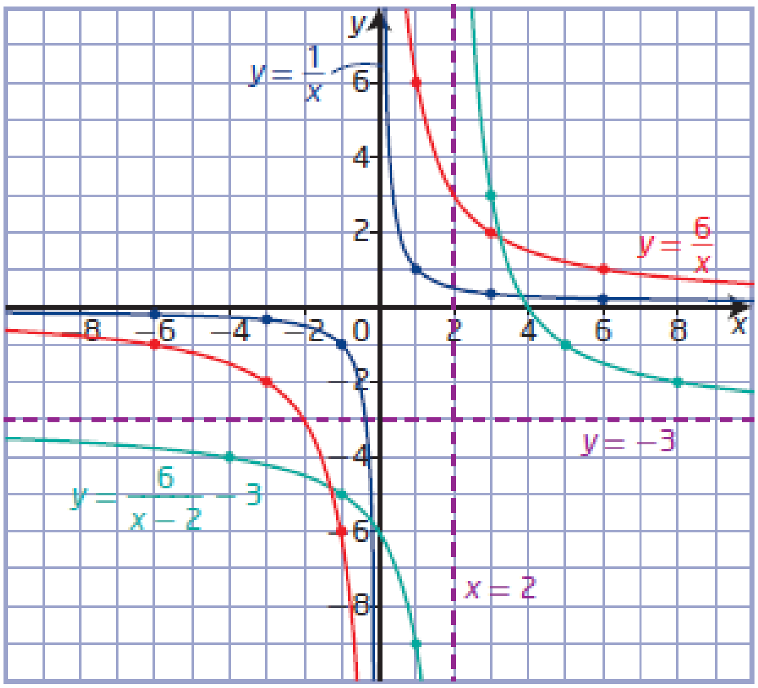
B) Tracer le graphique d’une fonction rationnelle à l’aide de transformations

Pour obtenir le graphique d’une fonction rationnelle de la forme $y = \frac{a}{x-h} + k$ à partir du graphique de $y = \frac{1}{x}$, effectue un étirement vertical par un facteur de a, puis une translation horizontale de h unités et une translation verticale de k unités.

- Il y aura une asymptote verticale en $x = h$.
- Il y aura une asymptote horizontale en $y = k$.
- Savoir où se trouvent les asymptotes et les tracer en premier peut t’aider à représenter graphiquement une fonction et à l’analyser.

Exemple 2 :

Esquisse le graphique de $y = \dfrac{6}{x-2} - 3$ à l'aide de transformations et détermine les caractéristiques importantes.



$$y = \frac{a}{x-h} + k$$

Caractéristiques	$y = \dfrac{6}{x-2} - 3$
Valeur non permise	$x = 2$
Comportement près de la valeur non permise	Quand x tend vers 2, $\lvert y \rvert$ devient très grande.
Comportement à l'infini	Quand $\lvert x \rvert$ devient très grande, y tend vers -3.
Domaine	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
Image	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \neq -3\}$
Équation de l'asymptote verticale	$x = 2$
Équation de l'asymptote horizontale	$y = -3$

C) Représente graphiquement une fonction rationnelle qui comporte une expression de degré 1 au numérateur et au dénominateur

Représente graphiquement la fonction $y = \dfrac{4x-5}{x-2}$. Détermine toute asymptote et toute coordonnée à l'origine.

1) Détermine **l'ordonnée à l'origine** en remplaçant x par 0.

$$y = \frac{4x-5}{x-2}$$
$$y = \frac{4(0)-5}{0-2}$$
$$y = 2{,}5$$

L'ordonnée à l'origine est 2,5.

2) Détermine **l'abscisse à l'origine** en remplaçant y par 0.

$$y = \frac{4x-5}{x-2}$$
$$0 = \frac{4x-5}{x-2}$$
$$(x-2)(0) = (x-2)\left(\frac{4x-5}{x-2}\right)$$
$$0 = 4x-5$$
$$x = 1{,}25$$

L'abscisse à l'origine est 1,25.

3) Asymptote vertical :
x – 2 = 0
x = 2

4) Asymptote horizontal (règle 4b)
y = 4/1 = 4

5) et 6)
Utilise analyse des signes (ou points de marquage) pour tester les sections à la gauche et à la droite de l'asymptote verticale.

Si x = 3

$$y = \frac{4(3)-5}{3-2} = 7$$

si x = 1

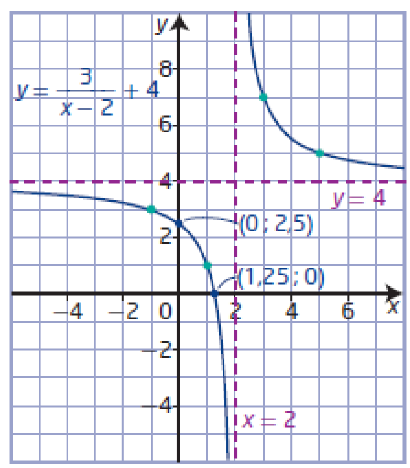
$$y = \frac{4(1)-5}{1-2} = 1$$

Si x = 5

$$y = \frac{4(5)-5}{5-2} = 5$$

si x = -1

$$y = \frac{4(-1)-5}{-1-2} = 3$$



Domaine : $\{x \in R \mid x \neq 2\}$ Image : $\{y \in R \mid y \neq 4\}$

Pour écrire l'équation sous la forme qui démontre les transformations.

Réécris l'équation de la fonction sous la forme $y = \dfrac{a}{x-h} + k$.

Insère h, k et **une coordonnée pour (x, y) pour trouver a**.

(ordonnée à l'origine : (0; 2,5)

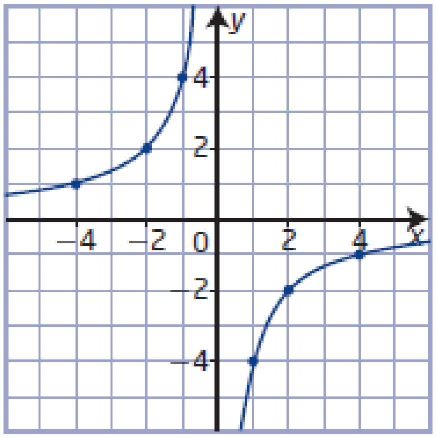
$$2{,}5 = \frac{a}{0-2} + 4$$
$$-1{,}5 = \frac{a}{-2}$$
$$a = 3$$

$$\boldsymbol{y = \frac{3}{x-2} + 4}$$

D) L’équation d’une fonction rationnelle.

Détermine l’équation de la fonction rationnelle.

a)

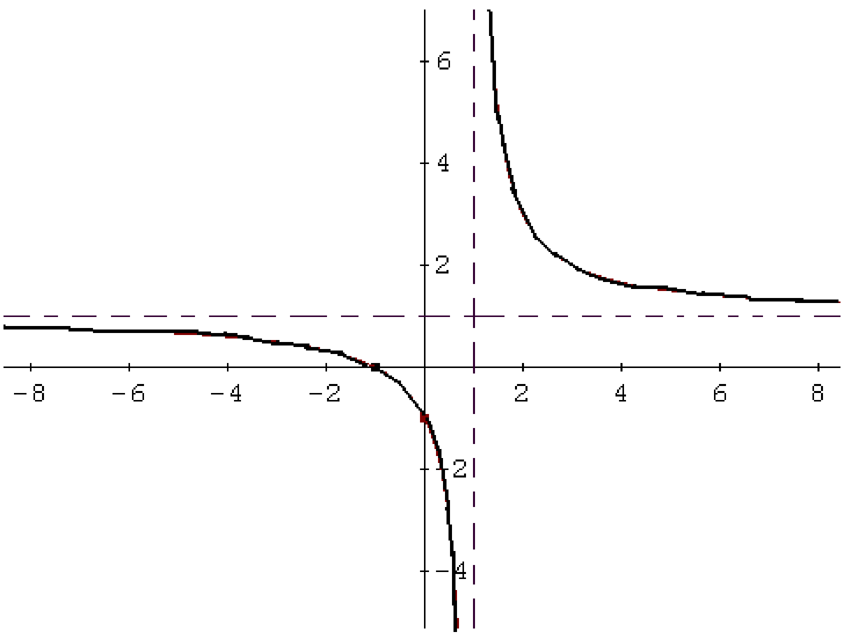


1) Trouve les asymptotes horizontales et verticales.

2) Trouve les étirements

$y = -\frac{4}{x}$

b)



$y = \frac{a}{x-h} + k.$

$0 = \frac{a}{-1-1} + 1$

$-1 = \frac{a}{-1-1}$

$-1 = \frac{a}{-2}$

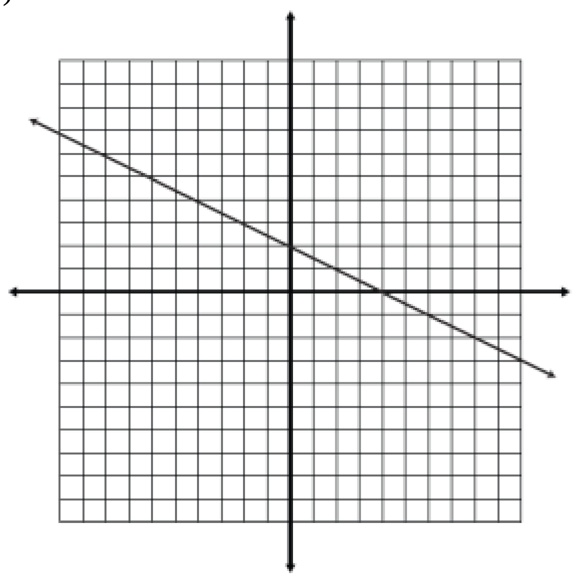
a = 2

$y = \frac{2}{x-1} + 1$

Leçon 2 : Les Fonctions Rationnelles (inverses) d'un graphique

1. Soit les graphiques de f(x), trace le graphique de $y = \frac{1}{f(x)}$ et indique le domaine et l'image pour chacun des fonctions inverses.

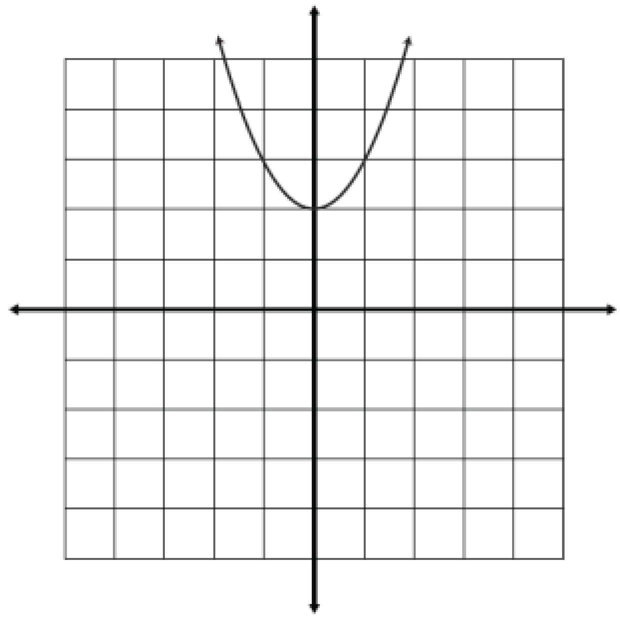
a)



Domaine : ______________________________

Image : ________________________________

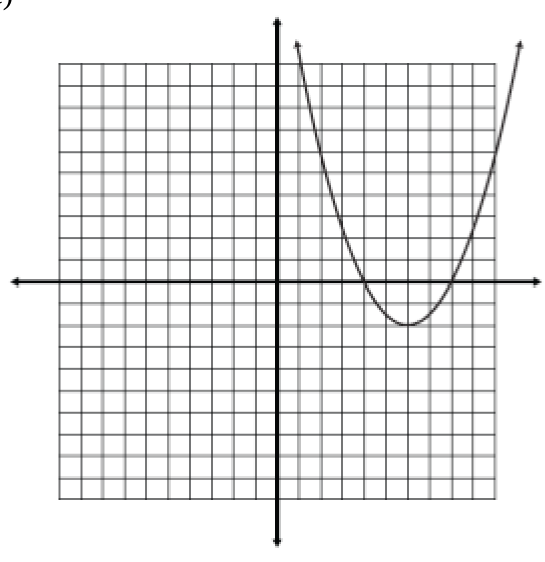
b)



Domaine : ______________________________

Image : ________________________________

c)

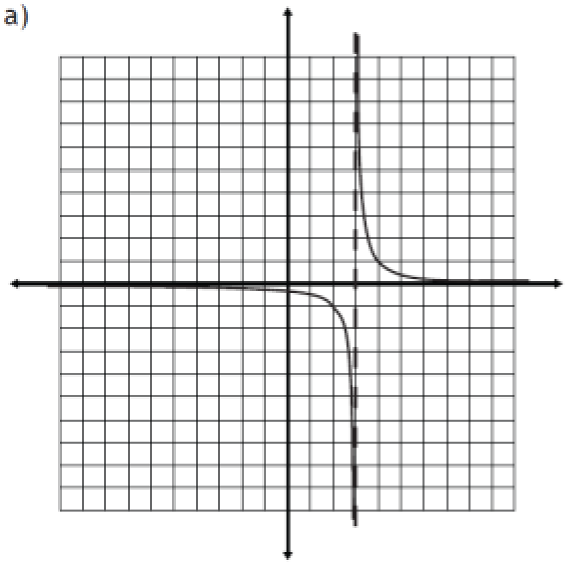


Domaine : ______________________________

Image : ________________________________

2. Étant donnée le graphique de $y = \frac{1}{f(x)}$, trace le graphique de y = f(x).

a)



Leçon 3 : Les fonctions rationnelles avec des points de discontinuité

Point de discontinuité :

- Un point de coordonnées (x, y) où le graphique d'une fonction n'est pas continu.
- Si on peut diviser le numérateur et le dénominateur d'une fonction rationnelle par un facteur commun qui inclut une variable, cette fonction comporte un point de discontinuité. (C'est encore une valeur non permise.)
- On représente tout point de discontinuité par un cercle vide.
- Aussi appelé parfois « trou ».

Représenter graphiquement une fonction rationnelle qui comporte un point de discontinuité.

Il est plus facile d'analyser et de représenter graphiquement une fonction rationnelle si tu simplifies algébriquement son équation. Alors factorise le numérateur et dénominateur.

1. Représente graphiquement la fonction $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x-3}$. Détermine le domaine et l'image.

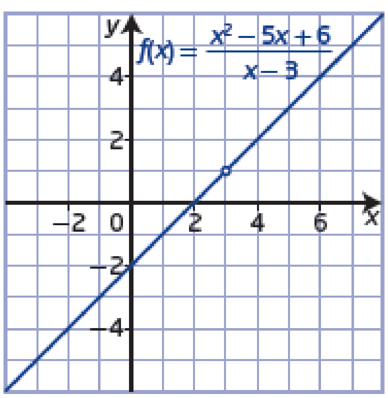
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)\overset{1}{\cancel{(x-3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}$$

$$f(x) = x - 2\,;\ x \neq 3$$

Le graphique de f(x) est identique au graphique de y = x – 2, sauf en (3, y), où il y a un point de discontinuité. Il faut trouver la valeur de y pour la valeur de x en insérant x dans l'équation simplifiée (pour le point de discontinuité).

y = x – 2 Le point de discontinuité est en (3, 1).
y = 3 – 2
y = 1



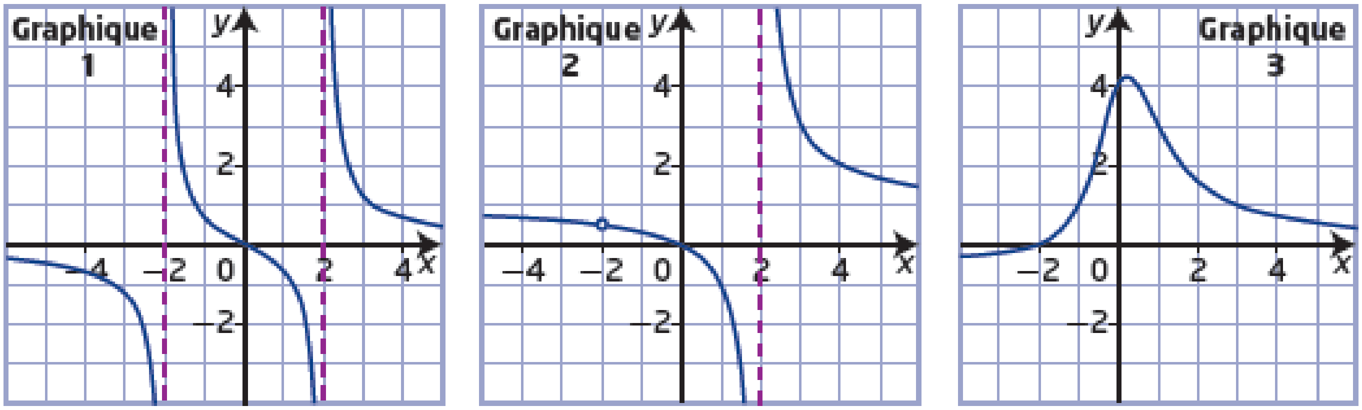
La valeur de f(x) tend vers 1 à mesure que x s'approche de 3 par un côté ou l'autre, même si la fonction est non définie quand x vaut exactement 3.

Domaine : $\{x \in R \mid x \neq 3\}$

Image : $\{y \in R \mid y \neq 1\}$

2. Associe l'équation de chaque fonction rationnelle au graphique le plus approprié. Explique tes choix.

$$A(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} \qquad B(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 1} \qquad C(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$



$$A(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$$
$$A(x) = \frac{x(x + 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

- Il y a une asymptote verticale en $x = 2$.
- Il y a un point de discontinuité en $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$.
- Il y a une abscisse à l'origine : 0.

Ainsi, le graphique 2 représente $A(x)$.

$$B(x) = \frac{2x + 4}{x^2 + 1}$$
$$B(x) = \frac{2(x + 2)}{x^2 + 1}$$

- Il n'y a pas d'asymptotes verticales ni de points de discontinuité.
- Il y a une abscisse à l'origine : -2.

Ainsi, le graphique 3 représente $B(x)$.

$$C(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$
$$C(x) = \frac{2x}{(x - 2)(x + 2)}$$

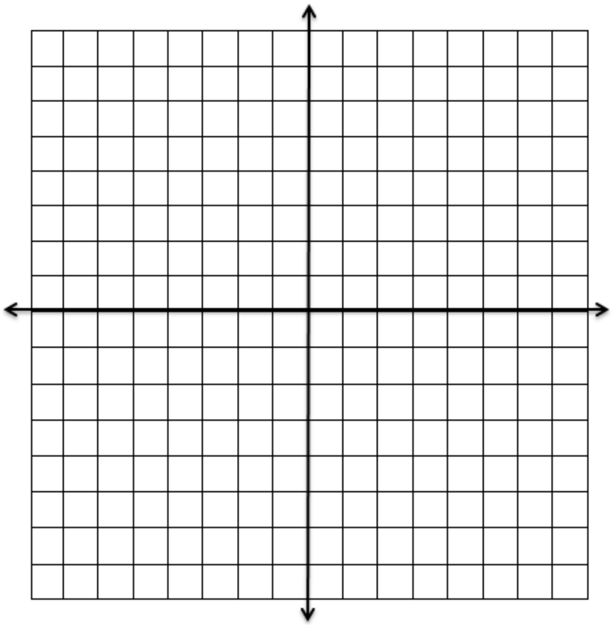
- Il y a des asymptotes verticales en $x = -2$ et en $x = 2$.
- Il n'y a aucun point de discontinuité.
- Il y a une abscisse à l'origine : 0.

Ainsi, le graphique 1 représente $C(x)$.

3. Trace les graphiques des fonctions suivantes.

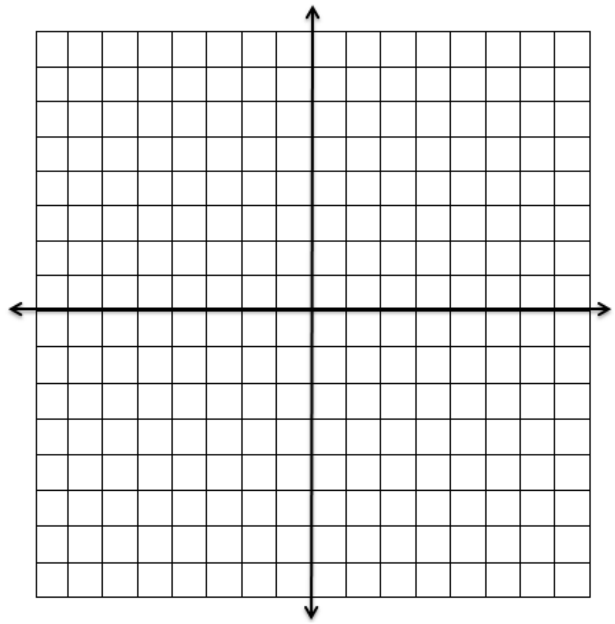
a)

$$y = \frac{x + 4}{x^2 - 16}$$



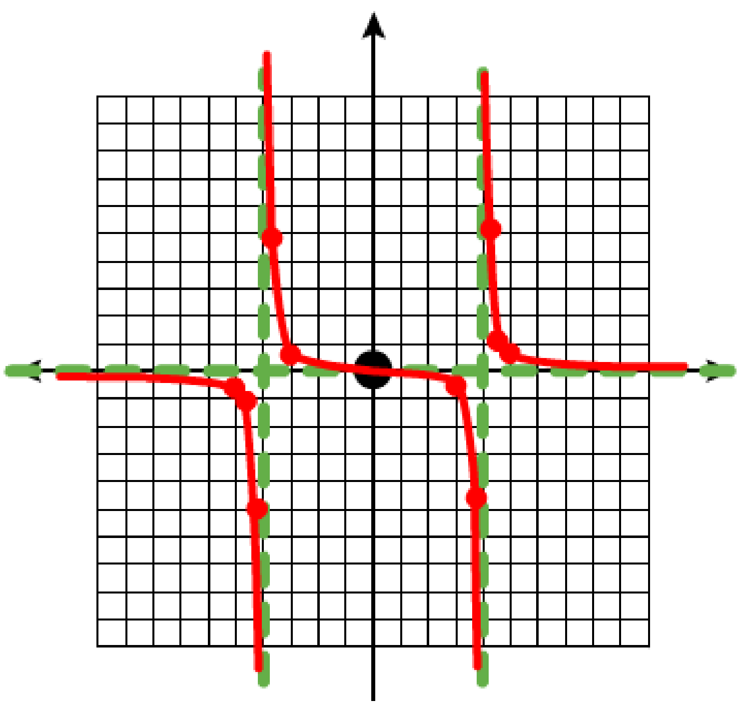
b)

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 - 2x}$$



En plus

$$y = \frac{x}{x^2 - 16}$$



PRÉ-CALCUL 40S

Unité

LES OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONS

Revue

1. Soit les fonctions $f(x) = 2x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$. Détermine la valeur de chaque expression.

a) $f(-3)$ b) $g(-1)$ c) $g(0) + f(0)$

2. Additionne les expressions de chaque paire, puis simplifie le résultat.

a) $3x - 5$ et $1 - x$ b) $-2x$ *et* $-4x^2 + x - 1$

3. Simplifie chaque expression.

a) $(2x^2 - 8x + 7) - (x^2 - 3x - 1)$ b) $(-2x^2 + 3x) - (1 - 2x + 3x^2)$

4. Simplifie chaque expression.

a) $x(3x^2 - x + 1)$ b) $(x - 7)(3x - 1)$

5. Indique toute valeur non permise de x, puis simplifie chaque expression.

a) $\frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ b) $\frac{3x^2 + 2x - 1}{3x - 1}$ c) $(2x^2 - 3x + 1) \div (x - 1)$

Leçon 1 : La somme et la différence des fonctions

Pour créer de nouvelles fonctions, tu peux effectuer des opérations sur les fonctions.

La somme de fonctions	La différence de fonctions
$h(x) = f(x) + g(x)$	$h(x) = f(x) - g(x)$
$h(x) = (f + g)(x)$	$h(x) = (f - g)(x)$

A) La Somme

1) Déterminer la somme de deux fonctions à partir des équations.

Exemple 1 :

Soit les fonctions $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$.

a) Détermine l'équation de la fonction $h(x) = (f + g)(x)$ ou $f(x) + g(x)$

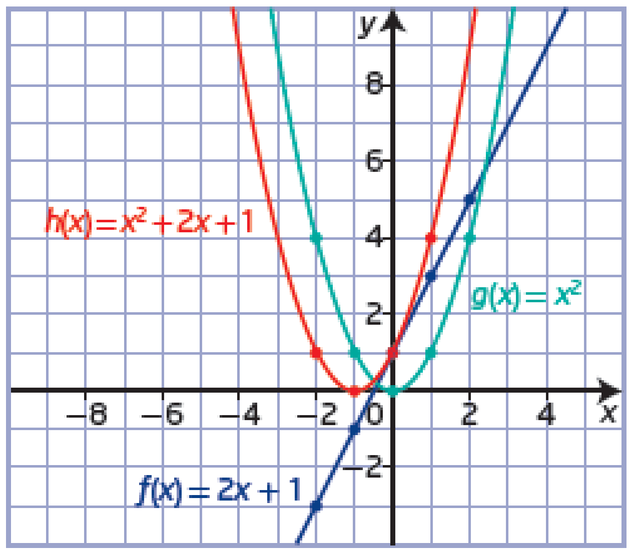
$h(x) = (f + g)(x)$ ou $h(x) = f(x) + g(x)$

$h(x) = 2x + 1 + x^2$ — $h(x) = x^2 + 2x + 1$

$h(x) = (x + 1)(x + 1) = (x + 1)^2$

b) Représente graphiquement f(x), g(x) et h(x) dans le même plan cartésien.

x	$f(x) = 2x + 1$	$g(x) = x^2$	$h(x) = x^2 + 2x + 1$
−2	−3	4	1
−1	−1	1	0
0	1	0	1
1	3	1	4
2	5	4	9



d) Détermine la valeur de f(4), de g(4) et de h(4).

$f(x) = 2x + 1$ — $g(x) = x^2$

$f(4) = 2(4) + 1 = 9$ — $g(4) = (4)^2 = 16$

$h(x) = x^2 + 2x + 1$

$h(4) = 4^2 + 2(4) + 1$ — ou $h(x) = f(x) + g(x)$

$h(4) = 16 + 8 + 1$ — $h(4) = f(4) + g(4)$

$h(4) = 25$ — $h(4) = 9 + 16 = 25$

c) Indique le domaine et l'image de h(x).

Le domaine de la fonction $f(x) = 2x + 1$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

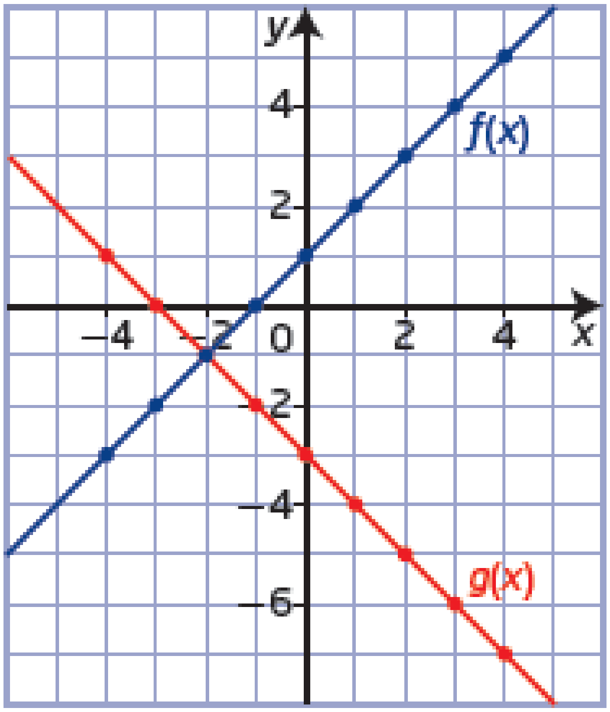
Le domaine de la fonction $g(x) = x^2$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

Le domaine de la fonction $h(x) = (f + g)(x)$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$. Il comprend toutes les valeurs qui appartiennent à la fois au domaine de $f(x)$ et au domaine de $g(x)$.

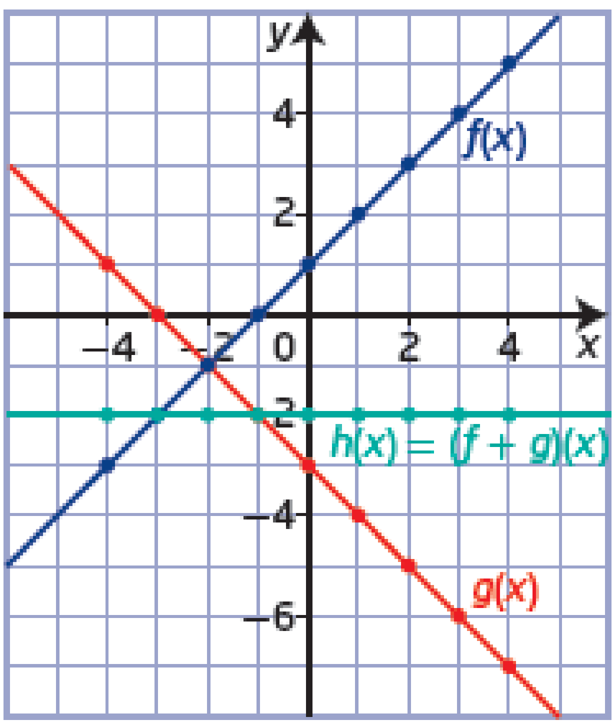
L'image de $h(x)$ est $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

2) Détermine la somme de deux fonctions à partir des graphiques.

Exemple 2 :
Trace le graphique de h(x) = (f + g)(x) à partir des graphiques de f(x) et de g(x).
Trouve les valeurs de y pour chaque valeurs de x et additionne les valeurs de y.
(Les x ne changent pas !!)
CRÉER UN TABLE DE VALEURS !!!!!!!



x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x) = (f + g)(x)$
−4	−3	1	$-3 + 1 = -2$
−3	−2	0	$-2 + 0 = -2$
−2	−1	−1	$-1 + (-1) = -2$
−1	0	−2	$0 + (-2) = -2$
0	1	−3	$1 + (-3) = -2$
1	2	−4	$2 + (-4) = -2$
2	3	−5	$3 + (-5) = -2$
3	4	−6	$4 + (-6) = -2$
4	5	−7	$5 + (-7) = -2$



B) La Différence

3) Déterminer la différence de deux fonctions à partir de deux équations.

Exemple 3 :

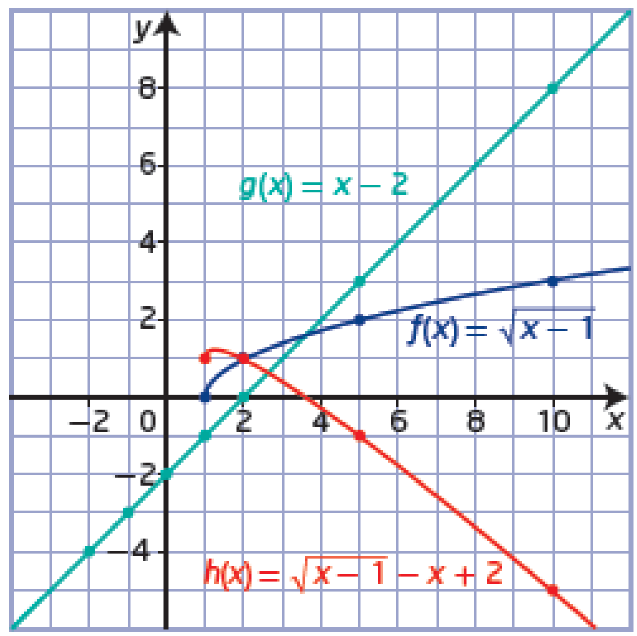
Soit les fonctions $f(x) = \sqrt{x-1}$ et g(x) = x – 2.

a) Détermine l'équation de la fonction h(x) = (f – g)(x) ou f(x) – g(x).

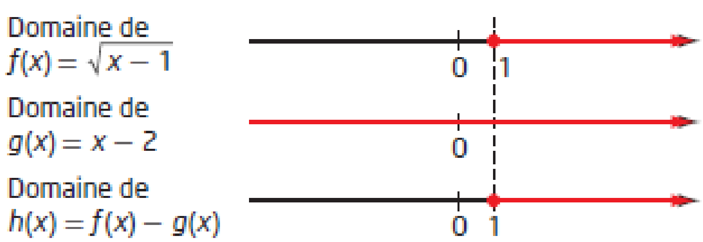
$$h(x) = (f-g)(x)$$
$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$h(x) = \sqrt{x-1} - (x-2)$$
$$h(x) = \sqrt{x-1} - x + 2 \qquad x \geq 1$$

b) Représente graphiquement f(x), g(x), et h(x) dans le même plan cartésien.

x	$f(x) = \sqrt{x-1}$	$g(x) = x - 2$	$h(x) = \sqrt{x-1} - x + 2$
−2	non définie	−4	non définie
−1	non définie	−3	non définie
0	non définie	−2	non définie
1	0	−1	1
2	1	0	1
5	2	3	−1
10	3	8	−5



c) Indique le domaine de h(x).



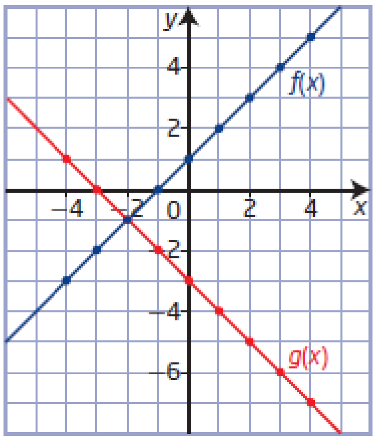
Le domaine de la fonction $f(x) = \sqrt{x-1}$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.
Le domaine de la fonction $g(x) = x - 2$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$.
Le domaine de la fonction $h(x) = (f-g)(x)$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.
Il comprend toutes les valeurs qui appartiennent à la fois au domaine de $f(x)$ et au domaine de $g(x)$.

d) À partir du graphique de h(x), détermine approximativement l'image de la fonction.

Selon le graphique, l'image de $h(x)$ semble être approximativement $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1{,}2\}$.

4) Détermine la différence de deux fonctions à partir des graphiques.

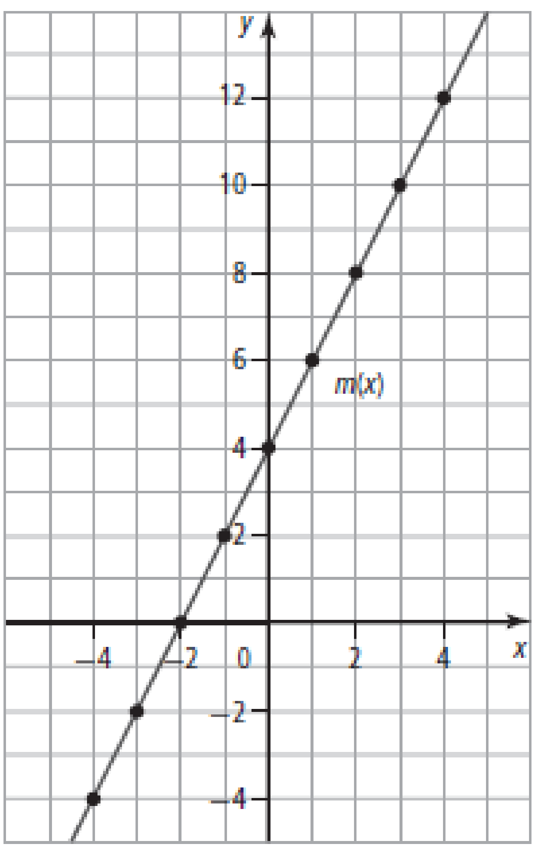
1. Trace le graphique de m(x) = (f – g)(x) à partir des graphiques de f(x) et de g(x).



f(x) = x + 1

g(x) = -x – 3

m(x) = (x + 1) – (-x – 3)
m(x) = 2x + 4



x	f(x)	g(x)	m(x) = (f – g)(x)
-4	-3	1	-3 – 1 = -4
-3	-2	0	-2 – 0 = -2
-2	-1	-1	-1 – (-1) = 0
-1	0	-2	0 – (-2) = 2
0	1	-3	1 – (-3) = 4
1	2	-4	2 – (-4) = 6
2	3	-5	3 – (-5) = 8
3	4	-6	4 – (-6) = 10
4	5	-7	5 – (-7) = 12

Leçon 2 : Le produit et le quotient de fonctions

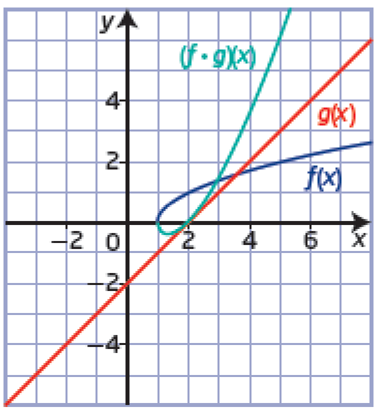
Tu peux combiner deux fonctions, $f(x)$ et $g(x)$, par la multiplication ou la division, comme suit:

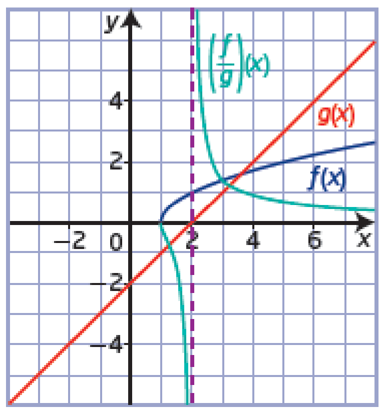
Le produit de fonctions	*Le quotient de fonctions*
$h(x) = f(x)g(x)$	$h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$
$h(x) = (f \cdot g)(x)$	$h(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

Le domaine d'un produit de fonctions est le domaine commun aux fonctions initiales. Cependant, le domaine d'un quotient de fonctions tient aussi compte du fait que la division par zéro est non définie. Ainsi, le domaine de $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ exclut toute valeur de x pour laquelle $g(x) = 0$.

Soit $f(x) = \sqrt{x - 1}$ et $g(x) = x - 2$.

Le domaine de $f(x)$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ et celui de $g(x)$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$. Par conséquent, le domaine de $(f \cdot g)(x)$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$, tandis que le domaine de $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ et } x \neq 2\}$.





Exemple

1) Déterminer le produit de fonctions.

Exemple 1 :
Soit f(x) = $(x + 2)^2 - 5$ et g(x) = 3x – 4. Détermine l'équation de $h(x) = (f \cdot g)(x)$. Indique le domaine et l'image de h(x).

$$h(x) = (f \cdot g)(x)$$
$$h(x) = f(x)g(x)$$
$$h(x) = ((x + 2)^2 - 5)(3x - 4)$$
$$h(x) = (x^2 + 4x - 1)(3x - 4)$$
$$h(x) = 3x^3 - 4x^2 + 12x^2 - 16x - 3x + 4$$
$$h(x) = 3x^3 + 8x^2 - 19x + 4$$

La fonction $f(x) = (x + 2)^2 - 5$ est quadratique et son domaine est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

La fonction $g(x) = 3x - 4$ est linéaire et son domaine est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

Le domaine de $h(x) = (f \cdot g)(x)$ est constitué de toutes les valeurs qui appartiennent à la fois au domaine de $f(x)$ et au domaine de $g(x)$.

Par conséquent, le domaine de la fonction cubique $h(x) = 3x^3 + 8x^2 - 19x + 4$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$. Son image est $\{y \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 2 :

Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{4x-5}$. Détermine l'équation de h(x) = f(x)g(x). Indique le domaine et l'image de h(x).

h(x) = $x^2\sqrt{4x-5}$ $\quad \sqrt{4x-5} \neq 0$ et $4x - 5 > 0, x > \frac{5}{4}$

Domaine : $\left\{x \in R \,\middle|\, x > \frac{5}{4}\right\}$ Image : $\left\{y \in R \,\middle|\, y > 0\right\}$

2) Déterminer le quotient de fonctions.

Exemple 3 :

Soit les fonctions $f(x) = x^2 + x - 6$ et $g(x) = 2x + 6$.

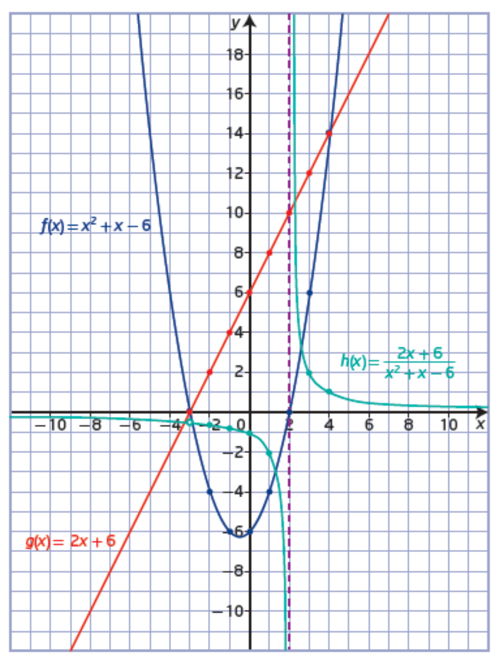
a) Détermine l'équation de la fonction $h(x) = \left(\frac{g}{f}\right)(x)$ et détermine le domaine et l'image de h(x).

$$h(x) = \frac{g}{f}(x) \; ou \; h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$h(x) = \frac{2x+6}{x^2+x-6} = \frac{2\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}(x-2)} = \frac{2}{x-2}$$

b) Représente graphiquement f(x), g(x), et h(x) dans le même plan cartésien.

x	$f(x) = x^2 + x - 6$	$g(x) = 2x + 6$	$h(x) = \frac{2}{x-2}$; $x \neq -3$ et 2
−3	0	0	non définie
−2	−4	2	$-\frac{1}{2}$
−1	−6	4	$-\frac{2}{3}$
0	−6	6	−1
1	−4	8	−2
2	0	10	non définie
3	6	12	2
4	14	14	1



c) Indique le domaine et l'image de h(x).

Point de discontinuité à x = -3, alors

h(-3) = $\frac{2}{-3-2} = -\frac{2}{5}$ = y $\quad (-3, -\frac{2}{5})$

Asymptote verticale x = 2 $\quad$ Asymptote horizontal y = 0

Domaine : $\{x \in R \mid x \neq -3 \; et \; 2\}$ Image : $\{ y \in R \mid y \neq \frac{2}{5} et \; 0\}$

Leçon 3 : La composition de fonctions

Fonction composée :

- Le résultat de la composition de f(x) et g(x), noté f(g(x)) et formé par la substitution de l'équation de g(x) dans l'équation de f(x).
- La composée f(g(x)) existe seulement pour les valeurs x du domaine de g pour lesquelles g(x) appartient au domaine de f.
- f(g(x)) se lit « f après g » ou « g suivie de f » ou « composée de g par f » ou « f de g de x ».
- La composée peut aussi être notée $(f \circ g)(x)$, ce qui se lit « f rond g ».
- Il ne faut pas confondre la composée avec le produit de fonctions :
  $(f \circ g)(x) \neq (f \cdot g)(x)$

1) Évaluer une fonction composée

Exemple 1 :
Sachant que f(x) = 4x, g(x) = x + 6 et h(x) = x^2, évalue chaque composée.
a) f(g(3))
Veut dire qu'on substitue x = 3 dans la fonction g(x) ensuite cette réponse substitue pour x dans la fonction f(x).

Méthode 1 : Évalue la fonction intérieure, puis procède par substitution

$g(x) = x + 6$
$g(3) = 3 + 6$
$g(3) = 9$

Reporte maintenant $g(3) = 9$ dans la fonction extérieure.

$f(x) = 4x$
$f(g(3)) = 4(9)$ Évalue la composée.
$f(g(3)) = 36$

Méthode 2 : Détermine l'équation de la fonction composée, puis effectue la substitution

$f(x) = 4x$
$f(g(x)) = 4(x + 6)$
$f(g(x)) = 4x + 24$

Remplace x par 3 dans $f(g(x))$ pour évaluer $f(g(3))$.

$f(g(3)) = 4(3) + 24$

$f(g(3)) = 36$

b) g(h(-2))

$h(x) = x^2$

$h(-2) = (-2)^2$

$h(-2) = 4$

Reporte $h(-2) = 4$ dans la fonction extérieure.

$g(x) = x + 6$

$g(h(-2)) = 4 + 6$ Évalue la composée.

$g(h(-2)) = 10$

c) h(h(2))

$h(x) = x^2$

$h(h(x)) = (x^2)^2$

$h(h(x)) = x^4$

Remplace x par 2 dans $h(h(x))$ pour évaluer $h(h(2))$.

$h(h(2)) = (2)^4$

$h(h(2)) = 16$

2) Détermine une fonction composée qui comporte des restrictions

Exemple 2 :

Soit $f(x) = \sqrt{x-1}$ et g(x) = x^2.

a) Détermine l'équation de $(f \circ g)(x)$ et celle de $(g \circ f)(x)$.

$g(x) = x^2$	$f(x) = \sqrt{x-1}$
$f(x^2) = \sqrt{x^2-1}$	$g(\sqrt{x-1}) = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$
	$= x - 1$
$f(g(x)) = \sqrt{x^2-1}$	$g(f(x)) = x - 1$

L'ordre est important dans la composition de fonctions. Dans le cas présent, $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.

b) Indique le domaine de f(x), de g(x), de $(f \circ g)(x)$ et de $(g \circ f)(x)$.

Le domaine de $f(x)$ est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$; celui de $g(x)$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

Le domaine de $(f \circ g)(x)$ est l'ensemble des valeurs x du domaine de g pour lesquelles $g(x)$ appartient au domaine de f. Donc, il faut tenir compte de toute restriction sur la fonction intérieure ainsi que sur la fonction composée.

- Il n'y a aucune restriction sur le domaine de $g(x)$.
- Le domaine de $(f \circ g)(x)$ est restreint à $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.

En combinant ces restrictions, tu obtiens le domaine de $(f \circ g)(x)$, soit $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1\}$.

Le domaine de $(g \circ f)(x)$ est l'ensemble des valeurs x du domaine de f pour lesquelles $f(x)$ appartient au domaine de g. Donc, il faut tenir compte de toute restriction sur la fonction intérieure et sur la fonction composée.

- Le domaine de $f(x)$ est restreint à $x \geq 1$.
- Il n'y a aucune restriction sur le domaine de $(g \circ f)(x)$.

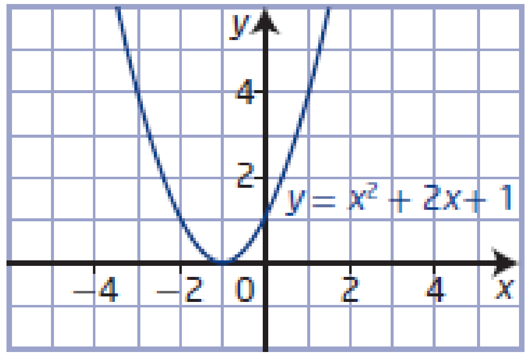
En combinant ces restrictions, tu obtiens le domaine de $(g \circ f)(x)$, soit $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$.

3) Déterminer la composée de deux fonctions

Exemple 3 :
Soit f(x) = x + 1 et g(x) = x^2. Détermine l'équation de chaque composée, trace son graphique, puis indique son domaine et son image.

a) y = g(f(x))

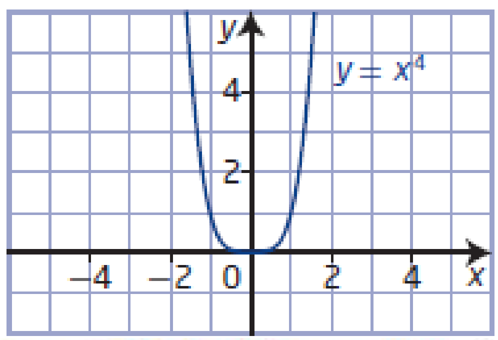
$$g(f(x)) = g(x + 1)$$
$$g(f(x)) = (x + 1)^2$$
$$g(f(x)) = x^2 + 2x + 1$$



Le graphique de la fonction composée $y = g(f(x))$ est une parabole ouverte vers le haut dont le sommet est en $(-1, 0)$. Le domaine de $y = g(f(x))$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$ et son image est $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

b) y = g(g(x))

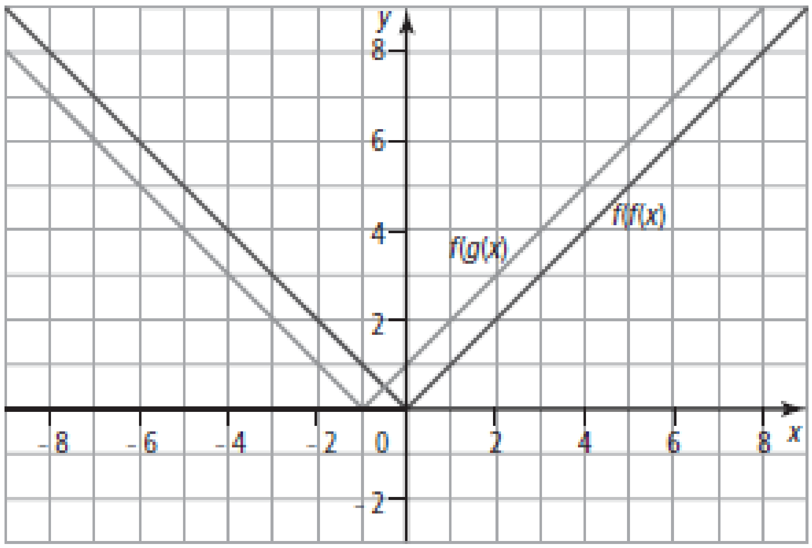
$$g(g(x)) = g(x^2)$$
$$g(g(x)) = (x^2)^2$$
$$g(g(x)) = x^4$$



Le graphique de la fonction composée $y = g(g(x))$ est celui d'une fonction quartique de base et est ouvert vers le haut. Le domaine de $y = g(g(x))$ est $\{x \in \mathbb{R}\}$ et son image est $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$.

Exemple 4 :
Soit $f(x) = |x|$ et g(x) = x + 1. Détermine l'équation de y = f(g(x)) et celle de y = f(f(x)). Représente graphiquement chaque fonction composée, puis indique son domaine et son image.

$f(g(x)) = |x + 1|; f(f(x)) = |x|$



Fonction	Domaine	Image
$f(g(x))$	$\{x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
$f(f(x))$	$\{x \in \mathbb{R}\}$	$\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

4) Déterminer les fonctions initiales à partir d'une fonction composée

Exemple 5 :
Sachant que h(x) = f(g(x)), détermine f(x) et g(x).

a) $h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$

Cherche une expression qui peut être commune à plus d'un terme de $h(x)$: l'expression $x - 2$ apparaît dans deux des termes de $h(x)$.
Pose que $g(x) = x - 2$. Ensuite, travaille à rebours pour déterminer $f(x)$.

$$h(x) = (x - 2)^2 + (x - 2) + 1$$
$$f(g(x)) = (g(x))^2 + (g(x)) + 1$$
$$f(x) = (x)^2 + (x) + 1$$

Les deux fonctions sont $f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = x - 2$.

Exemple 6 :

Soit $h(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{3 + \sqrt[3]{x}}$.
Sachant que $h(x) = f(g(x))$, détermine $f(x)$ et $g(x)$.

$$f(x) = x + \frac{3}{3 + x}$$
$$g(x) = \sqrt[3]{x}$$

5) La composition des fonctions et la réciproque.

Si f(g(x)) ou g(f(x)) = x, les deux fonctions sont des réciproques.

Exemple 7 : Détermine si f(x) et g(x) sont des fonctions réciproques.

$f(x) = \frac{2}{x-3}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{2}{x} + 3$

$f(g(x)) = \dfrac{2}{\frac{2}{x} + 3 - 3}$

$f(g(x)) = \dfrac{2}{\frac{2}{x}} = 2 \div \frac{2}{x}$

$f(g(x)) = \cancel{2} \times \frac{x}{\cancel{2}} = x$

$g(f(x)) = \dfrac{2}{\frac{2}{x-3}} + 3$

$g(f(x)) = 2 \div \frac{2}{x-3} + 3$

$g(f(x)) = \cancel{2} \times \frac{x-3}{\cancel{2}} + 3$

$g(f(x)) = x - 3 + 3 = x$