Mathématique Appliquée 40S

Enseignante : Mme. Layton

Nom de l'élève :

____

Fonctions Exponentielle et Logarithmique

Table des Matières

Unité : Fonction Exponentielle et Logarithmique

Leçon 1 : Explorer les caractéristiques des fonctions exponentielles

Fonction Exponentielle :

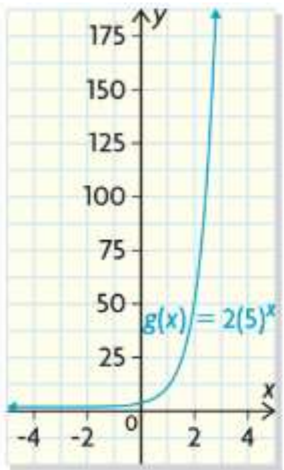
Fonction de la forme $y = a(b)^x$, où $a \neq 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$. a = l'ordonnée à l'origine, b = la base
Si une fonction contient **<u>un *x* dans son exposant</u>**, elle est considérée comme une fonction exponentielle.

Les Caractéristiques

1. **Quelles sont les caractéristiques des fonctions exponentielles.**

a) $g(x) = 2(5)^x$

x	$g(x)$
-3	$2(5)^{-3} = 0{,}016$
-2	$2(5)^{-2} = 0{,}08$
-1	$2(5)^{-1} = 0{,}4$
0	$2(5)^{0} = 2$
1	$2(5)^{1} = 10$
2	$2(5)^{2} = 50$
3	$2(5)^{3} = 250$

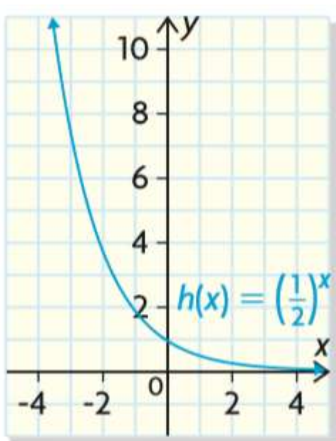


Caractéristiques :

- Le nombre d'abscisses à l'origine ;
- L'ordonnée à l'origine ;
- Le comportement aux extrémités ;
- Le domaine ;
- L'image
- Croissant/décroissant ?

b) $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$h(x)$
-3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$
-2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
-1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1$
1	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 0{,}5$
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 0{,}25$
3	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 0{,}125$

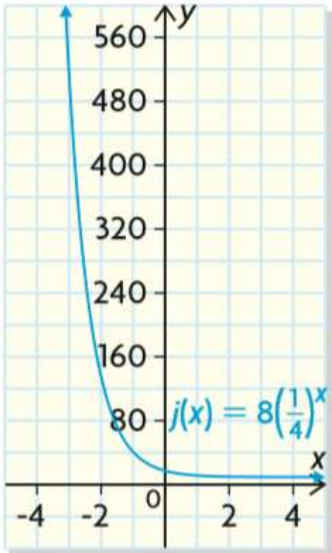


Caractéristiques:

- Le nombre d'abscisses à l'origine ;
- L'ordonnée à l'origine ;
- Le comportement aux extrémités ;
- Le domaine ;
- L'image
- Croissant/décroissant ?

c) $j(x) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^{x}$

x	$j(x)$
−3	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 512$
−2	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 128$
−1	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 32$
0	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{0} = 8$
1	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{1} = 2$
2	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{2} = 0,5$
3	$8\left(\frac{1}{4}\right)^{3} = 0,125$



Caractéristiques:

-Le nombre d'abscisses à l'origine ;

-L'ordonnée à l'origine ;

-Le comportement aux extrémités ;

-Le domaine ;

-L'image

-Croissant/décroissant ?

2. Détermine le type de fonctions les tables de valeurs représentent ci-dessous. Insérer les valeurs dans Edit et trace un nuage de points.

a)

x	$f(x)$
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

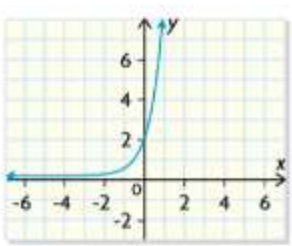
b)

x	$g(x)$
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

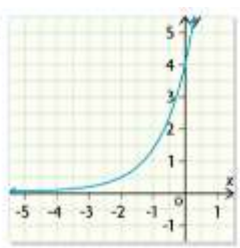
3. Associer une équation exponentielle au graphique correspondant. Explique votre raisonnement.

i) $y = 3(0,2)^x$ **ii)** $y = 4(3)^x$ **iii)** $y = 4(0,5)^x$ **iv)** $y = 2(4)^x$

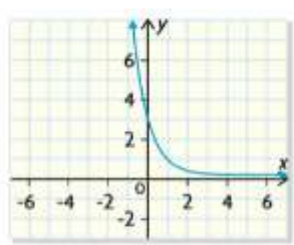
a)



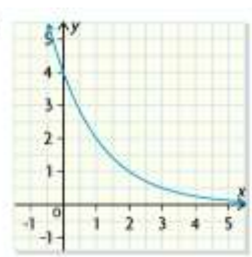
b)



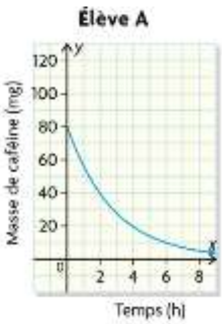
c)



d)

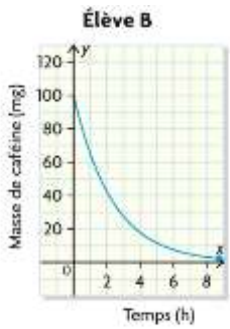


4. Deux élèves ont bu des boissons énergisantes qui contenaient de la caféine. On a ensuite mesuré la masse « y » de caféine, en milligrammes, dans le corps de chaque élève, pendant une période de 8 h. Les données sont présentées dans les graphiques ci-contre, où « x » représente le temps en heures.



a) À l'aide de chaque graphique, détermine l'ordonnée à l'origine, le domaine et l'image de chaque fonction.

b) Pourquoi les deux fonctions décroissent-elles ?



c) D'après les deux graphiques, quel élève a pris le plus de caféine ? Quel élève a assimilé la caféine le plus rapidement ?

d) Estime la quantité de caféine dans le corps de chaque élève 4 h après la consommation de la boisson énergisante.

e) Explique la signification de l'ordonnée à l'origine dans ce contexte. Pourquoi les valeurs de l'ordonnée à l'origine sont-elles différentes ?

Leçon 2 : Modélisation de données à l'aide de fonctions exponentielles

A) Détermine les équations des fonctions exponentielles à partir d'une table de valeur et trace les graphiques

Exemple 1 :
Un chef de restaurant prépare des sandwichs et veut savoir comment vite qu'ils baissent en température après qu'ils sont cuits. Il observe les données suivantes :

# de min.	0	1	2	3	4	5
Température	84˚C	79,8˚C	75,8˚C	72,7˚C	68,7˚C	65,5˚C

a) Trace le graphique.

b) Détermine l'équation de cette régression exponentielle.

c) Quelle sera la température après 10 min ?

d) Après combien de temps sera-t-il à 60˚C ?

Exemple 2 :
Un biologiste étudie l'évolution d'une population de drosophiles dans un milieu surveillé.

a) Détermine la fonction exponentielle qui représente les données dans le tableau. (ExpReg)

Jour	Nombre de drosophiles
0	70
1	76
2	84
3	92
4	101
5	111

b) Détermine la population des drosophiles à jour 10.

c) Détermine le jour où la population de drosophiles dépassera 160 drosophiles.

B) Créer les données d'après un contexte et détermine l'équation de la fonction exponentielle

Exemple 3 :
Un individu a une maladie très contagieuse. Chaque jour, s'il n'est pas traité, il passera l'infection à 10 autres personnes. Le lendemain, chacun (lui inclus) passera la maladie à 10 autres individus.

a) Détermine l'équation qui représente cette régression.

Jour	Infectés

b) Combien seront infectés après le 6^{e} jour ?

c) Quand est-ce que 50 000 gens seront infectés ?

Exemple 4 :
Un village avec une population de 6000 personnes à un taux de croissance annuel de 5,5 %.

a) Détermine l'équation de la fonction exponentielle qui modélise les données.

b) Combien d'années plus tard est-ce que la population atteint 9000 personnes. Montre ton travail.

Exemple 5 :
Il y a une substance radioactive qui a une masse initiale de 200g, il perde la moitié de sa masse chaque 60 jours.

Détermine l'équation de régression qui représente ces données.

Leçon 3 : Caractéristiques des fonctions logarithmiques en base 10 et en base e

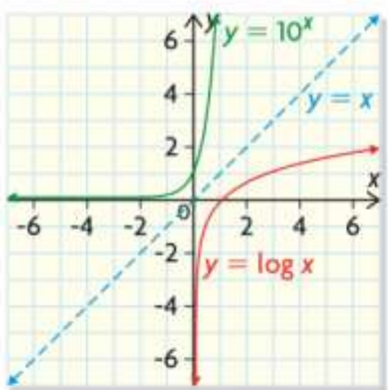
Fonction Logarithmiques :

Fonction de la forme $y = a\log_b x$, où $b > 0$, $b \neq 1$ et $a \neq 0$
b est la base de la fonction log. (Nous allons travailler avec la base de 10)

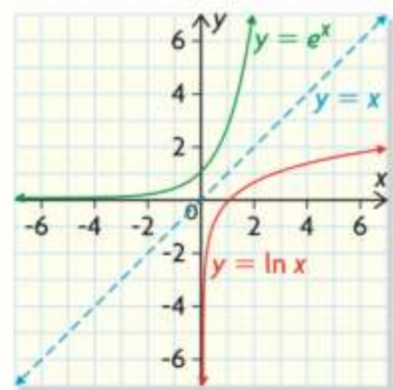
Si a $>$ 0 la fonction est croissante !!
Si a $<$ 0 la fonction est décroissante !!

La fonction logarithmique est la fonction réciproque d'une fonction exponentielle (les valeurs de x et y changent de place).

- Le graphique de $y = \log x$ est une réflexion du graphique de $y = 10^x$ par rapport à la droite $y = x$.



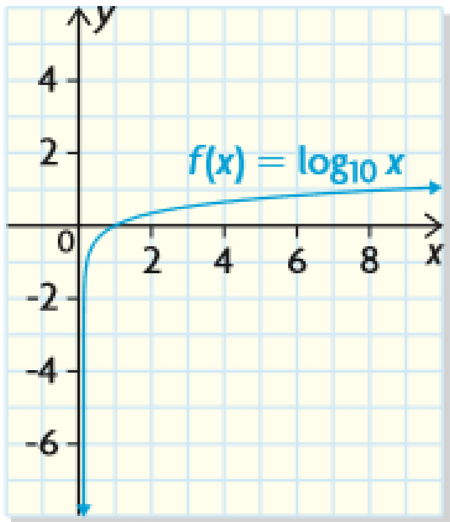
- Le graphique de $y = \ln x$ est une réflexion du graphique de $y = e^x$ par rapport à la droite $y = x$.



Les Caractéristiques des fonctions logarithmiques :

Abscisse à l'origine	1 ; soit au point (1, 0)
Nombre d'ordonnées à l'origine	0
Comportement aux extrémités	La courbe s'étend du quadrant IV au quadrant I ou du quadrant I au quadrant IV.
Domaine	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
Image	$\{y \in \mathbb{R}\}$

x	$f(x) = \log_{10} x$
−1	indéfini
0	indéfini
1	0
2	0,301...
3	0,477...
4	0,602...
5	0,698...
6	0,778...
7	0,845...
8	0,903...
9	0,954...
10	1



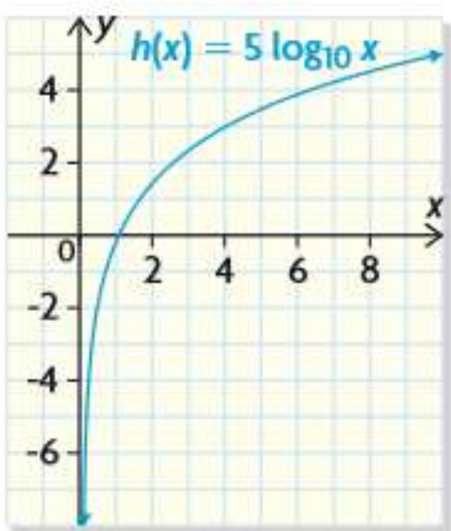
Caractéristiques

- Nombre d'abscisses à l'origine
- L'ordonnée à l'origine
- Le comportement aux extrémités
- Le domaine

$\left\{x \epsilon R \;\middle|\; x > 0\right\}$

- L'image
- Croissance ?

x	$h(x) = 5 \log_{10} x$
−1	indéfini
0	indéfini
1	0
2	1,505...
3	2,385...
4	3,010...
5	3,494...
6	3,890...
7	4,225...
8	4,515...
9	4,771...
10	5



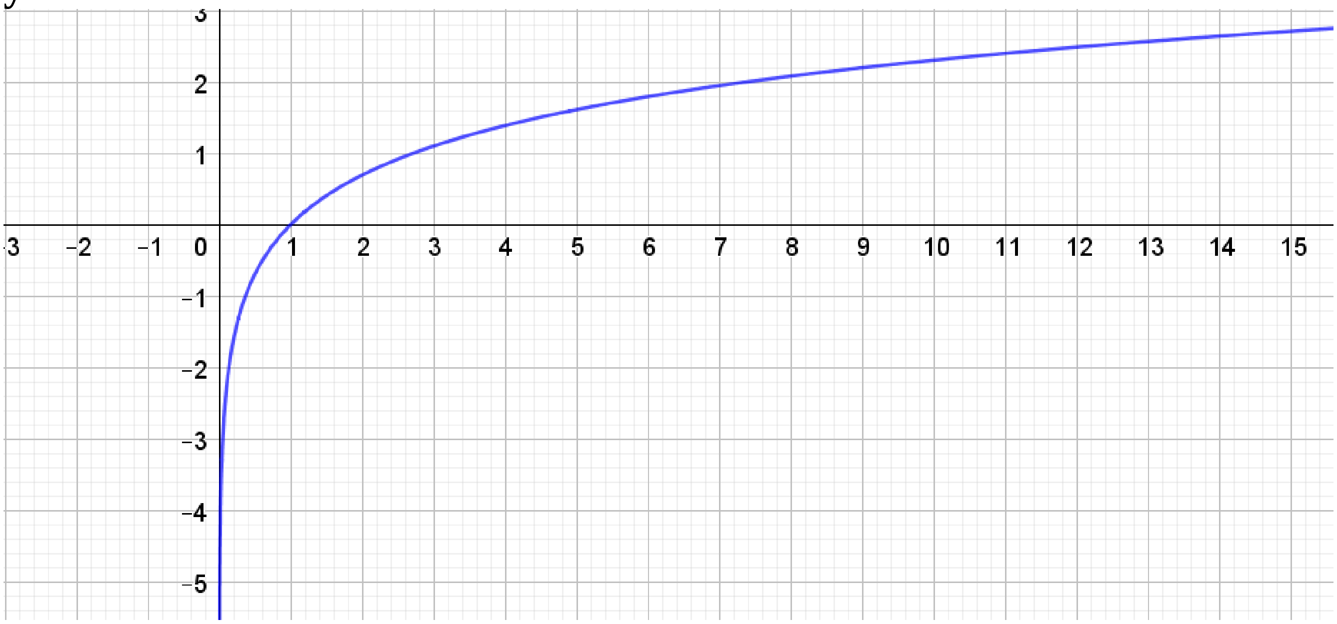
Caractéristiques

- Nombre d'abscisses à l'origine
- L'ordonnée à l'origine
- Le comportement aux extrémités
- Le domaine
- L'image
- Croissance ?

Fonction Logarithmique naturelle

Fonction de la forme $y = \ln x$ où la base est e (2,718….)

y = lnx



Trouve les caractéristiques pour les fonctions f(x) = lnx, g(x) = 2lnx, h(x) = 5lnx

$f(x) = \ln x$	$g(x) = 2 \ln x$	$h(x) = 5 \ln x$
1	1	1
Aucune	Aucune	Aucune
Le graphique s'étend du quadrant IV au quadrant I.	Le graphique s'étend du quadrant IV au quadrant I.	Le graphique s'étend du quadrant IV au quadrant I.
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
$\{y \in \mathbb{R}\}$	$\{y \in \mathbb{R}\}$	$\{y \in \mathbb{R}\}$

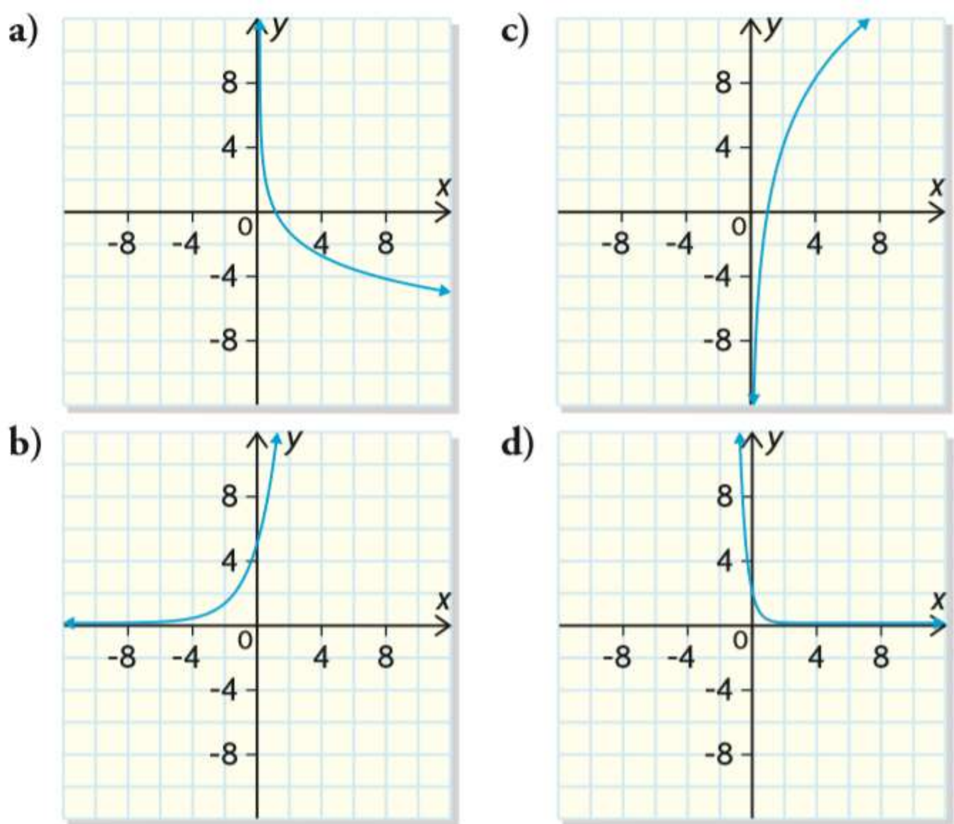
« a » est positive alors tous les graphiques sont croissants.

Exemple 1 : Détermine les caractéristiques des fonction logarithmiques suivantes.

	a) $f(x) = -2\ln x$	b) $g(x) = -2\log x$	$h(x) = -5\ln x$
Nombre d'abscisses à l'origine			
L'ordonnée à l'origine			
Le comportement aux extrémités			
Le domaine			
L'image			
Croissance ?			

Exemple 2 : Associer les équations de fonctions exponentielles et logarithmiques à leur graphique. Explique votre raisonnement.

i) $y = 5(2)^x$ **ii)** $y = 2(0{,}1)^x$ **iii)** $y = 6\log x$ **iv)** $y = -2\ln x$

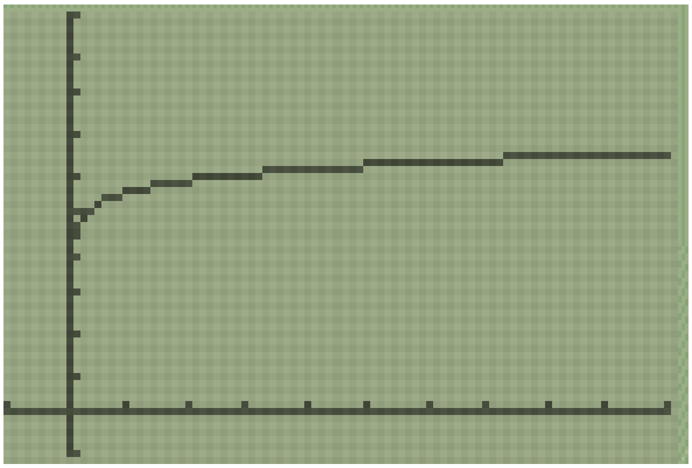


Leçon 4 : Modélisation de données à l'aide de fonctions logarithmiques

Exemple 1 :
En Saskatchewan, en 1909, ils ont eu leur plus grand tremblement de terre, ayant une magnitude de 5,5 sur l'échelle Richter. La magnitude (***M***) d'un tremblement de terre qui est ***T*** fois plus intense qu'un tremblement mesurant 5,5 sur l'échelle Richter est déterminée par l'équation :

M = log T + 5,5 ➔ y = log(x) + 5,5

a) Démontre ceci graphiquement.



b) Détermine, si possible, l'abscisse et l'ordonnée.
Ordonnée : aucun **Abscisses : aucun**

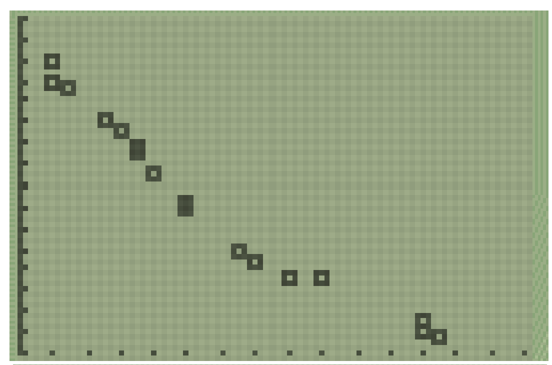
c) Indique le domaine et l'image de ce résultat.
Domaine :]0 , ∞[et Image =]5 , ∞[

d) Un tremblement de terre qui est 50 fois plus intense que celui-ci aura quelle magnitude ?
2nd TRACE – 1:valeur x = 50 ➔ Y = 7,20

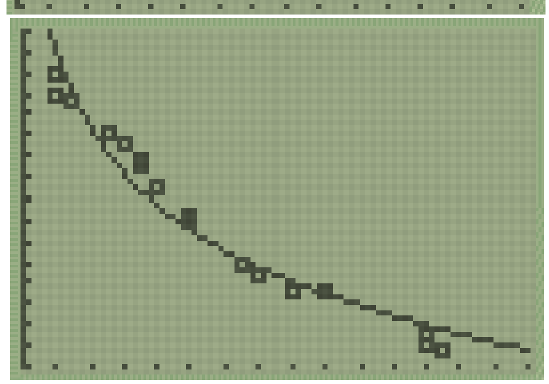
Exemple 2 :
Un groupe d'élèves consomme 200 mg de caféine en même temps. Là, ils mesurent la quantité de caféine dans leur sang à des temps variés. Voici leurs découvertes :

Temps (h)	1,0	1,5	5,0	3,0	6,5	4,0	3,5	8,0	7,0	12,0	2,5	12,0	5,0	7,0	3,5	1,0	5,0	8.0	9.0	12,5
Quantité (m)	168	167	113	145	90	125	138	77	83	50	150	55	112	84	136	180	110	75	76	49

a) Insère ces données et démontre ces points graphiquement.



b) Calcule l'équation logarithmique et démontre cette fonction sur votre graphique. (LnReg)



c) Combien de mg de caféine sera dans le sang d'un individu typique après 6,2 heures ?

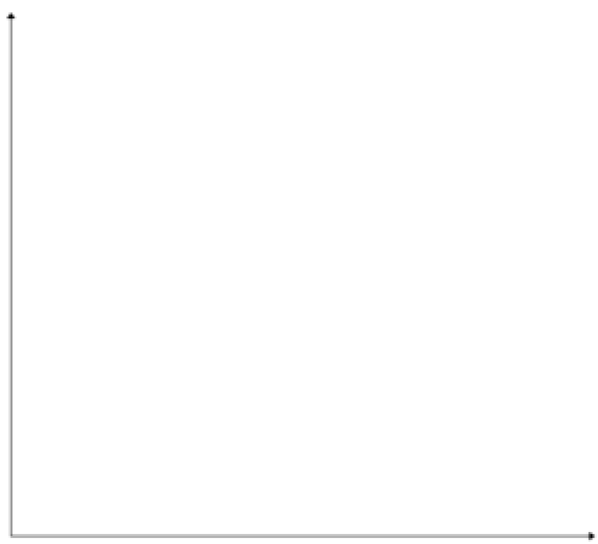
d) Après combien de temps est-ce que la moitié de la caféine ne sera plus dans le système ?

Exemple 3 :
Lydia fait un travail de recherche sur l'augmentation des droits de scolarité postsecondaire en Alberta pour le site Web de l'école. Elle a trouvé certaines données qui prennent les droits de scolarité en 1992 comme point de repère en leur attribuant une valeur de 100 %. Les droits de scolarité de toutes les autres années sont comparés à ceux de 1992.

Année	Droits de scolarité sous la forme du pourcentage de leur valeur en 1992 (%)
1979	37,8
1982	43,8
1984	54,0
1986	58,8
1989	69,4
1992	100,0
1999	222,7
2004	287,1
2006	305,9

Statistique Canada, tableau 326-0002 : Indice des prix à la consommation (IPC)

a) Trace le graphique qui représente les données.



b) Détermine l'équation de la fonction de régression logarithmique pour les données.