Pré-Calcul 40S

Enseignante :
Mme. Layton

Nom de l'élève :

____

Note Unité :
Les Fonctions Exponentielles,
Les Fonctions Logarithmiques,

Table des matières

Les Fonctions Exponentielles

Les Fonctions Logarithmiques p. 17

Les Fonctions Exponentielles

Revue

1. Lois des exposants

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$a^0 = 1$$

1. Évalue chaque expression

a) $(2^2)^{-3}$

b) $[(5)(5^3)]^{-2}$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-3}$

d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \div \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1}$

2. Simplifie chaque expression en une seule puissance dont l'exposant est rationnel et positive.

a) $(x^3)\left(x^{\frac{7}{3}}\right)$

b) $\left(2b^{\frac{1}{5}}\right)\left(b^{\frac{9}{5}}\right)$

c) $\left(x^{\frac{1}{3}}y^4\right)^{\frac{1}{2}}$

d) $\left[\frac{(4n^2)}{(n^4)}\right]^{\frac{1}{2}}$

e) $(x^3)\left(x^{\frac{2}{5}}\right)$

f) $\left[\frac{(x^{-2})}{(xy)^3}\right]^{1,5}$

g) $(x^3y^{-5})^2$

h) $\left(\frac{g^{-1}}{y^0}\right)^3$

3. Quelle est la valeur de x dans chaque équation ?

a) $x^3 = 125$

b) $2^x = 64$

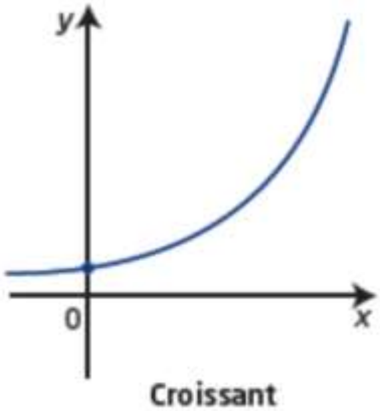
c) $(4)^{3x+8} = 4^x$

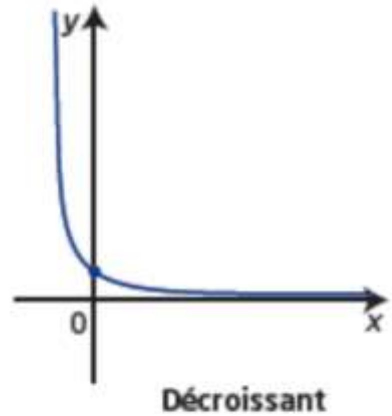
Leçon 1 : Les Caractéristiques des Fonctions Exponentielles

Fonction Exponentielle :

- Une fonction de la forme $y = b^x$, où b est une constante (b>0 et b ≠ 1) et x est une variable.

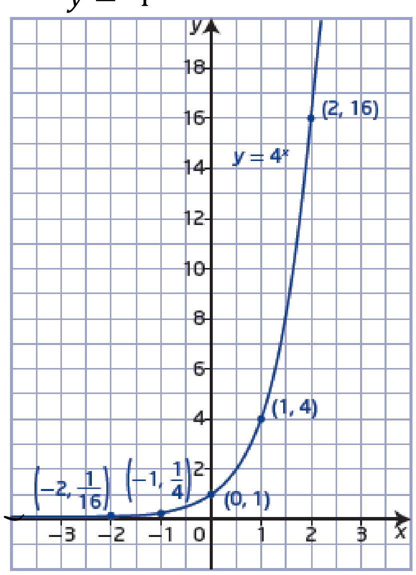
$b > 1$ Croissance exponentielle **$0 < b < 1$ Décroissance exponentielle**





A) Analyser le graphique d'une fonction exponentielle

1. a) Trace le graphique, $y = 4^x$



x	y
−2	$\frac{1}{16}$
−1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16

b) Détermine le domaine et l'image de la fonction ;

domaine est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

l'image est $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

c) Détermine l'abscisse et l'ordonnée du graphique si elles existent ;
Le graphique ne coupe jamais et ne touche jamais l'axe des x, alors il n'y a pas d'abscisse à l'origine.
Le graphique coupe l'axe des y en y = 1, alors l'ordonnée à l'origine x = 0, alors $y = 4^0$, y = 1

d) Détermine si le graphique représente une fonction croissante ou décroissante ;
Le graphique monte vers la droite sur tout son domaine, donc la valeur de y augmente à mesure que la valeur de x augmente. Par conséquent, la fonction est croissante sur tout son domaine. (Aussi b = 4 qui est > 1.)

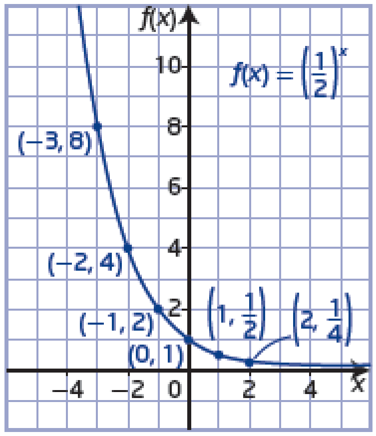
e) Détermine l'équation de l'asymptote horizontale. **Puisque le graphique s'approche de la droite d'équation y = 0 à mesure que x tend vers moins l'infini, y = 0 est l'équation de l'asymptote horizontale. Il n'a pas d'abscisse, donc l'asymptote horizontal se trouve à y = 0.**

<u>LA VALEUR DE K REPRÉSENTE L'ASYMPTOTE HORIZONTAL !!!</u>

2. Trace le graphique :

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x)$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$



b) Détermine le domaine et l'image.

domaine est $\{x \in \mathbb{R}\}$.

l'image est $\{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

c) Détermine l'abscisse et l'ordonnée à l'origine.

Le graphique ne coupe jamais et ne touche jamais l'axe des x, alors il n'y a pas d'abscisse à l'origine.
Le graphique coupe l'axe des y en y = 1, alors l'ordonnée à l'origine

d) Détermine si la fonction est croissante ou décroissante.

Le graphique descend vers la droite sur tout son domaine, ce qui indique que la valeur de y diminue à mesure que la valeur de x augmente. Par conséquent, la fonction est décroissante sur tout son domaine. (Aussi $0 < b < 1$)

e) Détermine l'équation de la droite horizontale.

Puisque le graphique s'approche de la droite d'équation y = 0 à mesure que x tend vers plus l'infini, y = 0 est l'équation de l'asymptote horizontale.

3. Détermine si une fonction exponentielle est croissante ou décroissante si :

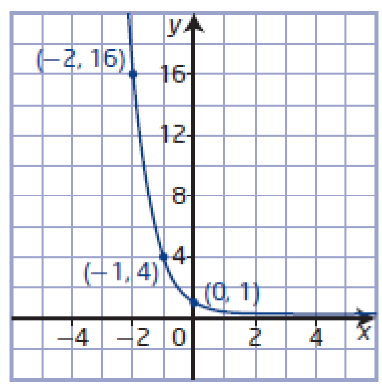
a) La base égale à 3 b) La base égale à $\frac{1}{4}$ c) La base égale à $\frac{3}{2}$

B) Déterminer l'équation d'une fonction exponentielle à partir de son graphique

4. Quelle fonction de la forme y = c^x est représentée par le graphique ci-dessous ?

x	y
−2	16
−1	4
0	1

x	y
-2	16
-1	4
0	1



Cherche une régularité dans les coordonnées des points du graphique.

Chaque valeur de x qui augmente par 1 unité, les valeurs de y sont 4 fois plus petit, et le graphique est décroissante alors $0 < b < 1$. $\boldsymbol{y = \left(\frac{1}{4}\right)^x}$

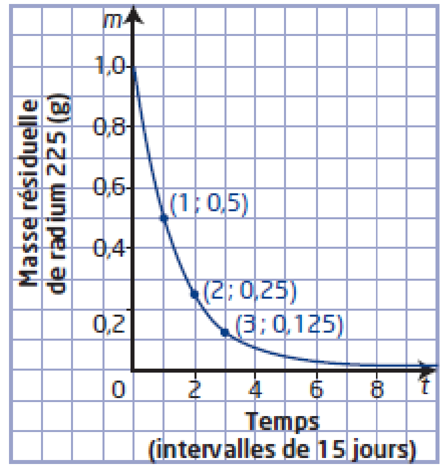
Demi-vie :

- Le temps que met un élément instable à perdre la moitié de sa masse initiale par désintégration.

Utiliser la fonction exponentielle

4. Un échantillon de radium 225 (^{225}Ra) une demi-vie de 15 jours. Le graphique ci-contre représente la masse non désintégrée m, en grammes, de radium 225 selon le temps écoulé t, en intervalles de 15 jours.

a) Quelle est la masse initiale de l'échantillon de radium 225 ? Vers quelle valeur la masse résiduelle tend-elle à mesure que le temps passe ?



Selon le graphique, l'ordonnée à l'origine est 1. Par conséquent, la masse initiale de l'échantillon est de 1 g.

Le graphique descend vers la droite par un facteur constant, ce qui représente une décroissance exponentielle. Il semble tendre vers $m = 0$, ou une masse résiduelle de 0 g de radium 225.

b) Quels sont le domaine et l'image de cette fonction ?

D'après le graphique, le domaine de la fonction est $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}$, et l'image est $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m \leq 1\}$.

c) Écris la fonction de la désintégration du radium qui relie la masse résiduelle de radium 225 au nombre d'intervalles de 15 jours.

La fonction de la désintégration du radium 225 qui relie la masse résiduelle de radium au temps écoulé, en intervalles de 15 jours, est $m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

d) Estime le nombre de jours qu'il faut pour que l'échantillon de radium 225 n'ait plus que $\frac{1}{30}$ de sa masse initiale.

$\frac{1}{30}$ de 1 g est équivalent à $\frac{1}{30}$ g ou environ 0,033 3 g.

Crée une table de valeurs pour $m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$.

t	m
1	0,5
2	0,25
3	0,125
4	0,062 5
5	0,031 25
6	0,015 625

Selon cette table, il faut entre 4 et 5 intervalles de 15 jours pour que la masse soit de 0,033 3 g. Pour obtenir une meilleure estimation, examine des valeurs situées entre ces deux bornes.

Puisque 0,033 3 est beaucoup plus proche de 0,031 25, essaie 4,8:
$\left(\frac{1}{2}\right)^{4,8} \approx 0,035\ 9$. Le résultat est supérieur à 0,033 3.

Essaie 4,9: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4,9} \approx 0,033\ 5$.

Il faudra donc environ 4,9 intervalles de 15 jours, ou 73,5 jours, pour que l'échantillon n'ait plus que $\frac{1}{30}$ de sa masse initiale.

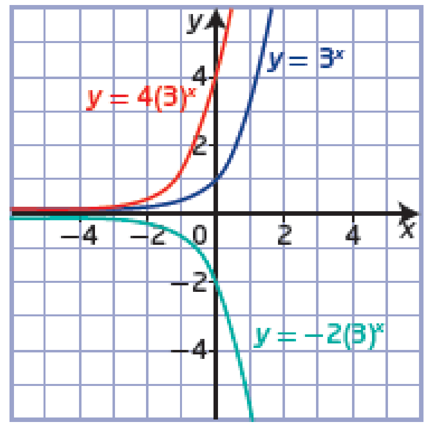
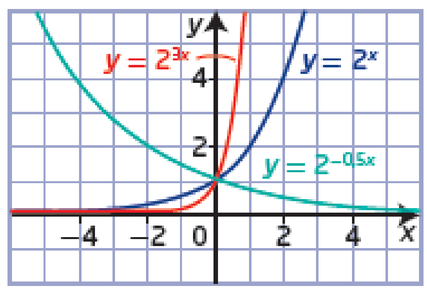
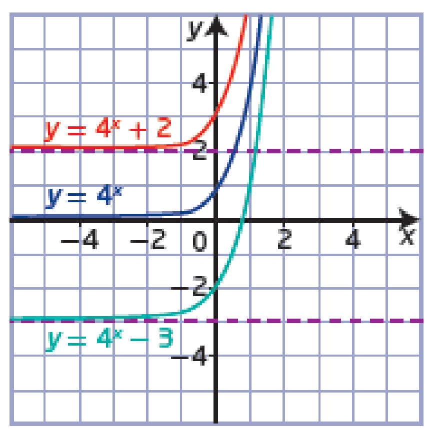
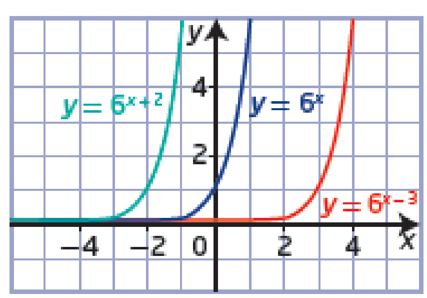
Tous ce que vous avez besoin de connaître c'est que la demi-vie veut dire que quelque chose perde la moitié de son total chaque fois intervalle de temps.

ALORS la fonction est décroissante $\boldsymbol{0 < b < 1}$

Ex : $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Leçon 2 : Les transformations des fonctions exponentielles

A) Écrire l'équation des transformées exponentielles. $f(x) = a(c)^{b(x-h)} + k$

<table>
<tr><th>Paramètre</th><th>Transformation(s)</th><th>Exemple</th></tr>
<tr><td>a</td><td>• Étirement vertical par un facteur de $|a|$ par rapport à l'axe des x
• Si $a < 0$, réflexion par rapport à l'axe des x
• $(x, y) \to (x, ay)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>• Étirement horizontal par un facteur de $\frac{1}{|b|}$ par rapport à l'axe des y
• Si $b < 0$, réflexion par rapport à l'axe des y
• $(x, y) \to \left(\frac{x}{b}, y\right)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>k</td><td>• Translation verticale, vers le haut ou vers le bas
• $(x, y) \to (x, y + k)$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>h</td><td>• Translation horizontale, vers la gauche ou vers la droite
• $(x, y) \to (x + h, y)$</td><td>
</td></tr>
</table>

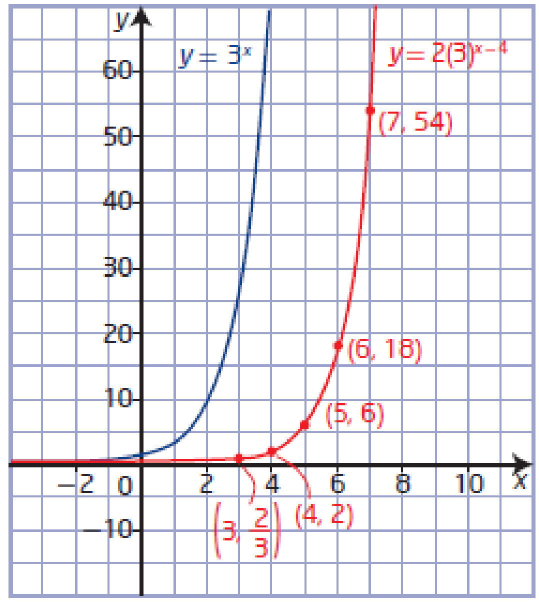
B) Tracer un graphique à l'aide de transformations

1. Soit la fonction de base $y = 3^x$. Pour chaque transformée :

a) $y = 2(3)^{x-4}$

$(x, y) \rightarrow (x + 4, 2y)$

$y = 3^x$	$y = 2(3)^{x-4}$
$\left(-1, \frac{1}{3}\right)$	$\left(3, \frac{2}{3}\right)$
(0, 1)	(4, 2)
(1, 3)	(5, 6)
(2, 9)	(6, 18)
(3, 27)	(7, 54)



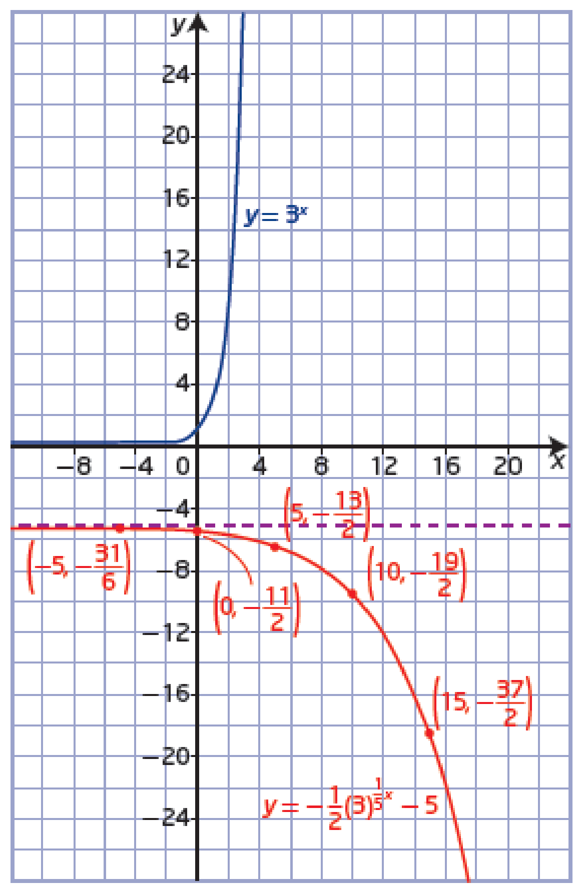
C) Trace un graphique avec des points significatifs

Choisis une valeur de x, insère dans l'équation et détermine y.
Trace les points.

b) $y = -\frac{1}{2}(3)^{\frac{1}{5}x} - 5$

Asymptote horizontale : y = -5

x	y
-5	-31/6
0	-5,5
5	-6,5
10	-9,5



2. a) Décris les transformations pour obtenir le graphique $\mathbf{y = 4^{-2(x + 5)} - 3}$ à partir du graphique $y = 4^x$.

b) Décris les effets sur le domaine et l'image.

c) Décris les effets sur l'asymptote horizontale.

Leçon 3 : La Résolutions d'équations Exponentielles

Équation exponentielle :

1. Une équation dans laquelle un exposant/puissance comporte une variable. Pour être capable de le résoudre la base (avec la puissance) doit être la même.

$$4^{2x} = 8^{x+1}$$
$$(2^2)^{2x} = (2^3)^{x+1}$$
$$2^{4x} = 2^{3x+3}$$

$$4x = 3x + 3$$
$$x = 3$$

$c^x = c^y$, où $c \neq -1$, 0 et 1, alors $x = y$.

A) Changer la base de puissances.

2. Réécris chaque expression comme une base de 3.

a) 27 **b)** 9^2 **c)** $27^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{81}\right)^2$

$\mathbf{3^3}$

$\mathbf{(3^2)^2}$

$(3^3)^{\frac{1}{3}}(3^4)^{\frac{2}{3}}$

$3^{\frac{3}{3}}(3)^{\frac{8}{3}}$

$(3)^{\frac{3+8}{3}} = (3)^{\frac{11}{3}}$

B) Résoudre une équation exponentielle

3. Résous chaque équation.

a) $4^{x+2} = 64^x$

b) $4^{2x} = 8^{2x-3}$

$$4^{x+2} = 64^x$$
$$4^{x+2} = (4^3)^x$$
$$4^{x+2} = 4^{3x}$$

$$x + 2 = 3x$$
$$2 = 2x$$
$$x = 1$$

Vérification :

M.G.	M.D.
4^{x+2}	64^x
$= 4^{1+2}$	$= 64^1$
$= 4^3$	$= 64$
$= 64$	

M.G. = M.D.

La solution est $x = 1$.

C) Résoudre des problèmes comportant une équation exponentielle avec des bases différentes

Trimestriellement :
- Tous les trois mois (alors 4 fois dans une année).
- Un trimestre est une période de trois mois.

Semestriellement :
- Tous les six mois (alors 2 fois dans une année).
- Un semestre est une période de six mois.

Mensuellement :
- Chaque mois

Période de capitalisation :
- La période à la fin de laquelle on calcule l'intérêt et on l'ajoute au capital pour le calcul de l'intérêt à la période suivante.

4.

Christina veut s'acheter une voiture. Elle a épargné 5 000 \$. La voiture coûte 5 900 \$. Pendant combien de temps Christina doit-elle placer son argent avant d'avoir la somme nécessaire pour acheter la voiture si le placement choisi rapporte un intérêt annuel de 6,12 %, composé **trimestriellement**?

La formule de l'intérêt composé est $M = C(1 + i)^n$, où M est le montant accumulé à l'échéance, C est le capital initial, i est le taux d'intérêt par **période de capitalisation**, sous forme décimale, et n est le nombre de périodes de capitalisation.

$M = 5\ 900$

$C = 5\ 000$

$i = 0{,}061\ 2 \div 4 = 0{,}015\ 3$

Divise le taux d'intérêt par 4, car l'intérêt est versé chaque trimestre, ou quatre fois par année.

Reporte les valeurs connues dans la formule.

$$M = C(1 + i)^n$$
$$5\ 900 = 5\ 000(1 + 0{,}015\ 3)^n$$
$$1{,}18 = 1{,}015\ 3^n$$

Tu verras comment résoudre algébriquement des équations comme celles-ci lorsque tu étudieras les logarithmes au chapitre 8.

L'équation exponentielle comporte des bases différentes. On ne peut pas rendre ces bases identiques sans faire appel à des notions mathématiques plus avancées.

Effectue des essais systématiques pour déterminer la valeur de n qui satisfait l'équation.

Remplace n par une première valeur vraisemblable dans l'équation, puis fais le calcul. Ajuste la valeur estimée selon que le résultat obtenu est trop élevé ou trop bas.

Essaie $n = 10$.

Pourquoi choisir des nombres naturels pour n?

$1{,}015\ 3^{10} = 1{,}163\ 9\ldots$, ce qui est inférieur à 1,18.

Le résultat est inférieur au membre de gauche de l'équation, alors essaie $n = 14$.

$1{,}015\ 3^{14} = 1{,}236\ 8\ldots$, ce qui est supérieur à 1,18.

Le résultat est supérieur au membre de gauche de l'équation, alors essaie $n = 11$.

$1{,}015\ 3^{11} = 1{,}181\ 7\ldots$, ce qui est à peu près égal à 1,18.

Il faut donc environ 11 périodes de capitalisation.

Puisque l'intérêt est versé chaque trimestre, il y a quatre périodes de capitalisation par année. Par conséquent, il faudra environ $\frac{11}{4}$ ou 2,75 ans pour que le placement de Christina atteigne une valeur de 5 900 \$.

Leçon 4 : La fonction exponentielle naturelle

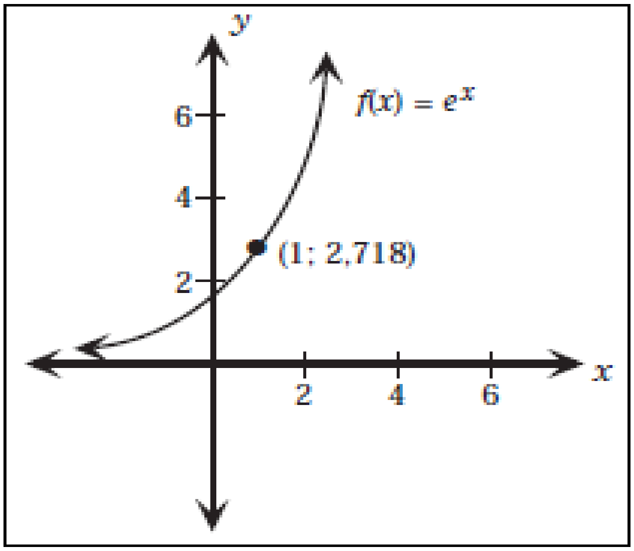
Vous allez être capable de :

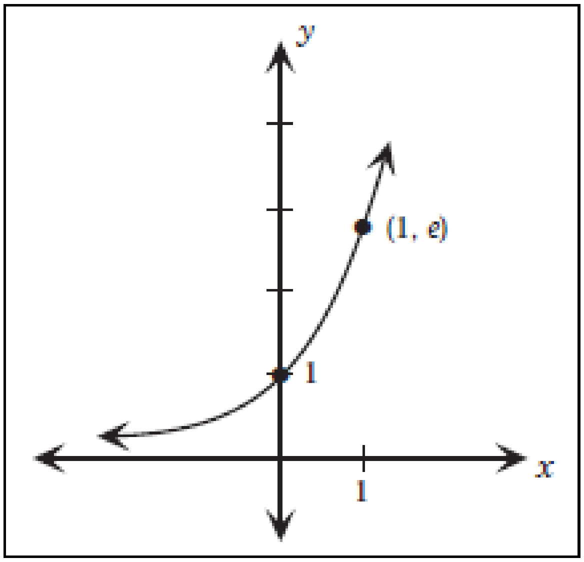
- De définir la fonction exponentielle naturelle
- De tracer le graphique d'une fonction exponentielle.

La fonction $f(x) = e^x$ est appelée la fonction *exponentielle naturelle*.

La fonction exponentielle, $f(x) = e^x$, dont la base est le nombre naturel e, est illustrée ci-dessous.

e = le nombre Euler





Propriétés de $y = e^x$

1. Domaine : $\Re$
2. Image : $y > 0$
3. Fonction croissante
4. La courbe est ouverte vers le haut
5. La fonction est biunivoque : si $e^{x_1} = e^{x_2}$, alors $x_1 = x_2$
6. $0 < e^x < 1$ pour $x < 0$; $e^x > 1$ pour $x > 0$
7. $e^{\ln x} = x$ $\quad$ $*f(f^{-1}(x)) = x$
8. Asymptote horizontale : $y = 0$

Les Fonctions Logarithmiques

Leçon 1 : Les logarithmes

Fonction logarithmique :

- Une fonction de la forme $y = \log_c x$, où $c > 0$ et $c \neq 1$, qui est la réciproque de la fonction exponentielle $y = c^x$.

Logarithme :

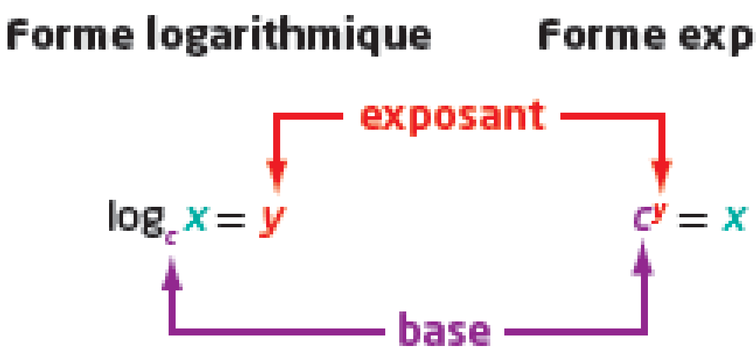
- L'exposant dont il faut affecter une base pour obtenir un nombre donné.
- Dans $x = c^y$, y est le logarithme de x en base c ($y = \log_c x$).

Logarithme décimal :

- Un logarithme de base 10.

La réciproque de la fonction exponentielle $y = c^x$ est $x = c^y$. C'est aussi une fonction, qui porte le nom de fonction logarithmique. Elle s'écrit $y = \log_c x$, où c est un nombre positif différent de 1.

A) Les Fonctions Exponentielles et Logarithmiques sont des fonctions réciproques



$y = 10^x$
$x = 10^y$

La base est 10 alors $x = 10^y$ $y = \log_{10} x$ peut aussi être écrit $y = \log x$

Si x = 100, alors y = 2 $10^2 = x$ $2 = \log_{10} x$
$x = 100$ $2 = \log_{10} 100$

Exemple :

Fonctions Exponentielle	**Fonction Exponentielle réciproque**	**Fonction Logarithmique du**
$y = 5^x$	$x = 5^y$	$y = \log_5 x$
$36 = 6^2$	[redacted]	$2 = \log_6 36$
$\frac{1}{9} = 3^{-2}$	[redacted]	$-2 = \log_3 \frac{1}{9}$

Est-il possible d'avoir une puissance qui donne une valeur négative ?

Alors la valeur dans un logarithme doit être plus grand que 0.

B) Évaluer les logarithmes

1. Évalue chaque logarithme.

a) $\text{Log}_7 49$ b) $\log_6 1$ c) $\log 0{,}001$ d) $\log_2 \sqrt{8}$ e) $\log_5 5$

Si $c > 0$ et $c \neq 1$, alors : Pourquoi y a-t-il ces restrictions sur la valeur de c?

- $\log_c 1 = 0$ puisque, sous forme exponentielle, on a $c^0 = 1$;
- $\log_c c = 1$ puisque, sous forme exponentielle, on a $c^1 = c$;
- $\log_c c^x = x$ puisque, sous forme exponentielle, on a $c^x = c^x$;
- $c^{\log_c x} = x$, où $x > 0$, puisque, sous forme logarithmique, on a $\log_c x = \log_c x$.

Les deux dernières propriétés s'expliquent par le fait que les logarithmes et les puissances résultent d'opérations mathématiques qui s'annulent l'une l'autre. Selon $\log_c c^x = x$, le logarithme d'une puissance de même base est égal à l'exposant, x, de cette puissance. Selon $c^{\log_c x} = x$, une puissance dont l'exposant est le logarithme de même base d'un nombre x est égale à ce nombre x.

2. Évalue.

a) $\log_5 5^3$ b) $6^{\log_6 36}$ c) $\log_4 16 = \log_4 x$ d) $\log_6 \frac{1}{216}$ e) $\log_9 3$

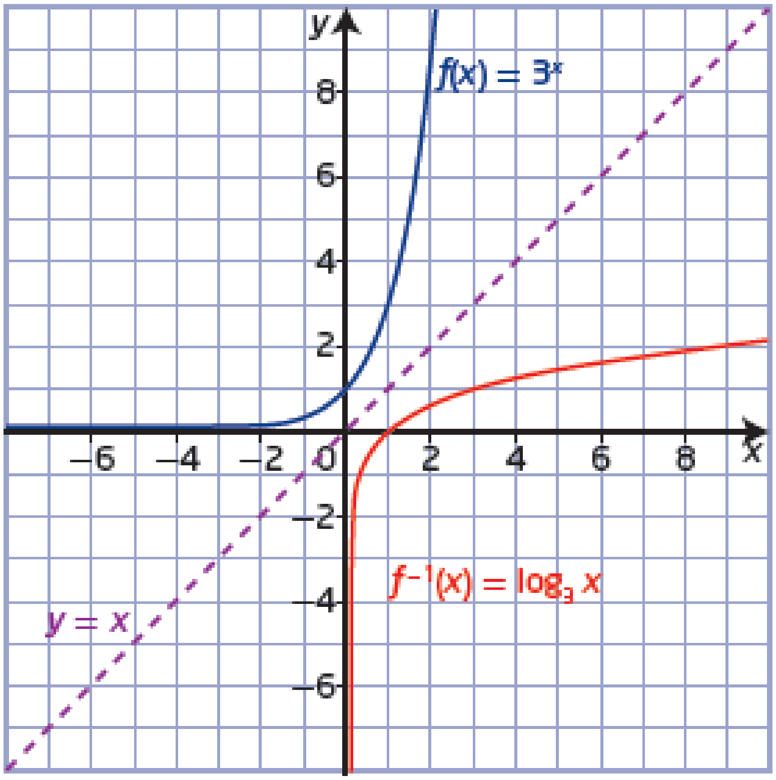
C) La Valeur inconnue dans une équation sous la forme logarithmique.

3. Détermine la valeur de x.

a) $\log_5 x = -3$ **b)** $\log_x 36 = 2$ **c)** $\log_{64} x = \frac{2}{3}$

D) Tracer le graphique de la réciproque d'une fonction exponentielle (alors la fonction logarithmique)

4. a) Détermine la réciproque de $f(x) = 3^x$ et trace son graphique.



$f(x) = 3^x$	
x	y
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27

$f^{-1}(x) = \log_3 x$	
x	y
$\frac{1}{27}$	-3
$\frac{1}{9}$	-2
$\frac{1}{3}$	-1
1	0
3	1
9	2
27	3

Indique :
- le domaine et l'image de la f(x) ;

Domaine : $\{x\epsilon\ R\}$ l'image : $\{y\ \in R|y\ > 0\}$

- l'abscisse à l'origine du graphique, s'il y a lieu ; ***<u>il n'y a pas</u>***

- l'ordonnée à l'origine du graphique, s'il y a lieu ;

y = 1

- l'équation de toute asymptote.

y = 0

Indique :
- le domaine et l'image de la $f^{-1}(x)$ (la fonction logarithmique) ;

Domaine : _____________________ l'image : _______________________

- l'abscisse à l'origine du graphique, s'il y a lieu ;

- l'ordonnée à l'origine du graphique, s'il y a lieu ;

- l'équation de toute asymptote.

E) Estimer un logarithme

5. Sans l'aide de technologie, estime $\log_2 14$, au dixième près.

$\log_2 14 = y$

$2^3 = 8$, $\log_2 8 = 3$

$2^y = 14$ $\log_2 14 = y$

$2^4 = 16$, $\log_2 16 = 4$

$\log_2 8 < \log_2 14 < \log_2 16$

$3 < \log_2 14 < 4$

Puisque 14 est plus proche à 16 que de 8, $\log_2 14$ est plus proche à 4, alors $y \approx 3{,}8$.

$2^{3,8} \approx 14$ $\log_2 14 \approx 3{,}8$

6. Quelle expression a la plus grande valeur ?

$\text{Log}_5 130$ ou $\log_2 20$

E) Application des logarithmes

7.

En 1935, le sismologue américain Charles R. Richter a élaboré une échelle de mesure de la magnitude des séismes ou tremblements de terre. La magnitude de Richter, M, est définie par $M = \log \frac{A}{A_0}$, où A est l'amplitude du mouvement du sol, mesurée par un sismographe précis, et A_0 est l'amplitude associée à un séisme de référence, corrigée en fonction de la distance du sismographe au séisme enregistré.

a) En 1946, un séisme a secoué l'île de Vancouver, au large de la Colombie-Britannique. L'amplitude mesurée était égale à $10^{7,3}$ fois A_0. Quelle était la magnitude de ce séisme?

b) Le plus puissant tremblement de terre enregistré à ce jour au Canada s'est produit à Haida Gwaii, au large de la Colombie-Britannique, en 1949. Sa magnitude était de 8,1. Combien de fois l'amplitude de ses ondes était-elle supérieure à A_0?

c) Compare les ondes du séisme à Haida Gwaii à celles du séisme de l'île de Vancouver.

a) Puisque l'amplitude était égale à $10^{7,3}$ fois A_0, remplace A par $10^{7,3}A_0$ dans la formule $M = \log \frac{A}{A_0}$.

$$M = \log \left(\frac{10^{7,3} \cancel{A_0}^{\,1}}{\cancel{A_0}_{\,1}} \right)$$

$$M = \log 10^{7,3}$$

$\log_c c^x = x$ puisque, sous forme exponentielle, on a $c^x = c^x$.

$$M = 7,3$$

Le séisme de l'île de Vancouver avait une magnitude de 7,3.

b) Remplace M par 8,1 dans la formule $M = \log \frac{A}{A_0}$ et exprime A_0 en fonction de A.

$$8,1 = \log \frac{A}{A_0}$$

$$10^{8,1} = \frac{A}{A_0}$$

Écris l'équation exponentielle équivalente.

$$10^{8,1}A_0 = A$$

$$125\ 892\ 541 A_0 \approx A$$

L'amplitude des ondes de ce séisme était environ 126 millions de fois plus grande que celle des ondes d'un séisme de référence.

c) Compare l'amplitude des mouvements du sol.

$$\frac{\text{amplitude lors du séisme de Haida Gwaii}}{\text{amplitude lors du séisme de l'île de Vancouver}} = \frac{10^{8,1}\cancel{A_0}^{\,1}}{10^{7,3}\cancel{A_0}_{\,1}}$$

$$= \frac{10^{8,1}}{10^{7,3}}$$

$$\approx 6,3$$

Les ondes sismiques avaient une amplitude 6,3 fois plus grande lors du séisme de Haida Gwaii que lors du séisme de l'île de Vancouver.

Leçon 2 : Les transformations des fonctions logarithmiques

Les Transformations des fonctions logarithmiques à partir de la fonction de base $y = \log_c x$

$$y = a\log_c\big(b(x-h)\big) + k$$

Important !!

h est associé à l'asymptote vertical.

Les Règles de correspondance :

Paramètre	Transformation
a	$(x, y) \rightarrow (x, ay)$
b	$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{b}, y\right)$
h	$(x, y) \rightarrow (x + h, y)$
k	$(x, y) \rightarrow (x, y + k)$

A) Les translations et le graphique d'une fonction logarithmique

1. a) À l'aide de transformations, trace le graphique de $y = \log_3(x + 9) + 2$.

La règle de correspondance pour la fonction logarithmique est (x, y) → (x – 9, y + 2)

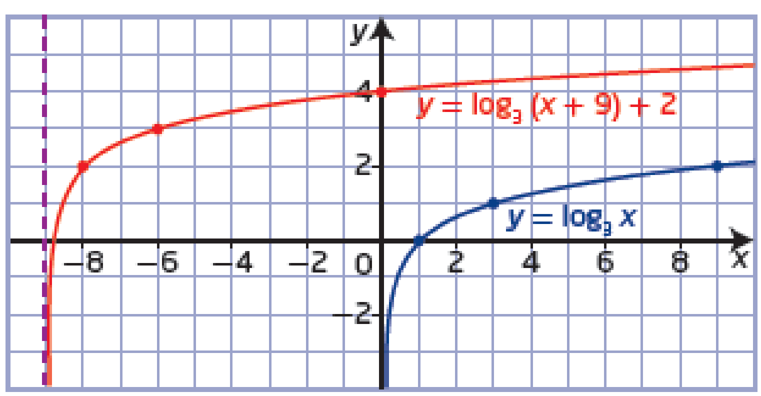
$y = 3^x$	$x \leftrightarrow y$	$y = \log_3 x$	$(x - 9, y + 2)$	$y = \log_3(x + 9) + 2$
(0, 1)		(1, 0)		(-8, 2)
(1, 3)		(3, 1)		(-6, 3)
(2, 9)		(9, 2)		(0, 4)

b) Pour la transformée détermine :
i) l'équation de l'asymptote ;

ii) le domaine et l'image ;
domaine : ___________________________

image : _________________________

iii) l'ordonnée à l'origine s'il y a lieu ;
iv) l'abscisse à l'origine, s'il y a lieu.

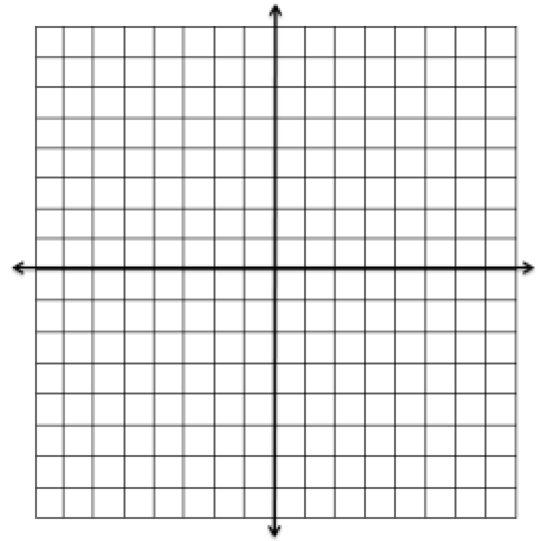


B) Les réflexions, les étirements et les translations et le graphique d'une fonction logarithmique

2. a) À l'aide de transformations, trace le graphique de la fonction y = $-\log_2(2x + 6)$.

$y = -\log_2(2(x+3))$

Asymptote vertical : ______________________



$y = 2^x$	$y = \log_2 x$	$y = -\log_2 2(x + 3)$
(x, y)	(y, x)	$\left(\frac{x}{2} - 3, -y\right)$
(0, 1)	(1, 0)	(-2,5, 0)
(1, 2)	(2, 1)	(-2, -1)
(2, 4)	(4, 2)	(-1, -2)
(3, 8)	(8, 3)	(1, -3)

b) Détermine :

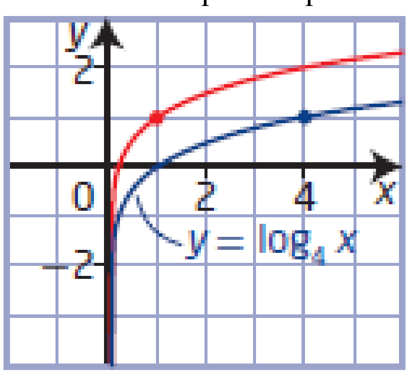
i) le domaine et l'image de la fonction ;

domaine : _________________________ image : __________________________

ii) l'ordonnée à l'origine, s'il y a lieu ; iii) l'abscisse à l'origine, s'il y a lieu.

C) Déterminer l'équation d'une fonction logarithmique à partir de son graphique

3. On peut obtenir le graphique (en rouge) par un étirement du graphique en bleu de $y = \log_4 x$. Écris l'équation qui correspond au graphique en rouge.



Comment sais-tu le type d'étirement ?

Attention : Le graphique en rouge (plus en haut) a subi un étirement horizontal, puisqu'un étirement vertical ne change pas l'abscisse à l'origine !

Méthode 1 : Compare le graphique à celui de $y = \log_4 x$. (x = 4 est maintenant x = 1 alors il a été divisé par 4. Qui veut dire la valeur de b est 4.

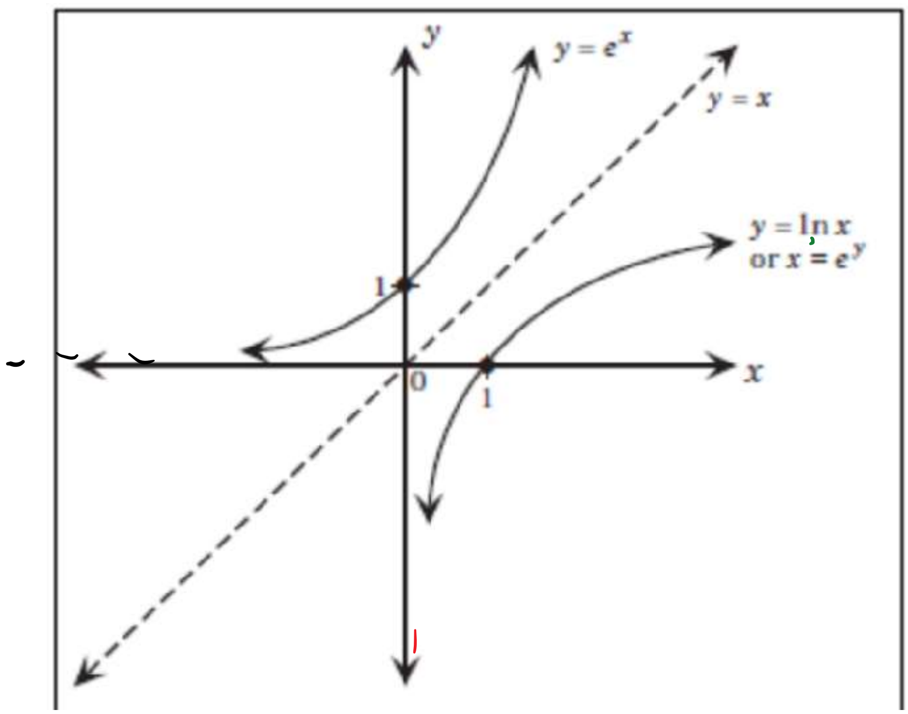
Méthode 2 : Procède par substitution

$$y = \log_4 bx$$
$$2 = \log_4 4b$$
$$4^2 = 4b$$
$$4 = b$$

Leçon 3 : La Fonction logarithmique naturelle

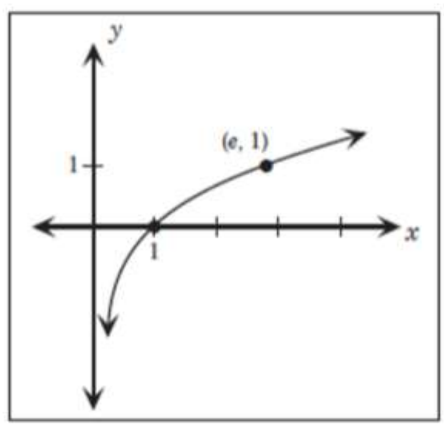
La réciproque de la fonction exponentielle $y = e^x$ est $y = \log_e x$. La fonction logarithmique naturelle est en règle générale exprimée sous la forme $y = \ln x$, où « ln » est l'abréviation de logarithme naturel.

Ainsi, $x = e^y$ et $y = \ln x$ sont équivalents et, comme ci-dessus, on obtient le graphique de $y = \ln x$ en faisant une réflexion du graphique de $y = e^x$ par rapport à la droite $y = x$.



Propriétés de $y = \ln x$

1. Domaine : $x > 0$
2. Image : $\Re$
3. Fonction croissante
4. Courbe ouverte vers le bas
5. Fonction biunivoque : si $\ln x_1 = \ln x_2$, alors $x_1 = x_2$
6. Si $x < 0$ pour $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$ pour $x > 1$
7. $\ln e^x = x$ $\quad$ $*f(f^{-1}(x)) = x$
8. Asymptote verticale : $x = 0$

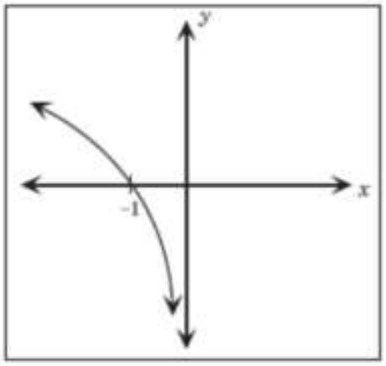


1. Trace le graphique de la fonction logarithmique suivante et indique le domaine, l'image et l'équation de l'asymptote :

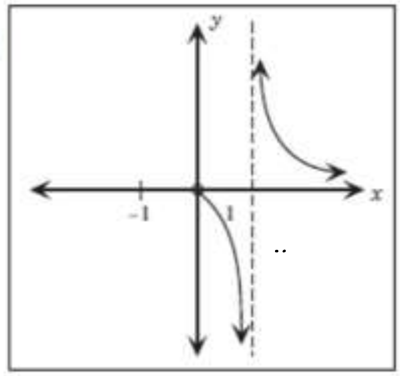
a) f(x) = ln(-x)

b) $h(x) = \frac{1}{\ln x}$

a)



b)



Question	Domaine	Image	Asymptote
(a)	$]-\infty, 0[$	$\Re$	$x = 0$
(b)	$]0, 1[\cup]1, \infty[$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$x = 1$

****

2.

Développe $\ln \frac{x^2 y^3}{\sqrt{z}}$.

3.

Écris sous forme d'un seul logarithme :

$\ln (x-1) + 3 \ln(x+3) - \frac{1}{2} \ln (x^2+2)$

Leçon 4 : Les Lois des logarithmes

La loi du logarithme d'un produit

Le logarithme d'un produit de nombres correspond à la somme des logarithmes de ces nombres.

$\log_c MN = \log_c M + \log_c N$

Démonstration

Soit $\log_c M = x$ et $\log_c N = y$, où M, N et c sont des nombres réels positifs et $c \neq 1$.

Réécris les équations sous forme exponentielle, soit $M = c^x$ et $N = c^y$:

$$MN = (c^x)(c^y)$$
$$MN = c^{x+y}$$
$$\log_c MN = x + y$$
$$\log_c MN = \log_c M + \log_c N$$

La loi du logarithme d'un quotient

Le logarithme d'un quotient de nombres correspond à la différence entre les logarithmes du dividende et du diviseur.

$\log_c \frac{M}{N} = \log_c M - \log_c N$

Démonstration

Soit $\log_c M = x$ et $\log_c N = y$, où M, N et c sont des nombres réels positifs et $c \neq 1$.

Réécris les équations sous forme exponentielle, soit $M = c^x$ et $N = c^y$:

$$\frac{M}{N} = \frac{c^x}{c^y}$$
$$\frac{M}{N} = c^{x-y}$$
$$\log_c \frac{M}{N} = x - y$$
$$\log_c \frac{M}{N} = \log_c M - \log_c N$$

La loi du logarithme d'une puissance

Le logarithme d'une puissance d'un nombre correspond au logarithme de ce nombre multiplié par l'exposant de la puissance.

$\log_c M^P = P \log_c M$

Démonstration

Soit $\log_c M = x$, où M et c sont des nombres réels positifs et $c \neq 1$.

Réécris l'équation sous forme exponentielle : $M = c^x$.

Soit P, un nombre réel.

$$\begin{aligned} M &= c^x \\ M^P &= (c^x)^P \\ M^P &= c^{xP} \\ \log_c M^P &= xP \\ \log_c M^P &= (\log_c M)P \\ \log_c M^P &= P \log_c M \end{aligned}$$

Tu peux appliquer les lois des logarithmes aux fonctions, aux expressions et aux équations logarithmiques.

Ex : $\log(x+2) + \log(x-3) = \log(x+2)(x-3)$

Ex : $\log(x+2) - \log(x-3) = \log\frac{(x+2)}{(x-3)}$

Ex : $\log(x-3)^2 = 2\log(x-3)$

A) Développer et Simplifier des expressions à l'aide des lois des logarithmes

1. Réécris chaque expression à l'aide de logarithme de x, de y et de z.

a) $\log_5 \frac{xy}{z}$ **b)** $\log_7 \sqrt[3]{x}$ **c)** $\log_6 \frac{1}{x^2}$ **d)** $\log \frac{x^3}{y\sqrt{z}}$

a) $\log_5 \frac{xy}{z} = \log_5 xy - \log_5 z$

$= \log_5 x + \log_5 y - \log_5 z$

b) $\log_7 \sqrt[3]{x} = \log_7 x^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} \log_7 x$

c) $\log_6 \frac{1}{x^2} = \log_6 x^{-2}$

$= -2 \log_6 x$

d) $\log \frac{x^3}{y\sqrt{z}} = \log x^3 - \log y\sqrt{z}$

$= \log x^3 - \left(\log y + \log z^{\frac{1}{2}}\right)$

$= 3 \log x - \log y - \frac{1}{2} \log z$

2. Réécris chaque expression sous sa forme la plus simple. Indique toute restriction sur les valeurs de la variable. Ex : logx x> 0

a) $\log_7 x^2 + \log_7 x - \frac{5 \log_7 x}{2}$

b) $\log_5 (2x - 2) - \log_5 (x^2 + 2x - 3)$

a) $\log_7 x^2 + \log_7 x - \frac{5 \log_7 x}{2}$

$= \log_7 x^2 + \log_7 x - \frac{5}{2} \log_7 x$

$= \log_7 x^2 + \log_7 x - \log_7 x^{\frac{5}{2}}$

$= \log_7 \frac{(x^2)(x)}{x^{\frac{5}{2}}}$

$= \log_7 x^{2+1-\frac{5}{2}}$

$= \log_7 x^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_7 x$, où $x > 0$

b) $\log_5 (2x - 2) - \log_5 (x^2 + 2x - 3)$

$= \log_5 \frac{2x - 2}{x^2 + 2x - 3}$

$= \log_5 \frac{2\cancel{(x-1)}^{1}}{(x+3)\cancel{(x-1)}_{1}}$

$= \log_5 \frac{2}{x+3}$

Pour que l'expression initiale soit définie, il faut que les deux termes logarithmiques soient définis.

$2x - 2 > 0$	$x^2 + 2x - 3 > 0$
$2x > 2$	$(x + 3)(x - 1) > 0$
$x > 1$ et	$x < -3$ ou $x > 1$

De quelles autres façons pourrais-tu résoudre cette inéquation quadratique ?

Ces deux conditions sont satisfaites lorsque $x > 1$.

Ainsi, il faut restreindre les valeurs de la variable à $x > 1$ pour que l'expression initiale soit définie. On peut ensuite réécrire l'expression sous la forme d'un seul logarithme.

Donc, $\log_5 (2x - 2) - \log_5 (x^2 + 2x - 3) = \log_5 \frac{2}{x+3}$, où $x > 1$.

B) Évaluer des expressions à l'aide des lois des logarithmes.

3. À l'aide des lois des logarithmes, simplifie chaque expression puis évalue-la.

a) $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$ **b)** $\log_7 7\sqrt{7}$ **c)** $2\log_2 12 - \left(\log_2 6 + \frac{1}{3}\log_2 27\right)$

a) $\log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2$
$= \log_6 \frac{8 \times 9}{2}$
$= \log_6 36$
$= \log_6 6^2$
$= 2$

b) $\log_7 7\sqrt{7}$
$= \log_7 \left(7 \times 7^{\frac{1}{2}}\right)$
$= \log_7 7 + \log_7 7^{\frac{1}{2}}$
$= \log_7 7 + \frac{1}{2}\log_7 7$
$= 1 + \frac{1}{2}(1)$
$= \frac{3}{2}$

c) $2\log_2 12 - \left(\log_2 6 + \frac{1}{3}\log_2 27\right)$
$= \log_2 12^2 - \left(\log_2 6 + \log_2 27^{\frac{1}{3}}\right)$
$= \log_2 144 - (\log_2 6 + \log_2 \sqrt[3]{27})$
$= \log_2 144 - (\log_2 6 + \log_2 3)$
$= \log_2 144 - \log_2 (6 \times 3)$
$= \log_2 \frac{144}{18}$
$= \log_2 8$
$= 3$

4.

Soit : $\log_a 2 = 0{,}3562$
$\log_a 3 = 0{,}5646$
$\log_a 5 = 0{,}8271$

Trouve la valeur de $\log_a \sqrt{\frac{10}{3}}$.

Leçon 5 : Les équations logarithmiques et exponentielles

Soit $c, L, R > 0$ et $c \neq 1$.

- Si $\log_c L = \log_c R$, alors $L = R$.
- Si $L = R$, alors $\log_c L = \log_c R$.

Démonstration

Soit $\log_c L = \log_c R$.

$$c^{\log_c R} = L$$
$$R = L$$

$c^{\log_c x} = x$, où $x > 0$.

A) Résous les équations logarithmes qui contient <u>seulement</u> des <u>log</u>.

1. Résous chaque équation.

a) $\log_6 (2x - 1) = \log_6 11$

c, L et $R > 0$ et $c \neq 1$

Si $\log_c L = \log_c R$, alors $L = R$.

$$\log_6 (2x - 1) = \log_6 11$$
$$2x - 1 = 11$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

$\text{Log}_6(2x - 1) = \log_6 11$ est définie lorsque $2x - 1 > 0$. Alors $x > \frac{1}{2}$.

Pour le vérifier, remplace x par 6 dans l'équation initiale.

M.G.	M.D.
$\log_6 (2x - 1)$	$\log_6 11$
$= \log_6 (2(6) - 1)$	
$= \log_6 11$	

M.G. = M.D.

a) $\log(x + 2) - \log 5 = 2\log 3 - \log(x - 2)$

B) Résous les équations logarithmes qui <u>contient des log et un coefficient</u>

b) $\log(8x + 4) = 1 + \log(x + 1)$

$$\log(8x + 4) = 1 + \log(x + 1)$$

$$\log_{10}(8x + 4) = 1 + \log_{10}(x + 1)$$

$$\log_{10}(8x + 4) - \log_{10}(x + 1) = 1$$

Regroupe les termes logarithmiques du même côté du signe d'égalité.

$$\log_{10}\frac{8x + 4}{x + 1} = 1$$

Applique la loi du logarithme d'un quotient.

Méthode 1 : Exprime les deux membres sous la forme de logarithmes

$$\log_{10}\frac{8x + 4}{x + 1} = 1$$

$$\log_{10}\frac{8x + 4}{x + 1} = \log_{10} 10^1$$

Puisque $\log_b b^n = n$, remplace 1 par $\log_{10} 10^1$.

$$\frac{8x + 4}{x + 1} = 10$$

Rappelle-toi que si $\log_c L = \log_c R$ alors $L = R$.

$$8x + 4 = 10(x + 1)$$

$$8x + 4 = 10x + 10$$

Multiplie les deux membres de l'équation par $x + 1$, le plus petit dénominateur commun (PPDC).

$$-6 = 2x$$

$$-3 = x$$

Résous l'équation linéaire.

Méthode 2 : Réécris l'équation sous forme exponentielle

$$\log_{10}\frac{8x + 4}{x + 1} = 1$$

$$\frac{8x + 4}{x + 1} = 10^1$$

Écris l'équation exponentielle équivalente.

$$8x + 4 = 10(x + 1)$$

$$8x + 4 = 10x + 10$$

Multiplie les deux membres de l'équation par le PPDC, $x + 1$.

$$-6 = 2x$$

$$-3 = x$$

Résous l'équation linéaire.

La racine x = -3 est étrangère. Lorsqu'on remplace x par -3 dans l'équation initiale, log(8x + 4) et log(x + 1) sont définis. Alors on dira **aucune solution**.

c) $\log_2 (x+3)^2 = 4$

$$\begin{aligned}\log_2 (x+3)^2 &= 4\\(x+3)^2 &= 2^4\\x^2+6x+9 &= 16\\x^2+6x-7 &= 0\\(x+7)(x-1) &= 0\\x = -7 \quad \text{ou} \quad x &= 1\end{aligned}$$

Lorsque $x = -7$:

M.G.	M.D.
$\log_2 (x+3)^2$	4
$= \log_2 (-7+3)^2$	
$= \log_2 (-4)^2$	
$= \log_2 16$	
$= 4$	

M.G. = M.D.

Lorsque $x = 1$:

M.G.	M.D.
$\log_2 (x+3)^2$	4
$= \log_2 (1+3)^2$	
$= \log_2 (4)^2$	
$= \log_2 16$	
$= 4$	

M.G. = M.D.

Lorsqu'on remplace x par -7 ou par 1 dans l'équation initiale, $\log_2(x+3)^2$ est défini.

C) Résoudre des équations exponentielles à l'aide de logarithmes

3. Résous chaque équation. Arrondis tes réponses au centième près.

a) $4^x = 605$

$$\begin{aligned}4^x &= 605\\\log 4^x &= \log 605\\x\log 4 &= \log 605\\x &= \frac{\log 605}{\log 4}\\x &\approx 4{,}62\end{aligned}$$

b) $8(3^{2x}) = 568$

$$\begin{aligned}8(3^{2x}) &= 568\\3^{2x} &= 71\\\log 3^{2x} &= \log 71\\2x(\log 3) &= \log 71\\x &= \frac{\log 71}{2\log 3}\\x &\approx 1{,}94\end{aligned}$$

c) $4^{2x-1} = 3^{x+2}$

$$\begin{aligned}4^{2x-1} &= 3^{x+2}\\\log 4^{2x-1} &= \log 3^{x+2}\\(2x-1)\log 4 &= (x+2)\log 3\\2x\log 4 - \log 4 &= x\log 3 + 2\log 3\\2x\log 4 - x\log 3 &= 2\log 3 + \log 4\\x(2\log 4 - \log 3) &= 2\log 3 + \log 4\\x &= \frac{2\log 3 + \log 4}{2\log 4 - \log 3}\\x &\approx 2{,}14\end{aligned}$$

Important :

Quand la variable inconnue est un exposant/puissance l'équation doit être convertie sous forme de logarithme.

Quand la variable inconnue est dans un logarithme l'équation doit être convertie sous forme de base avec une puissance.

D) Problème a mot

Lorsqu'un animal meurt, la quantité de carbone 14 (^{14}C) radioactif présent dans ses os se met à diminuer. Les archéologues évaluent l'âge d'un fossile à la quantité de ^{14}C qu'il contient. La demi-vie du carbone 14 est de 5 730 ans.

Head-Smashed-In, dans le sud-ouest de l'Alberta, est le meilleur exemple d'un précipice à bisons en Amérique du Nord. On y a trouvé des os qui avaient 49,5 % de leur carbone 14 initial. Quel était l'âge de ces os ?

$$0{,}495m_0 = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$$
$$0{,}495 = 0{,}5^{\frac{t}{5\,730}}$$
$$\log 0{,}495 = \log 0{,}5^{\frac{t}{5\,730}}$$
$$\log 0{,}495 = \frac{t}{5\,730}\log 0{,}5$$
$$\frac{5\,730 \log 0{,}495}{\log 0{,}5} = t$$
$$5\,813 \approx t$$

Le ^{14}C diminue de moitié tous les 5 730 ans. La masse restante, m, au temps t correspond à $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$, où m_0 est la masse initiale.

Puisqu'il restait 49,5 % de la masse initiale de ^{14}C au bout de t années, remplace $m(t)$ par $0{,}495m_0$ dans $m(t) = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}$.

E) Le théorème du changement de base

Pour les nombres positifs a, b et n, et pour $a \neq 1$ et $b \neq 1$,

$$\boxed{\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}}$$

Soit $y = \log_2 3$; trouve sa valeur.

Méthode 1 : Changement de base.

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$
$$\approx 1{,}58496$$

Méthode 2 : Conversion à la forme exponentielle

$$y = \log_2 3$$
$$2^y = 3$$
$$\log 2^y = \log 3$$
$$y \log 2 = \log 3$$
$$y = \frac{\log 3}{\log 2}$$