Calcul 42S

Enseignante : Mme. Layton

Nom de l'élève :

____

Table des Matières

Unité : Revue

Leçon 1 : Résolution d'inéquations

A) Forme Linéaire :

Exemple 1 :

Résous : $2x - 6 \geq 7 - 3x$

Exemple 2 :

Résous $(x - 2)(x - 3) > 0$

Exemple 3 :

Résous $(x - 1)(x + 1) > 0$

Exemple 4 :

Résous $x^2 < 81$

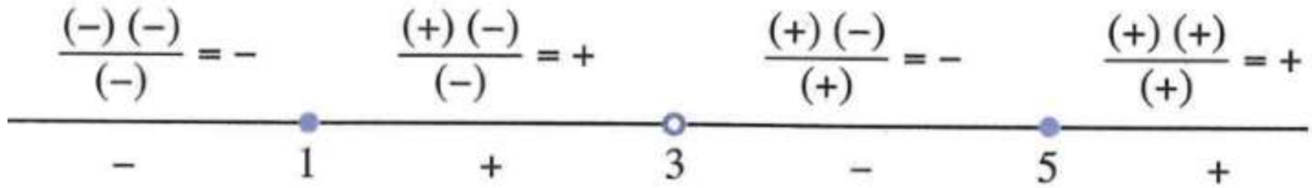
Exemple 5:

Résous $x - x^2 \geq -6$

B) Forme Fraction

Exemple 6 :

Résous : $\frac{(2x-2)(\ x-5)}{(x-3)} \geq 0$



Exemple 7 :

Résous : $\frac{x^2+10x+21}{x^2-8x+12} \leq 0$

Exemple 8 :

Résous : $\frac{x-7}{(x+6)^2(x-4)} \geq 0$

Leçon 2 : Résolution Équation/Inéquation Valeur Absolue et Radical

A) Résolution d'équation Valeur Absolue

Exemple 1 :

Résous : $|x-2|=6$

B) Résolution d'inéquation Valeur Absolue

Exemple 2 :

Résous : $|x-1|<7$

C) Résolution d'Équation Radical

Exemple 3 :

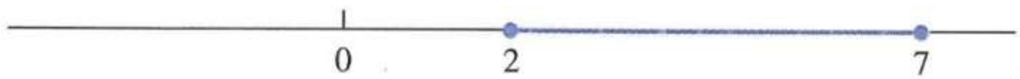
Résous : $\sqrt{x-3}=5$

Exemple 4 :

Résous : $x+3= \sqrt{2x^2-7}$

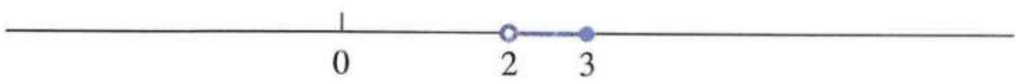
Leçon 3 : Notation d'Intervalle et Ensembliste (domaine et image)

$$[2,7]=\{x\in\mathbb{R} \mid 2\leq x\leq 7\}$$



$$]1,4[=\{x\in\mathbb{R} \mid 1< x< 4\}$$

$$]2,3]=\{x\in\mathbb{R} \mid 2< x\leq 3\}$$



$$]-2,\infty[=\{x\in\mathbb{R} \mid x>-2\}$$

Exemple 1 : Noter sous forme d'intervalles les sous-ensembles suivants et donner une représentation graphique.

a) $\{x\in\mathbb{R} \mid -1< x\leq 5\}$

b) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 2\}$

c) $\{x\in\mathbb{R} \mid x>-3\}$

Exemple 2 : Noter sous forme ensembliste les intervalles suivants et donner une représentation graphique.

a) $[-1,4]$ b) $[7,\ 12[$ c) $]-\infty,+\infty[$

Exemple 3 : Soit la fonction f(x) = $\frac{x+3}{2x-1}$. Trouve le domaine et l’image.

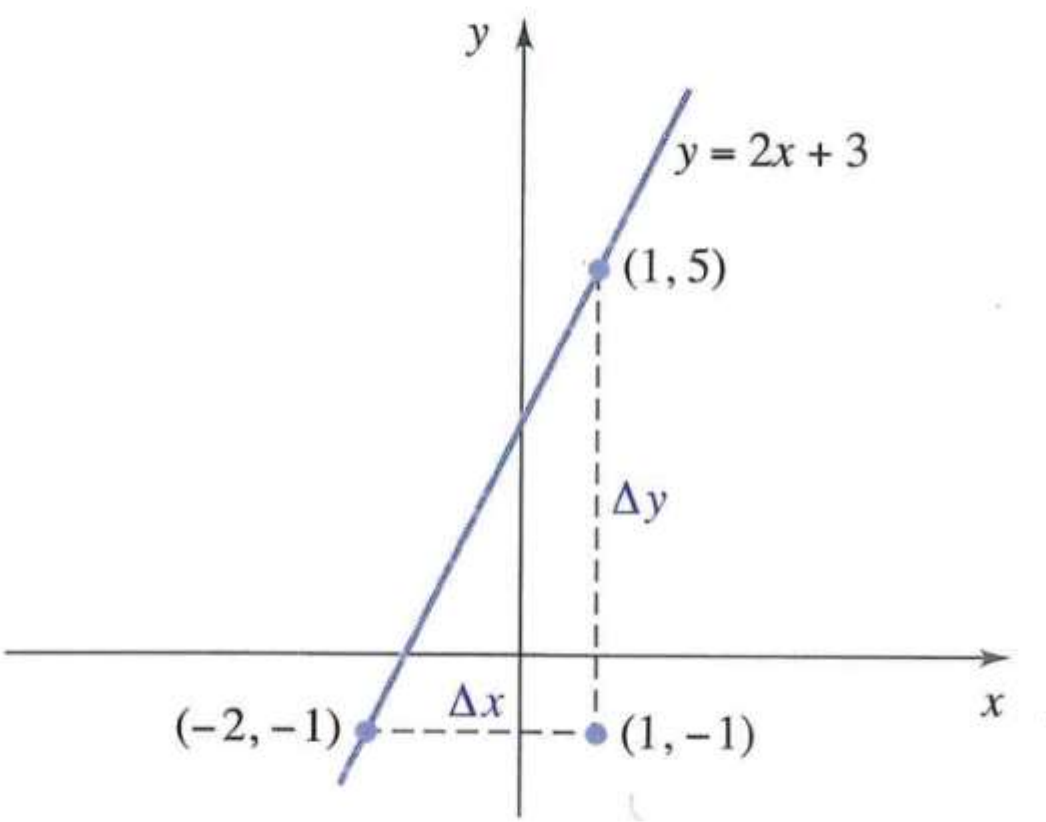
Exemple 4 : Soit la fonction h(x) = $\frac{x^2+1}{x}$. Trouve le domaine et l’image.

Exemple 5 : Soit la fonction g(x) = $\frac{(x+2)}{(x+2)(x-3)}$. Trouve le domaine et l’image.

Leçon 4 : Les Graphiques

A) La Pente (Taux de variation ou Taux d'accroissement)

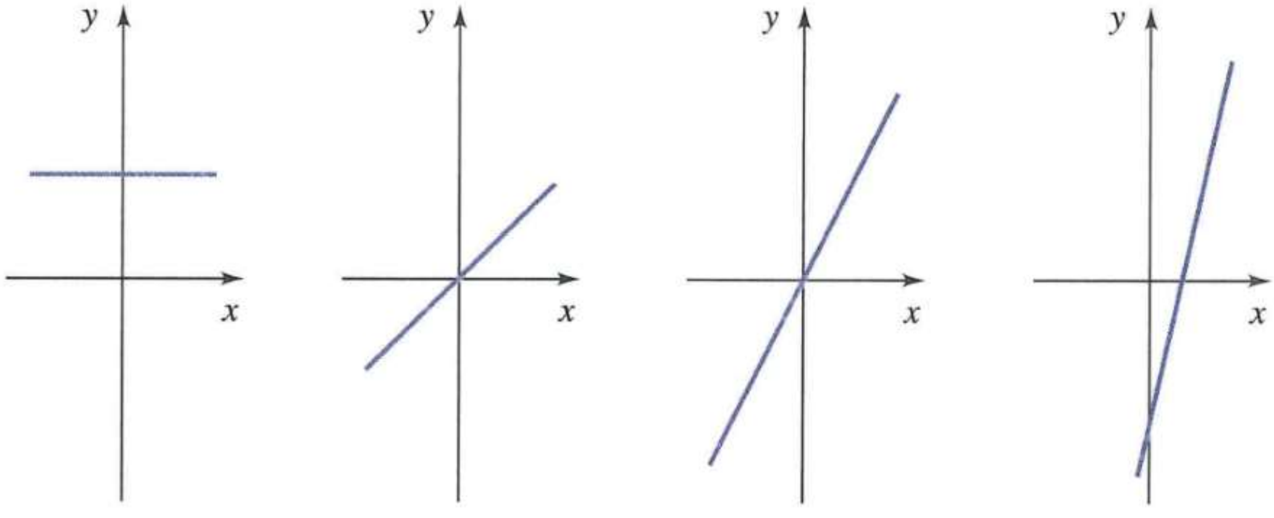
Prenons deux points de la droite y = 2x + 3, par exemple les points (-2, -1) et (1, 5).



$$\text{pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{Pente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}} = \frac{6}{3} = 2$$

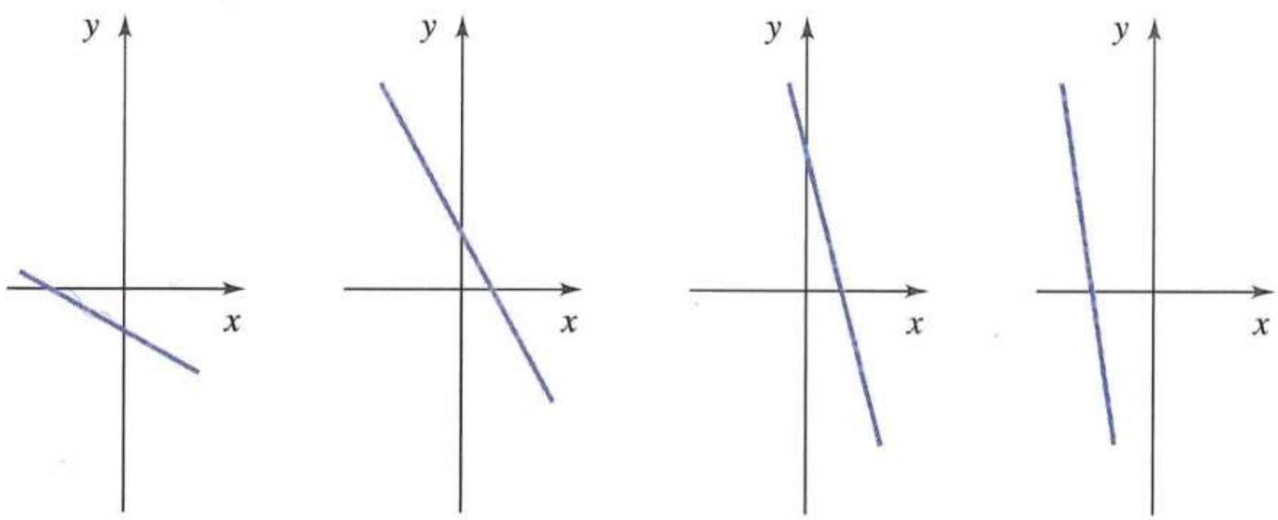
Inclinaison



$m = 0$ $\quad$ $m = 1$ $\quad$ $m = 2$ $\quad$ $m = 4$

On remarque que plus la pente est grande, plus la droite s'approche de la verticale.

Lorsque la pente est négative, l'inclinaison est dans l'autre sens. Considérons le graphique suivant.

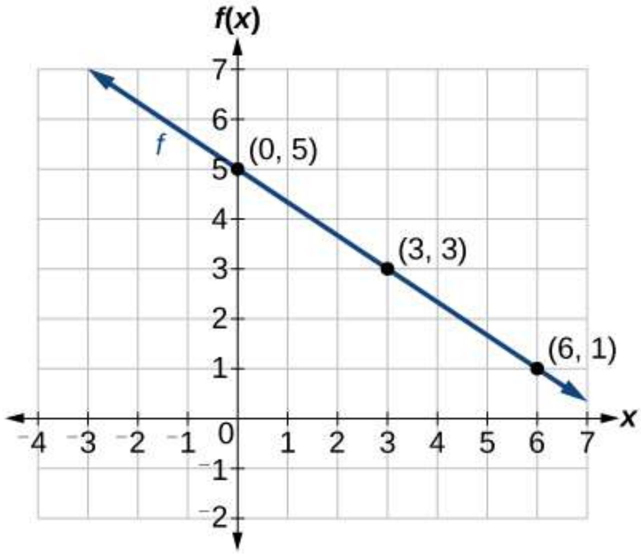


$m = -1/2$ $\quad$ $m = -2$ $\quad$ $m = -4$ $\quad$ $m = -7$

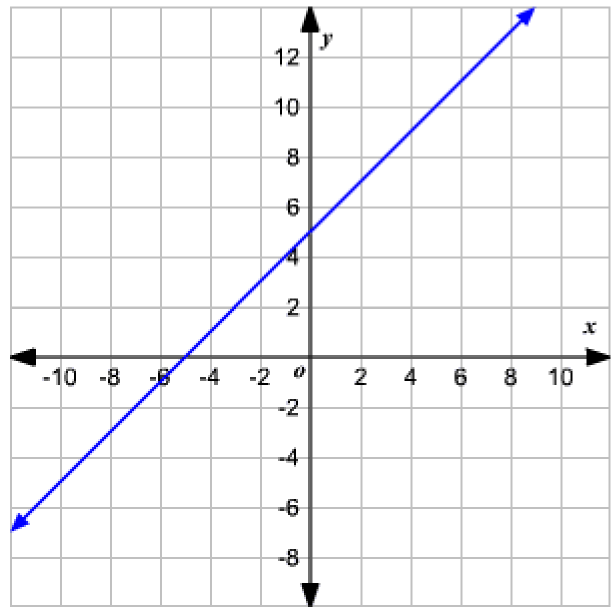
On observe que plus la valeur absolue de la pente est grande, plus la droite s'approche de la position verticale.

Exemple 1 : Trouve la pente de la droite d'équation $5y + 6x = 8$

Exemple 2 :



Exemple 3 :



Exemple 4 :

Un graphique linéaire qui touche les points
(0, 1) et (2, 3)

B) Les Fonctions

$y = f(x)$

Exemple 5 : Trace les fonctions.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = x^2$

c) $y = \begin{cases} 3 - x \quad si\ x < 0 \\ x^2 + 1\ si\ x \ \geq 0 \end{cases}$

d) $y^2 = x$ (relations)

e) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x+3};\ x \ \geq -3 \\ |x| - 4\ ;\ x \ \geq -3 \end{cases}$

C) Notation Fonctionnel

Évaluation d’une fonction en un point

Exemple 6 : Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x + 4$

Détermine :

a) $f(1)$ b) $f(2)$ c) $f(x + h)$

d) $f(0)$ e) $f(-1)$ f) $f(a)$

Unité : Les Limites

Leçon 1 : Introduction aux limites

Vous allez apprendre :

- Les représentations graphiques et numériques des limites.

A) Introduction :

$6 \div 3 = 2 \text{ donc } 2 \times 3 = 6$

$6 \div 0 \text{ ne peut pas être évalué}$

Les limites ont été développés pour travailler avec des divisions par 0. Les limites sont utilisées pour considérer ce qui arrive quand vous divisez par une valeur qui est très petite et proche à, mais pas égale, à zéro.

Les limites sont les blocs de constructions pour plusieurs concepts en calcul. Les limites sont utilisées pour prouver des théorèmes dans les dérivées et les intégrales.

Exemple 1 :

Analyse f(x) = $\sqrt{x-2}$ pour x ≈ 6.

Le tableau ci-dessous démontre les valeurs de x $<$ 6, mais très proche à x = 6.

x	4	5	5.5	5.7	5.9	5.99	6
$f(x)$	1.414	1.732	1.871	1.924	1.975	1.998	2

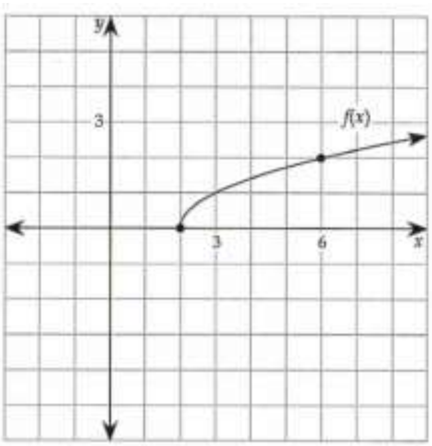
Lorsque x s'approche à 6 (de la gauche), f(x) s'approche 2

Le tableau ci-dessous démontre les valeurs de x $>$ 6, mais très proche à x = 6.

x	6	6.01	6.1	6.3	6.5	7	8
$f(x)$	2	2.003	2.025	2.074	2.121	2.236	2.450

Lorsque x s'approche 6 (de la droite), f(x) s'approche à 2.

Après avoir étudié le graphique de f(x) ci-dessous, vous devriez observer que la valeur de la fonction existe à x = 6 et f(6) = 2.



Quand x s'approche à 6, la valeur de f(x) s'approche à 2, alors la valeur de la fonction de 2 est appelée la limite de la fonction quand x s'approche à 6.

Attention : Dans cette fonction, la limite est aussi la valeur de la fonction. Cependant dans plusieurs questions de limite, la valeur de la fonction n'est pas définie ou est une différente valeur de la valeur de la limite.

La réponse est écrite : $\lim_{x \to 6} f(x) = 2$

Définition :
Trouver la limite est déterminer où une fonction ou une suite s'approche lorsqu'une variable (habituellement x) tend vers une valeur quelconque.

Pour trouver la limite d'une fonction nous n'avons qu'à remplacer la valeur dont x tend dans la fonction. Si nous obtenons une constante ou 0, nous avons trouvé la limite.

$$\lim_{x \to 2} x^2 - 2x + 1 = 2^2 - 2(2) + 1 = 1$$

Si la fonction ne contient pas la variable dont nous recherchons ou la fonction est une constante, il n'y a aucun changement à celle-ci.

$$\lim_{x \to 4} 5 = 5$$

$$\lim_{x \to 0} 6y - 5h = 6y - 5h$$

Exemple 2 :

Analyse le graphique et le table de valeurs pour g(x).

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2} \ pour\ environ\ x = -1$$

Le tableau ci-dessous démontre les valeurs de x $<$ -1, mais très proche à x = -1.

x	-1.9	-1.5	-1.2	-1.1	-1.01	-1
$g(x)$	10	2	1.25	1.111	1.010	DNE (does not exist)

Le tableau montre que quand x s'approche à -1 (de la gauche), g(x) approche à 1.

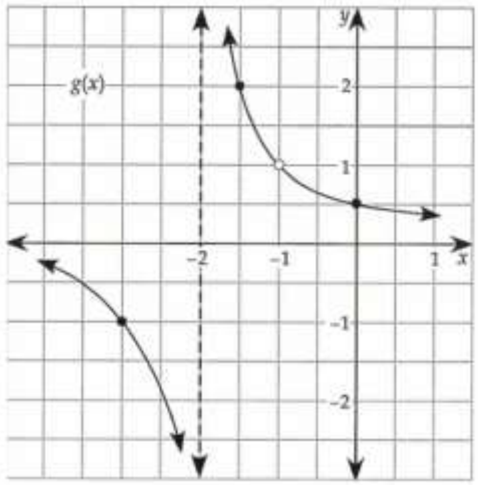
Le tableau ci-dessous démontre les valeurs de x $>$ -1, mais très proche à x = -1

x	-1	-0.99	-0.9	-0.8	-0.5	0
$g(x)$	DNE	0.990	0.909	0.833	0.667	0.5

Le tableau montre que quand x s'approche à -1 (de la droite), g(x) approche à 1.

En regardant le graphique de g(x), vous pouvez voir que g(-1) n'existe pas parce que c'est un point de discontinuité dans le graphique. (Ne peut pas diviser par 0.

$$g(-1) = \frac{-1+1}{(-1)^2 + 3(-1) + 2} = \frac{0}{0}$$



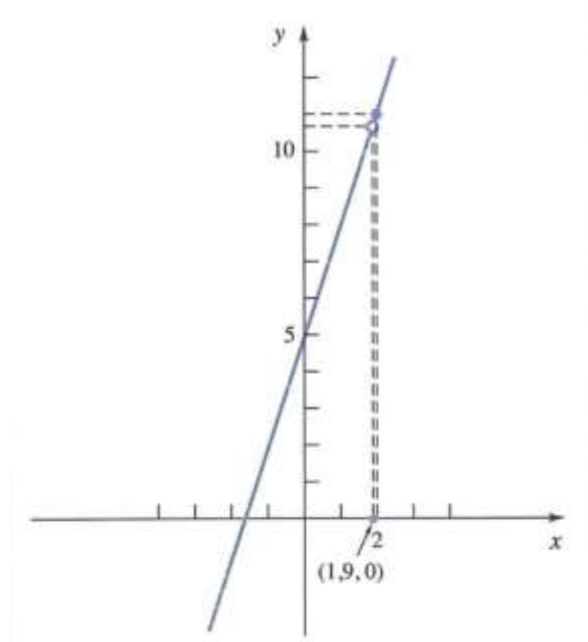
Attention : Pour cette fonction, la limite existe au point x = -1, mais la fonction n'existe pas à ce point. Une limite n'a pas besoin d'être égale à la valeur de la fonction parce que dans ce cas il décrit la valeur de f(x) quand x s'approche, mais n'est pas égale à, -1.

$$\lim_{x \to -1} g(x) = 1$$

et f(-1) n'existe pas

Exemple 3 :

Soit g(x) = $\frac{(3x-2)(x-2)}{(x-2)}$. Trouve : $\lim_{x \to 2} g(x)$

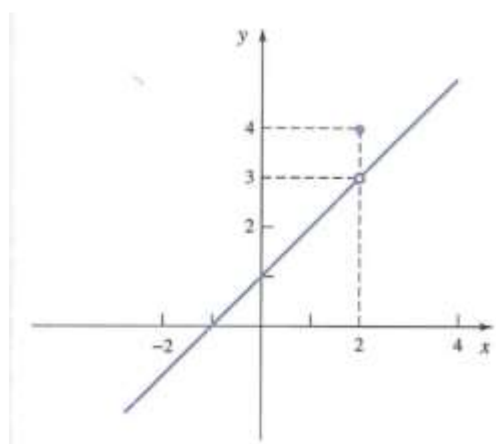


Exemple 4 :

$$i(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \neq 1{,}9 \\ 0 & \text{si } x = 1{,}9 \end{cases} \qquad D_i = \mathbb{R}$$

Trouve :

$$\lim_{x \to 2} i(x)$$

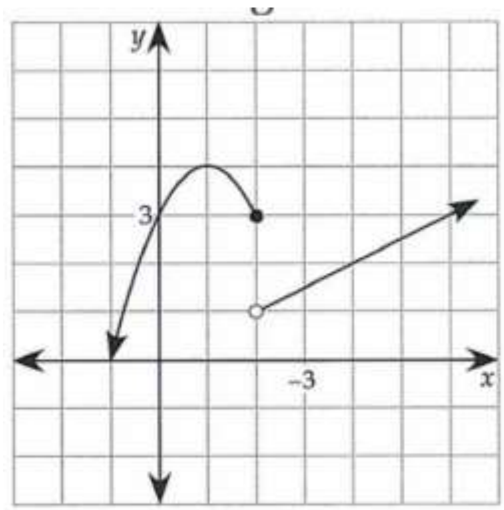


Exemple 5 :

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \qquad D_j = \mathbb{R}$$

Trouve : $\lim_{x \to 2} j(x)$

B) Les limites à gauche et les limites à droite

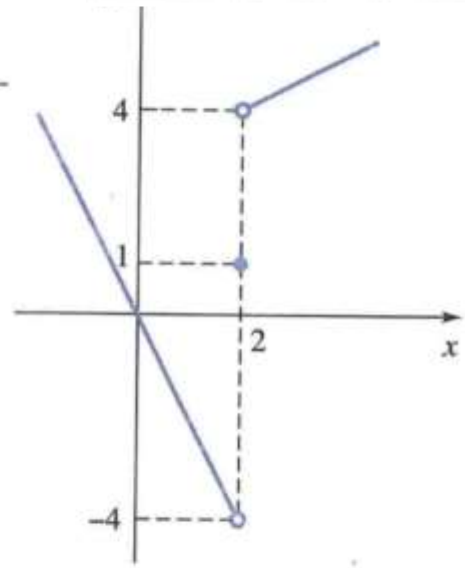


Pour certaines fonctions plus complexes que les autres, nous devrons étudier le comportement plus attentivement, c'est-à-dire d'abord à gauche du point considéré, puis à la droite. Le résultat ne sera pas nécessairement le même.
Soit la fonction suivante :

Exemple 6 :

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{x}{2} + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

x	y
1	−2
1,8	−3,6
1,9	−3,8
1,99	−3,98
1,999	−3,998
•••	•••
2	1
•••	•••
2,001	4,0005
2,01	4,005
2,1	4,05
2,5	4,25



Limite à gauche

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -4$$

« la limite de f(x), lorsque x tend vers 2 moins, est -4 »

x→ 2^- signifie x→ et $x < 2$; donc x prend des valeurs de plus en plus près de 2 mais toujours inférieurs à 2.

Limite à droite

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

« la limite de f(x), lorsque x tend vers 2 plus, est 4 »

x→ 2^+ signifie x→ et $x > 2$; donc x prend des valeurs de plus en plus près de 2 mais toujours supérieurs à 2.
Cette situation arrive chaque fois qu'une fonction fait un saut.

Existence de la limite

La limite existe si et seulement si la limite à gauche est égale à la limite à droite, c'est-à-dire lorsque les deux « bouts de courbe » sont dans le prolongement l'un de l'autre. Dans ce cas,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Si la limite à gauche est différente de la limite à droite, c'est-à-dire si les deux bous de courbes ne sont pas dans le prolongement l''un de l'autre, alors la limite n'existe pas. Si

$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ alors $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe pas

Exemple 7 :

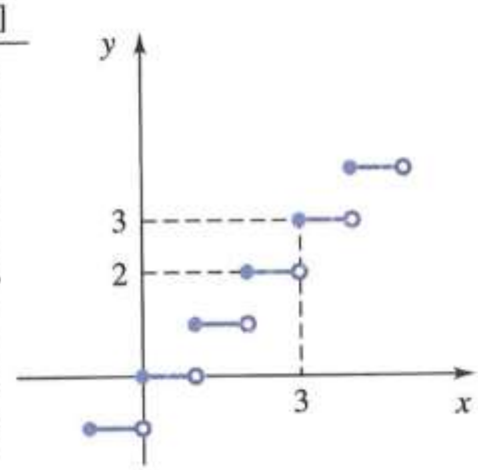
Trouver $\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$

Note : $[\![x]\!]$ se lit « partie entière de x ».

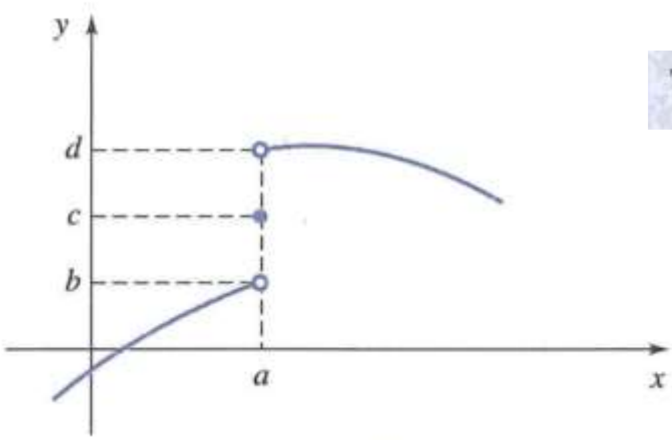
$\lim_{x\to 3^-} [\![x]\!] = 2$ et $\lim_{x\to 3^+} [\![x]\!] = 3$

$\lim_{x\to 3} [\![x]\!]$ n'existe pas

x	$[\![x]\!]$
1,2	1
2,1	2
2,8	2
2,9	2
2,99	2
2,999	2
•••	•••
3,001	3
3,01	3
3,1	3
3,2	3
3,5	3
4,2	4



Exemple 8 :
Considérons une fonction f définie par le graphique suivant :



Trouver $f(a)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a} f(x)$

$f(a) = c$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = d$

$\lim_{x\to a} f(x) \quad \nexists$

Exemple 9 :

Trouver $\lim_{x \to 3} \frac{2x+5}{x-3}$

C'est une limite de la forme $\frac{11}{0}$. Il faut l'étudier de plus près en considérant les limites à gauche et à droite.

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{2x+5}{x-3} = \frac{11}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+5}{x-3} = \frac{11}{0^+} = +\infty$$

$\lim_{x \to 3} \frac{2x+5}{x-3}$ n'existe pas

Exemple 10 :

Trouver $\lim_{x \to 2} \frac{4}{(x-2)^2}$

C'est une forme $\frac{4}{0}$. Considérons les limites à gauche et à droite :

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$
$$\lim_{x \to 2^+} \frac{4}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{4}{(x-2)^2} = +\infty$$

Exemple 11 :

Trouver $\lim_{x\to 1} \frac{4x+1}{2x^2-11x+9}$

C'est une forme $\frac{5}{0}$. Considérons les limites à gauche et à droite :

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x+1}{2x^2-11x+9} = \frac{5}{2^- - 11^- + 9}$$

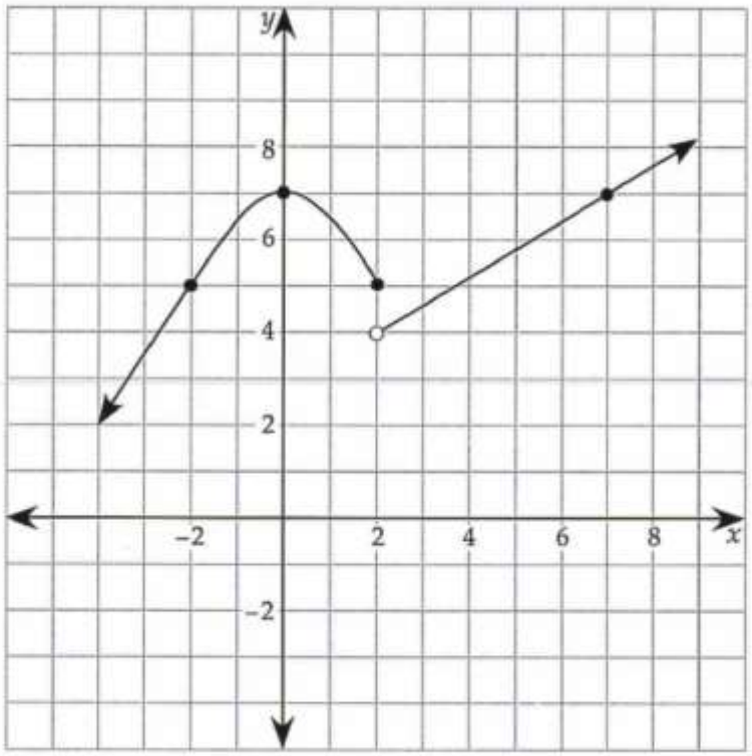
Vu de cette manière, il est difficile de vérifier si le dénominateur est 0^- ou 0^+. Pour connaître le signe du dénominateur sans équivoque, on devra le factoriser. Ainsi,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4x+1}{2x^2-11x+9} = \lim_{x\to 1^-} \frac{4x+1}{(x-1)(2x-9)} = \frac{5}{0^-(-7)} = \frac{5}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4x+1}{2x^2-11x+9} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4x+1}{(x-1)(2x-9)} = \frac{5}{0^+(-7)} = -\infty$$

$\lim_{x\to 1} \frac{4x+1}{2x^2-11x+9}$ n'existe pas

Exemple 12 :



Determine
a) $\lim_{x\to -2^-} g(x)$
b) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$
c) $\lim_{x\to -2} g(x)$
d) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$
e) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$
f) $\lim_{x\to 2} g(x)$
g) $\lim_{x\to 7^-} g(x)$
h) $\lim_{x\to 7^+} g(x)$
i) $\lim_{x\to 7} g(x)$

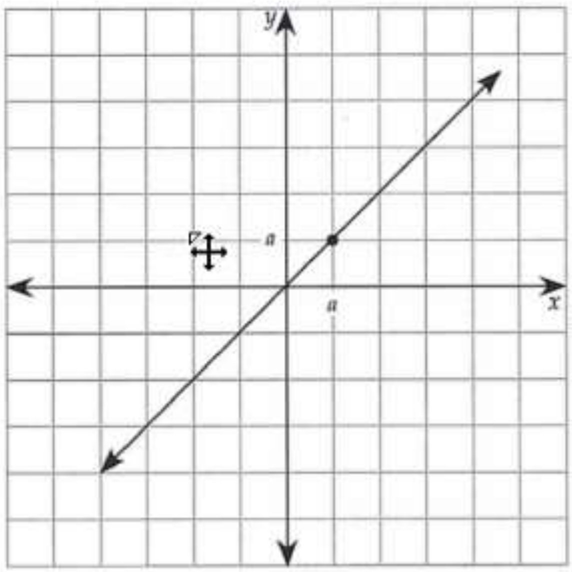
Exemple 13 :
Détermine la limite.

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2-4 & \text{if } x\le 2 \\ x+6 & \text{if } x>2 \end{cases}$$

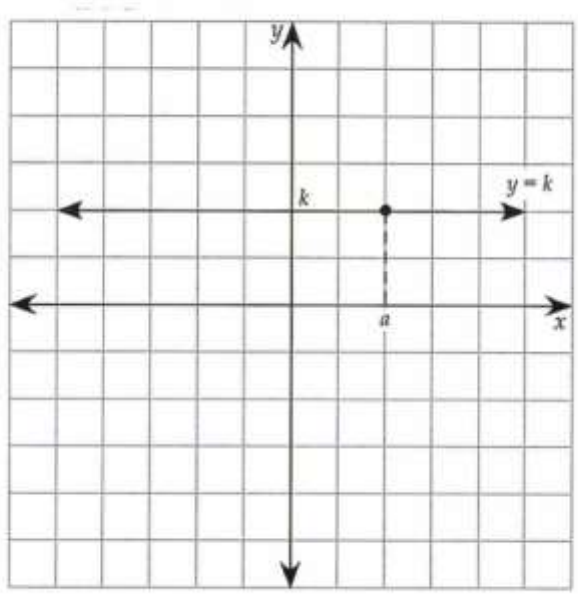
Leçon 2 : Les Théories des Limites

A)Les sept théories principales :

1. La Théorie de limite de la fonction d'identité
$\lim_{x \to a} x = a$



2. La Théorie de limite de la fonction de constante
lim k = k



Exemple 1 : Trouve :
a) $\lim_{x \to 3} (4x - 1)$

b) $\lim_{x \to 2} (5x + 3)$

Exemple 2 : Trouve :
a) $\lim_{x \to 3} 5$

b) Trouve $\lim_{x \to 1} \sqrt{7}$

3. La Théorie de limite d'une constante fois une fonction.

$$\lim_{x \to a} \left[k \cdot f(x)\right] = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Exemple 3 : Trouve
a) $\lim_{x \to 3} [5(x + 2)]$

b) $\lim_{x \to 1} 7(8x - 5)$

4. La Théorie de limite de la somme et de la différence

$$\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemple 4 : Trouve :

a) $\lim_{x\to 3}[(x+2)+(3x-1]$

b) $\lim_{x\to 3} x^2+3x+9$

5. La Théorie de limite du produit

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Exemple 5 : Trouve :

a) $\lim_{x\to 3}[(x+2)(3x-1)]$

b) $\lim_{x\to 1}[(2x+1)(x-5)]$

6. La Théorie de limite du quotient

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \qquad g(x) \neq 0$$

Exemple 6 : Trouve :

a) Trouve $\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{3x-1}$

b) Trouve $\lim_{x\to 3}\frac{4+x}{5-2x}$

7. La Théorie de limite de la puissance

$$\lim_{x \to a} \left[f(x)^n \right] = \left(\lim_{x \to a} f(x) \right)^n$$

Exemple 7 : Trouve

a) $\lim\limits_{x \to 3} x^5$

Note :

$$\lim_{x \to 1} \left((x+2)^2 + x \right) \neq \lim_{x \to 1} (x+2)^2 + x$$

Alors attention avec vos parenthèses

Substitution directe

Vous pouvez évaluer les limites analytiquement en substituant la valeur dans la variable dans la fonction. Cependant, la substitution n'est pas toujours possible.

B) Des limites indéfinies :

Exemple 8 : Évaluer

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{3x+5}{x-2} \right) \qquad \lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2-1}{x-1} \right]$$

Ces limites n'existent pas parce que le dénominateur ne peut pas être égale à 0.

C) Des limites indéterminées

$une\ limite\ qui\ a : \frac{0}{0}$

Exemple 9 :

$$\lim_{x \to 3} \left[\frac{x^2-9}{x-3} \right]$$

Avec la substitution directe la limite est indéterminé : $\lim\limits_{x \to 3} \left[\frac{x^2-9}{x-3} \right] = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

Donc, la manipulation algébrique est nécessaire : (factorise)

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}\right]$$
$$=\lim_{x\to 3}(x+3)$$
$$=3+3=6$$

Exemple 10 :

Determine $\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right]$.

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\right]=\frac{\sqrt{4}-2}{4-4}=\frac{2-2}{4-4}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}\right]$$
$$=\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+2}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Exemple 11 :

Determine $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\right)\cdot\left(\frac{2x}{2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2-x}{(x-2)\cdot(2x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-(x-2)}{(x-2)\cdot(2x)}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{-1}{2x}\right)$$
$$=\frac{-1}{2(2)}=-\frac{1}{4}$$

Pratique 1 :

a)

Trouver $\lim_{x \to 1}(x^4 + x^3 + 2x + 1)$

b)

Trouver $\lim_{x \to 2}(3x^2 - 4x - 3)^3$

c)

Trouver $\lim_{x \to -1} \sqrt[4]{4x^2 - 1}$

d)

Trouver $\lim_{x \to 1}(3x^3 - x + 2)\sqrt{7x + 2}$

e)

Trouver $\lim_{x \to 1}(3x^3 - x + 2)\sqrt{7x + 2}$

f) Trouve

$$\lim_{x \to 2}\left(2x^3 - 3x + 5\right)$$

g) Trouve

$$\lim_{x \to 2}\left[\frac{3x + 5}{x - 1}\right]$$

h)

Trouver $\lim_{x \to -2} \sqrt{5x + 10}$

Autres Théories

$$\lim_{x\to a} b = b$$

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

$$\lim_{x\to a} |x| = |a|$$

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x\to a} b^x = b^a$$

$$\lim_{x\to a} \log_c x = \log_c a$$

Exemple :

Trouver $\lim_{x\to 2} \log_{10}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)$

En appliquant les résultats on obtient :

$$\log_{10} 0$$

Voyons l'approche à droite et l'approche à gauche :

$$\lim_{x\to 2^+} \log_{10}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \log_{10}\left(\frac{2^+-2}{2^++2}\right) = \log_{10}\left(\frac{0^+}{4}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \log_{10}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) = \log_{10}\left(\frac{2^--2}{2^-+2}\right) = \log_{10}\left(\frac{0^-}{4}\right) \text{ n'existe pas}$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to 2} \log_{10}\left(\frac{x-2}{x+2}\right) \text{ n'existe pas}$$

Pratique 2 :

a)

Trouver $\lim_{x \to 2} \cos\left(\frac{x^2+3}{2x-5}\right)$

b)

Trouver $\lim_{x \to -5} \left|\frac{x^3+x^2-x+10}{2x^2+9x}\right|$

c)

Trouver $\lim_{x \to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si} \quad x < 3 \\ \dfrac{x^2+6}{x} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$

c) Évaluer

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2+2x-3}{x+3}$$

d)

Trouver $\lim_{x \to 3} \frac{(2x-1)(x^2-9)}{(x-3)(x+2)}$

e)

Trouver $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x}{8x^2 - 3x}$

f)

Trouver $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{4 - x^2}$

g)

Trouver $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{6(x + \Delta x) - 6x}{\Delta x}$

h)

Trouver $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

i)

Trouver $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - \sqrt{3x - 2}}{2x - 4}$

D)La Notation Fonctionnelle

$$f(x)=2x^2-5x+1$$

Exemple 12 :
Détermine :

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right]$$

Réponse :

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right]=\left[\frac{f(1)-f(1)}{0}\right]=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(2(1+h)^2-5(1+h)+1\right)-\left(2(1)^2-5(1)+1\right)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\left(2(1+2h+h^2)-5-5h+1\right)-(2-5+1)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{(2+4h+2h^2-5-5h+1)-(2-5+1)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{(2h^2-h-2)-(-2)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{(2h^2-h-2+2)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[\frac{(2h^2-h)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{h\cdot(2h-1)}{h}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}(2h-1)$$

$$=2(0)-1=-1$$

Leçon 3 : La Limite et le Concept de l'infini

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\times 0=0$$

(k est une constante positive)

$\infty+\infty=\infty$	$\infty\times\infty=\infty$
$k\times\infty=\infty$	$\infty/k=\infty$
$k/0^{+}=\infty$	$k/0^{-}=-\infty$
$\infty+k=\infty$	$k/\infty=0$
$\infty-k=\infty$	$\log_a\infty=\infty$ (où $a>1$)
$\sqrt{\infty}=\infty$	$b^{\infty}=\infty$ (où $b>1$)
$\infty^{n}=\infty$	$\lvert\infty\rvert=\infty$
$\sin\infty$ n'existe pas	$\cos\infty$ n'existe pas

Exemple 1 :

Trouver $\lim_{x\to\infty}(x^2+6x-4)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x^2+6x-4)&=(\infty\times\infty)+6(\infty)-4\\&=\infty+\infty-4\\&=\infty\end{aligned}$$

Exemple 2 :

Trouver $\lim_{x\to\infty}(x^3-5x+7)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(x^3-5x+7)&=\lim_{x\to\infty}\left(x(x^2-5)+7\right)\\&=\infty(\infty-5)+7\\&=\infty\times\infty+7\\&=\infty\end{aligned}$$

Exemple 3 : Détermine :

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{7x-5}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{7x-5}\right)=\frac{2}{7(\infty)-5}$$ **INDÉFINI**

Trouve le plus grand exposant de la variable et divise chaque terme par cet variable avec son exposant.

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{2\,/\,\mathrm{X}}{\frac{7x}{\mathrm{X}}-\frac{5}{\mathrm{X}}}\right)\right] \quad =\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{x}}{7-\frac{5}{x}}\right) \quad =\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}7-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}} \qquad =\frac{0}{7-0}=\frac{0}{7}=0$$

Exemple 4 :

$$\text{Determine } \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-4}{5x^2-7x+8}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3x-4}{5x^2-7x+8}\right)=\frac{2(\infty)^2+3(\infty)-4}{5(\infty)^2-7(\infty)+8} = \frac{\infty}{\infty}$$

Plus grande exposant de la variable est x^2, alors on divise tous les termes par x^2.

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2\cdot\frac{1}{x^2}+3x\cdot\frac{1}{x^2}-4\cdot\frac{1}{x^2}}{5x^2\cdot\frac{1}{x^2}-7x\cdot\frac{1}{x^2}+8\cdot\frac{1}{x^2}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}{5-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}\right) \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}=0 \quad =\frac{2+\square+\square}{5-\square+\square}=\frac{2}{5}$$

Exemple 5 :

Trouver $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+1}{x^2+4}$

C'est une forme $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}=\frac{3+0+0}{1+0}=3$$

Exemple 6 :

Trouver $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^3-16x^2+7}{x^4+1}$

C'est une forme $\frac{-\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{16}{x^2}+\frac{7}{x^4}}{1+\frac{1}{x^4}}=\frac{0-0+0}{1+0}=0$$

Exemple 7 :

Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+1}{2x^4+3}$

C'est une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\dfrac{1}{x^4}}{2+\dfrac{3}{x^4}}=\frac{\infty+0}{2+0}=\frac{\infty}{2}=\infty$$

Exemple 8 :

Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^2+x}$

la limite initiale est bien une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{2x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}}$$

$$=\frac{1-0+0}{2+0}=\frac{1}{2}$$

Exemple 9 :

C'est une forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{4x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}}{\dfrac{x}{x}-\dfrac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\dfrac{1}{x^2}}}{1-\dfrac{2}{x}}=\frac{\sqrt{4+0}}{1-0}=2$$

Exemple 10 :

Les biologistes du gouvernement étudient la faune d'un certain territoire. Ils ont observé que la population P des loups de ce territoire croît selon la fonction

$$P(t)=6000-\frac{5000}{3^t}$$

où t représente le nombre d'années écoulées depuis le début des observations et P, la population des loups au temps t. Si la tendance se maintient, quelle sera la population des loups dans ce territoire à très long terme ?

Mathématiquement, on traduit « à très long terme » par $t\to\infty$. Alors, on cherche

$$\lim_{t\to\infty}P(t)=\lim_{t\to\infty}\left[6000-\frac{5000}{3^t}\right]$$

$$=6000-\frac{5000}{3^\infty}$$

$$=6000-0=6000$$

Pratique 3 :

a)

$$\lim_{x \to \infty} x^2.$$

b)

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}.$$

c)

$$\lim_{x \to -\infty} (-\sqrt{x})$$

d)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{2/3}}{x+1}.$$

e)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Leçon 4 : Les Limites et les Asymptotes

A) Les Asympototes horizontales

La droite y = b est une asymptote horizontale de f, si et seulement si :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{et/ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

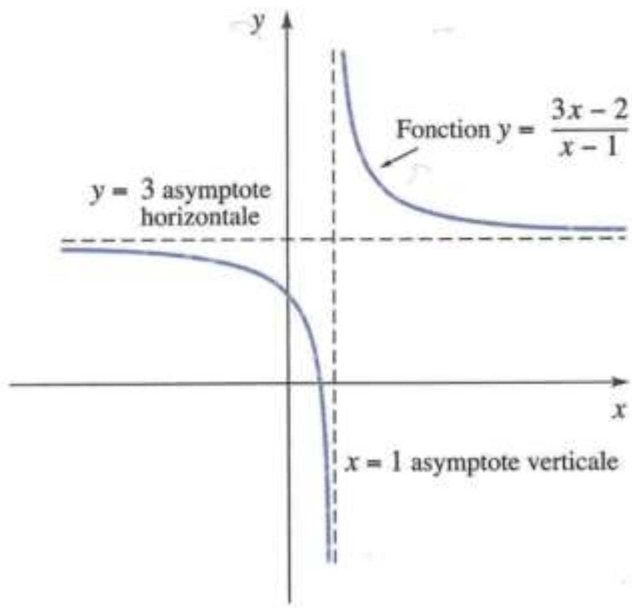
Exemple 1 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

Trouve l'asymptote horizontale avec les limites.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x-2}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$$

Donc, y = 3 est une asymptote horizontale.



B) Les Asymptotes verticales

La droite x = a est une asymptote verticale de la fonction f, si et seulement si :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{et/ou} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

OU $-\infty$

Exemple 2 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

Trouve l'asymptote verticale avec les limites.

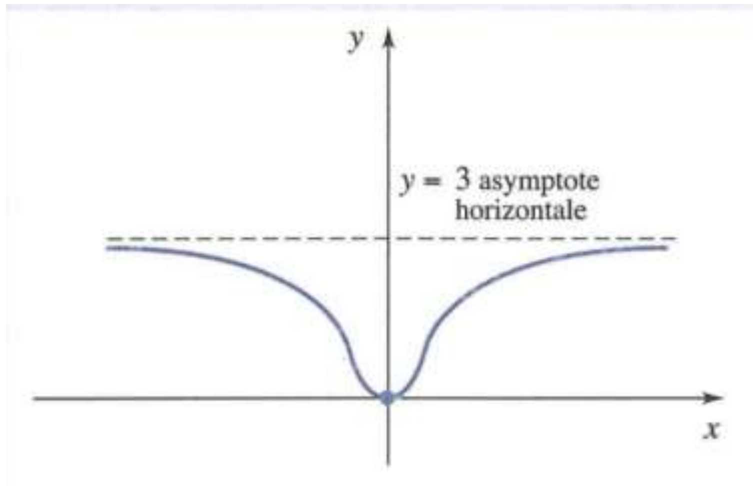
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{3x-2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{3x-2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Donc, x = 1 est une asymptote verticale.

Exemple 3 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{3x^2}{1+x^2}$

Trouve les asymptotes avec les limites.



C) Les Asymptotes Obliques

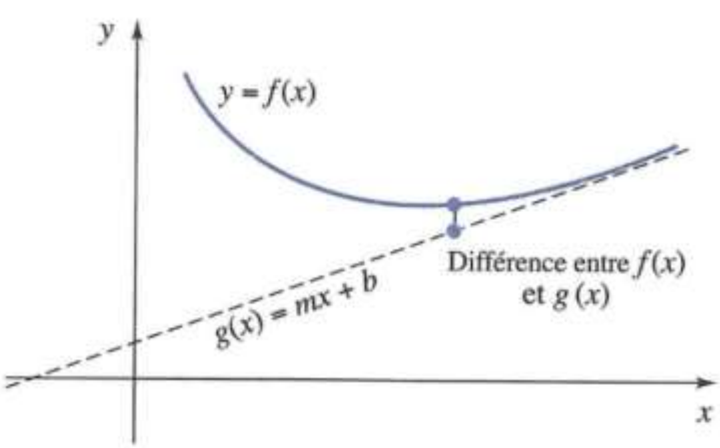
La droite g(x) = mx + b est une aymptote oblique de la fonction f si et seulement si,

$$1)\ \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad \textbf{et} \qquad 2)\ \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - g(x)\right] = 0$$

Alors on doit trouver m et b.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad (m \neq 0, m \neq +\infty, m \neq -\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right] = b \quad (b \neq +\infty, b \neq -\infty)$$



Exemple 4 :

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 2}$

Trouver l'asymptote oblique.

1) Trouve la pente de cette asymptote (m) :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-2)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 2$$

Et

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x}} = 2$$

Alors m = 2

2) Trouve l'ordonnée à l'origine (b) :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - 2x \right] &= \lim_{x \to \infty} \left[\frac{2x^2 - x - 1}{x - 2} - 2x \right] \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 1 - 2x^2 + 4x}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x - 2} = 3\end{aligned}$$

Il en est de même pour $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - 2x \right]$.

Donc, $b = 3$ et $y = 2x + 3$ est une asymptote oblique de la fonction.

Exemple 4 :

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x-2}$

Trouve les asymptotes avec les limites et trace le graphique de la fonction.

Asymptote vertical

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{2x^2-x-1}{x-2} = \frac{5}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{2x^2-x-1}{x-2} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

Donc, x = 2 est l'asymptote verticale

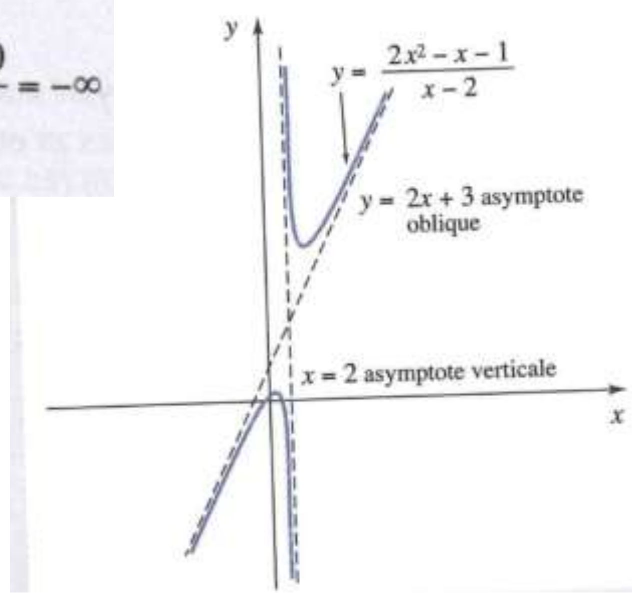
Asymptote horizontal

Test les Limites à l'infini :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x-1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{\infty-1-0}{1-0} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x-1}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1-\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = \frac{-\infty-1-0}{1-0} = -\infty$$

Donc, il n'y a pas d'asymptote horizontale.



Asympotote oblique :

Effectue la division des polynômes.

$$\frac{2x^2-x-1}{x-2} = 2x+3+\frac{5}{x-2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-x-1}{x-2}-(2x+3)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x-2} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2x^2-x-1}{x-2}-(2x+3)\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x-2} = 0$$

On peut conclure que y = 2x + 3 est une asymptote oblique.

Revue :

1. La forme indéterminée de $\frac{0}{0}$.

Il y a plusieurs façons de changer la forme de ces fonctions afin de les dimplifier :

a. factoriser une variable

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-1)}{x}=\lim_{x\to 0}x-1=-1$$

b. factoriser un trinôme quadratique

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}=\lim_{x\to 2}x-3=-1$$

c. factoriser une différence de deux carrés

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim_{x\to\infty}x+4=8$$

d. multiplier un radical par son conjugué

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

e. multiplier par 1 (on multiplie le numérateur et le dénominateur par le même terme)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}\cdot\frac{2x}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

Dans ce dernier exemple, il est plus facile de multiplier par le dénominateur commun des fractions du numérateur.

2. La forme indéterminée de $\frac{\infty}{\infty}$.

Dans cet instant, nous n'abons qu'à multiplier par l'inverse de la variable ayant le plus grand exposant.

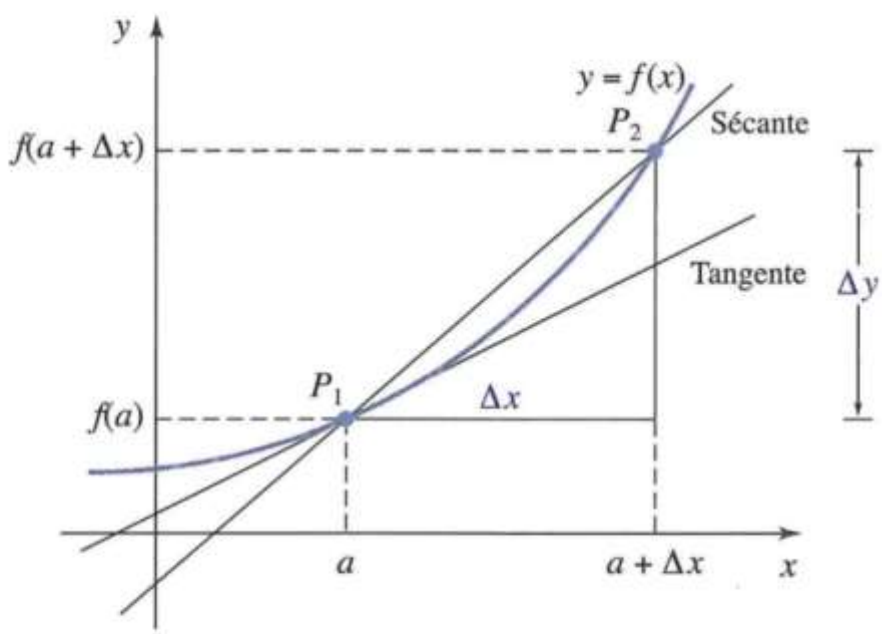
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^2+2x-1}{x^5+3x^4-2x^3-4x^2+2}\cdot\frac{1/x^5}{1/x^5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}+\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x^5}}{1+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x^5}}=\frac{0-0+0-0}{1+0-0-0+0}=0$$

Unité : Les dérivées (f'(x), y' ou $\frac{dy}{dx}$)

Leçon 1 : Ce que c'est

A) Introduction :

Une dérivée est la pente d'une fonction à n'importe quel point sur celle-ci. (C'est le taux de variation Ex : vitesse moyenne. N'oubliez pas f(x) = mx + b, m est la pente pour la droite linéaire. m = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$)



$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

ET

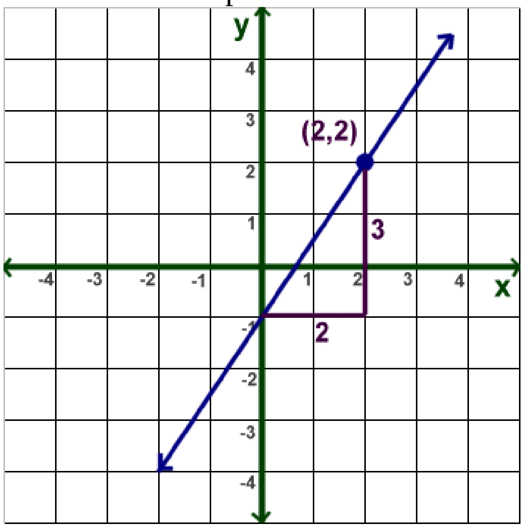
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$\text{pente de la sécante} = \frac{P(a + \Delta x) - P(a)}{\Delta x}$$

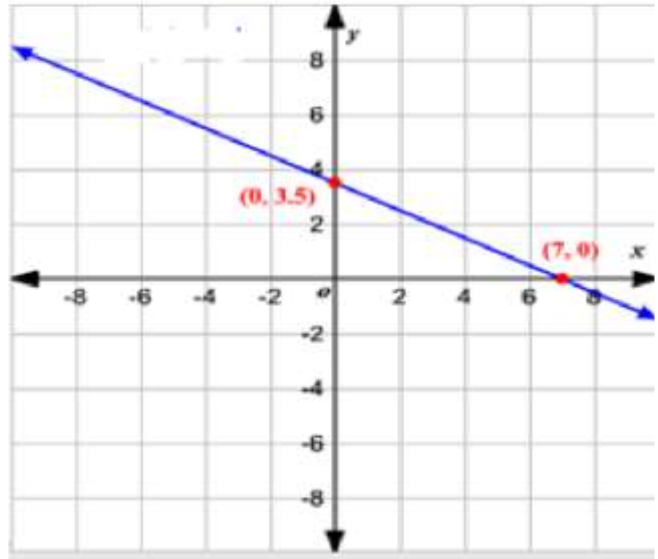
1) Revue La Pente (m)/le taux de variation (taux moyen) :

a) pente = déplacement vertical/déplacement horizontal

Détermine la pente du droite.



Exemple : Détermine la pente du droite.



b) Formule pour trouve la Pente : $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}$

Exemple :

Calcule la pente des coordonnées suivantes. D(-3,7) et E(5,-5)

c) - Deux droite sont parallèle si les pentes sont le même.

- Deux droites sont perpendiculaires si leurs pentes sont inverses/opposés.

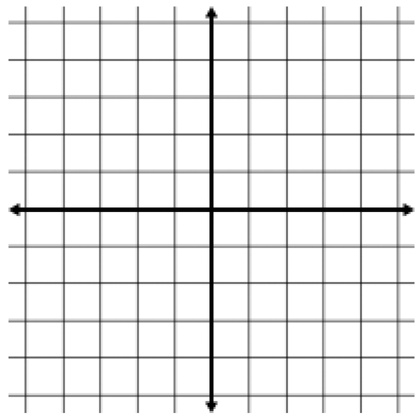
2) L'accroissement de la fonction :

Exemple 1 :

Trouver l'accroissement de la fonction $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$ sur l'intervalle $[1,3]$.

Solution :
L'accroissement de la fonction est

$$\Delta y = f(3) - f(1)$$
$$\Delta y = 2 - 4$$
$$\Delta y = -2$$



L'accroissement est négatif.

Exemple 2 :

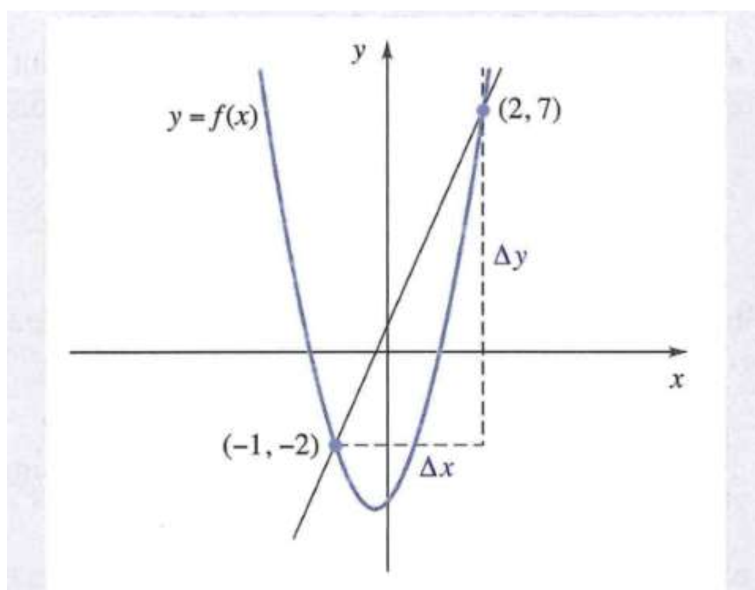
Soit la fonction $f(x) = 2x^2 + x - 3$. Trouver l'accroissement ainsi que le taux de variation moyen de cette fonction lorsque x passe de -1 à 2.

L'accroissement de la fonction est :

$$\Delta y = f(2) - f(-1)$$
$$\Delta y = 7 - (-2)$$
$$\Delta y = 9$$

Le taux de variation moyen est :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{9}{3} = 3$$



B) Définition de la dérivée utilisant la limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

f'(a) : s'appelle la dérivée de la fonction f au point d'abscisse x = a ou encore le nombre de dérivé en ce point.

Exemple 1 :

Trouve f'(2) si f(x) = x^2 – x + 7

Solution :
f'(s), le nombre dérivé au point d'abscisse x = 2 est défini par :

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(2+\Delta x)^2 - (2+\Delta x) + 7\right] - 9}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 2 - \Delta x + 7 - 9}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (3 + \Delta x) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Exemple 2 :

Trouve g'(3) si g(x) = $\sqrt{x^2+3}$

Solution :

$$g'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(3+\Delta x) - g(3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(3+\Delta x)^2 + 3} - \sqrt{3^2+3}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{9 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 + 3} - \sqrt{12}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} - \sqrt{12}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} - \sqrt{12}\right)\left(\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} + \sqrt{12}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} + \sqrt{12}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2 - 12}{\Delta x\left(\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} + \sqrt{12}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x\left(\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} + \sqrt{12}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 + \Delta x}{\sqrt{12 + 6\Delta x + (\Delta x)^2} + \sqrt{12}}$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{12}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{12}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 3 :

Trouve la pente de la tangente à la courbe représentative de $f(x) = x^3 – 2x^2 + 2$ au point $(a, f(a))$.

Solution :
Ce point peut être noté $(a, a^3 – 2a^2 + 2)$. Alors :

$$\left(a+\Delta x, (a+\Delta x)^3 - 2(a+\Delta x)^2 + 2\right.$$

$$\begin{aligned}\Delta y &= \left[(a+\Delta x)^3 - 2(a+\Delta x)^2 + 2\right] - (a^3 - 2a^2 + 2)\\ &= a^3 + 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 2a^2 - 4a\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 2 - a^3 + 2a^2 - 2\\ &= 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - 4a\Delta x - 2(\Delta x)^2\end{aligned}$$

$$\text{pente de la sécante } = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2 - 4a - 2\Delta x$$

$$\text{pente de la sécante } = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2 - 4a - 2\Delta x$$

$$\text{Quand } \Delta x \to 0 \text{ alors, } \frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3a^2 - 4a$$

$$\text{Donc, la pente de la tangente } = 3a^2 - 4a$$

C) Règle pour calculs de dérivées

1. Dérivée d'une puissance
   Si $f(x) = ax^n$, alors $f'(x) = a(n)x^{n-1}$

Exemple : $f(x) = 5x^3$ $\quad f'(x) = 15x^2$
Exemple : $f(x) = 3x$ $\quad f'(x) = 3$

2. Dérivée d'une constante
   Si $f(x) = k$, alors $f'(x) = 0$

Exemple : $\quad f(x) = 7$ $\quad f'(x) = 0$

3. Dérivée d'une somme
   Si $f(x) = U(x) + V(x)$, alors $f'(x) = U'(x) + V'(x)$

Exemple : $f(x) = 4x^3 - 3x^5$ $\quad f'(x) = 12x^2 - 15x^4$

4. Dérivée d'un produit
   Si $f(x) = U(x)V(x)$, alors $f'(x) = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$

Exemple :
$y = (4x - 11)(x^2 + x + 7)$, alors $y' = (4)(x^2 + x + 7) + (4x - 11)(2x + 1)$

5. Dérivée d'un quotient
   Si $f(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$, alors $f'(x) = \frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{(V(x))^2}$

Exemple : $y = \frac{7x+1}{2x-3}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{7(2x-3)-(7x+1)(2)}{(2x-3)^2}$

6. Dérivation en chaîne
   Pour les fonctions ayant un exposant :
   Si $f(x) = U(x)^n$, alors $f'(x) = nU(x)^{n-1}U'(x)$

Exemple : $f(x) = (5x^4 + 2)^3$, alors $f'(x) = 3(5x^4 + 2)^2(20x^3)$

Trouver $f'(x)$ si $f(x) = 3x + 6$

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = x^9$

Trouver y' si $y = x^5 - x^3 + 4x - 9$

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $y = (x^2 + 8)(x + 5)$

Trouver $f'(x)$ si $f(x) = \frac{5}{x^2}$ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

Trouver y' si $y = x + \frac{1}{x^2}$

Trouver y' si $y = \frac{x^3+2}{x^2-1}$

Trouver y' si $y = (2x^2+3)^2(4x-9)$

Trouver y' si $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x}}$

Trouver y' si $y = \frac{1}{x^2-x-1}$

Leçon 2 : Plus de Dérivée

A) Les Dérivées de fonctions trigonométriques

1)

$$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \times \frac{du}{dx}$$

Exemple : Trouve y' si y = $\sin(3x^2 + 1)$

$y' = \cos(3x^2 + 1)(6x)$

$y' = 6x\cos(3x^2 + 1)$

2)

$$\frac{d(\cos u)}{dx} = -\sin u \times \frac{du}{dx}$$

Exemple : Trouve $\frac{dy}{dx}$, si $y = 8\cos(6x^2)$

$\frac{dy}{dx} = -8\sin(6x^2)(12x)$

$\frac{dy}{dx} = -96\sin(6x^2)$

3)

$$\frac{d(\tan u)}{dx} = \sec^2 u \times \frac{du}{dx}$$

Exemple : Calcule $\frac{d\tan(3x^3)}{dx}$

$$\frac{d\tan(3x^3)}{dx} = \left[\sec^2(3x^3)\right] \times (9x^2) = 9x^2\sec^2(3x^3)$$

Exemple : Calcule $\frac{d\tan^3(3x)}{dx}$

$$\frac{d\tan^3(3x)}{dx} = 3\tan^2(3x) \times \sec^2(3x) \times 3$$
$$= 9\tan^2(3x) \times \sec^2(3x)$$

4)

$$\frac{d(\cot u)}{dx} = -\mathrm{cosec}^2 u \times \frac{du}{dx}$$

Exemple : Trouve f'(x), si $f(x) = 4\cot(3x^3)$

$f'(x) = -4\mathrm{cosec}^2(3x^3)(9x^2)$

$f'(x) = -36x^2\mathrm{cosec}^2(3x^3)$

5)

$$\frac{d(\sec u)}{dx} = \sec u \times \tan u \times \frac{du}{dx}$$

Exemple : Trouve y' si y = sec(3x⁴ – x + 2)

y' = $[sec(3x^4 - x + 2)][tan(3x^4 - x + 2)]$($12x^3 - 1$)

y' = ($12x^3 - 1$) $sec(3x^4 - x + 2)\ tan(3x^4 - x + 2)$

6)

$$\frac{d(\text{cosec } u)}{dx} = -\text{cosec } u \times \cot u \times \frac{du}{dx}$$

Exemple trouve y', si y = cosec$\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right)$

$\frac{1+x}{1-x^2} = \frac{x+1}{-(x^2-1)} = \frac{x+1}{-(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x-1}$

y = $cosec\left(\frac{-1}{x-1}\right)$

y' = $cosec\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right) cot\left(\frac{1+x}{1-x^2}\right) \frac{-1}{(1-x)^2}$

Exemple 7 :

Trouver dy/dx si $y = \frac{\cos 2x}{\sin^2(x+1)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin(2x) \times \sin^2(x+1) - 2\sin(x+1)\cos(x+1) \times \cos(2x)}{\sin^4(x+1)}$$

$$= \frac{-2\sin(2x) \times \sin(x+1) - 2\cos(2x) \times \cos(x+1)}{\sin^3(x+1)}$$

$$= \frac{-2\cos[2x-(x+1)]}{\sin^3(x+1)}$$

$$= \frac{-2\cos(x-1)}{\sin^3(x+1)}$$

B) Dérivée de logarithmes

a) $\frac{d}{dx} lnu = \frac{1}{u} x \frac{du}{dx}$

b) $\frac{d}{dx} e^u = e^u x \frac{du}{dx}$

c) $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}(\log_a e) \frac{du}{dx}$

d) $\frac{d(a^u)}{dx} = a^u (lna) \frac{du}{dx}$

Exemple :

1)

Trouver y' si $y = \log_7(x^3 + x^2 - 1)$

$$y' = \frac{1}{x^3 + x^2 - 1} \times \log_7 e \times (3x^2 + 2x) = \frac{3x^2 + 2x}{x^3 + x^2 - 1} \times \log_7 e$$

2)

Trouver y' si $y = \ln(\sin x + 1)$

$$y' = \frac{1}{\sin x + 1} \times \cos x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

3)

Trouver y' si $y = 3^{x^2 - 1}$

$$y' = 3^{x^2 - 1} \times \ln 3 \times (2x) = 2 \ln 3 \times x \times 3^{x^2 - 1}$$

4)

Trouver y' si $y = e^x \ln x$

$$y' = e^x \times \frac{1}{x} + e^x \times \ln x = e^x \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$$

5)

Trouver $\dfrac{dy}{dx}$ si $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}\,\sin 2x}{x^3 e^x}$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x^2+4} + \ln \sin 2x - \ln x^3 - \ln e^x$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x^2+4) + \ln \sin 2x - 3\ln x - x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{3(x^2+4)} + \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{3}{x} - 1$$

$$y' = y\left[\frac{2x}{3x^2+12} + 2\cot 2x - \frac{3}{x} - 1\right]$$

6)

Trouver dy/dx si $y = (x+1)^x$

Soit $y = (x+1)^x$

Alors, $\ln y = x\ln(x+1)$

D'où

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{x+1} + 1 \times \ln(x+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)^x\left[\frac{x}{x+1} + \ln(x+1)\right]$$

C)La Dérivation des fonctions implicites

Une fonction implicite : Ou y ne peuvent s'exprimer en termes de l'autre variable.

Fonction explicite y = f(x)
Ex: $y = 3x^2 + x - 4$
$y' = 6x + 1$

Fonction implicite f(x, y) = 0
Ex : $x^2y - 4y + 8x - 4 = 0$

Cas 1 : Convertir l'équation implicite a y être explicite.
On peut factoriser l'équation pour isoler y.
$y(x^2 - 4) = 4 - 8x$
$$y = \frac{4-8x}{x^2-4}$$

Cas 2 : Il n'est pas toujours possible de passer de la forme implicite à la forme explicite.
Ex : $x^2y^3 - 4xy = 2x^3y^5 - 4x^2 + 7$ Cette équation définit-elle une fonction ? (y = f(x))
N'oubliez pas qu'il faut qu'à une valeur de x corresponde au plus une valeur de y pour être une fonction.

Soit x = a
$a^2y^3 - 4ay = 2a^3y^5 - 4a^2 + 7$

C'est un polynôme de degré 5, alors il a 5 racines (certaines peuvent être réelles). On sait aussi que les racines complexes existent toujours par paires ; donc, on a au moins une racine réelle ici. On pourrait en avoir une, trois ou cinq.

Trouver la dérivée d'une fonction implicite qui est dérivable

La dérivée de x par rapport à x est $\frac{dx}{dx} = 1$

La dérivée de y par rapport à y est $\frac{dy}{dy} = 1$

La dérivée de y par rapport à x est $\frac{dy}{dx}$

La dérivée de x^2 par rapport à x est $\frac{d(x^2)}{dx} = 2x$

La dérivée de y^2 par rapport à y est

$$\frac{d(y^2)}{dy} = 2y$$

La dérivée de y^2 par rapport à x est

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(y^2)}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

La dérivée de x^2y^2 par rapport à x est

$$\frac{d(x^2y^2)}{dx} = (2x)(y^2) + (x^2)\left(2y\frac{dy}{dx}\right)$$

Exemple 1 :

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $x^2y^2 + x + y = 3$

Solution :

$$\frac{d(x^2y^2)}{dx} + \frac{d(x)}{dx} + \frac{d(y)}{dx} = \frac{d(3)}{dx}$$

Décrivons implicitement en considérant que chaque terme est une fonction de x :

$$2xy^2 + x^2 2y\frac{dy}{dx} + 1 + \frac{dy}{dx} = 0$$

L'objectif étant de trouver $\frac{dy}{dx}$, il reste à isoler ce terme par des manipulations algébriques.

$$(2x^2y+1)\frac{dy}{dx} = -1-2xy^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1-2xy^2}{1+2x^2y}$$

Exemple 2 :

Trouver $\frac{dy}{dx}$ si $x^2y^3 - 4xy = 2x^3y^5 - 4x^2 + 7$

Solution :

Dérivons chaque terme en se souvenant bien que y est une fonction de x; par exemple, le terme x^2y^3 doit être considéré comme un produit de fonctions :

la fonction x^2	et	la fonction $y^3 = [f(x)]^3$
$(x^2)' = 2x$		$(y^3)' = 3y^2 \times dy/dx$

Alors :

$$2x \times y^3 + x^2 \times 3y^2 \times dy/dx - 4x\,dy/dx - 4y = 2x^3 \times 5y^4\,dy/dx + 6x^2y^5 - 8x + 0$$

Le reste consiste à faire des manipulations algébriques :

$$3x^2y^2 \times dy/dx - 4x\,dy/dx - 10x^3y^4\,dy/dx = -2xy^3 + 4y + 6x^2y^5 - 8x$$

Ensuite :

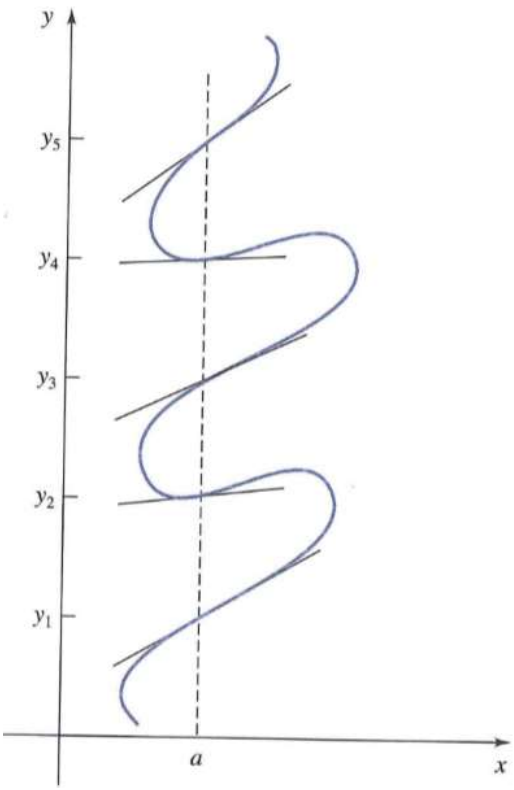
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy^3 + 4y + 6x^2y^5 - 8x}{3x^2y^2 - 4x - 10x^3y^4}$$

Dérivée formelle

La dérivation implicite s'appelle une dérivée formelle.

En effet, si pour une valeur de x on peut avoir cinq valeurs de y, cela signifie que la courbe représentative de l'équation peut passer cinq fois au-dessus de cette abscisse x; par exemple, la dérivée formelle dy/dx donnera la pente de la tangente en chacun des points :

$$(a, y_1) \qquad (a, y_2) \qquad (a, y_3) \qquad (a, y_4) \qquad (a, y_5)$$



Selon la valeur de y placée dans l'équation, si ces dérivées existent.

Exemple 3 : Trouver dy/dx au point (2, 1) de la courbe :
$x^2 + 2xy^2 = 5x - 2$

Solution :

Dérivation implicite :

$$2xy + x^2\, dy/dx + 2y^2 + 4xy\, dy/dx = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 2xy - 2y^2}{x^2 + 4xy}$$

Si on évalue au point (2, 1) :

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(2,1)} = \frac{5-4-2}{4+8} = \frac{-1}{12}$$

Exemple 4 : Soit l'équation $x^2 + y^2 = 9$. Trouver dy/dx

Solution :

Cette équation définit-elle une fonction ? De fait, elle en définit même une infinité.

$$y^2 = 9 - x^2 \qquad y = \pm\sqrt{9 - x^2}$$

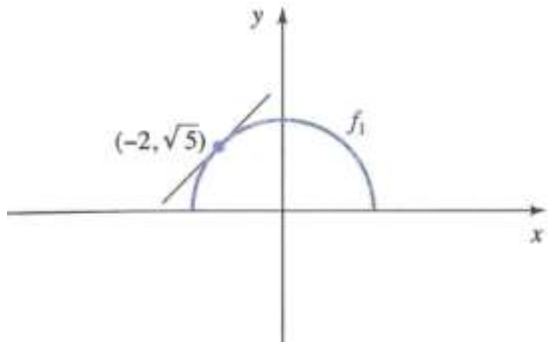
Pour chaque valeur de x, il y a deux choix possibles pour y; on peut donc ainsi construire une infinité de fonctions. Parmi celles-ci, on a :

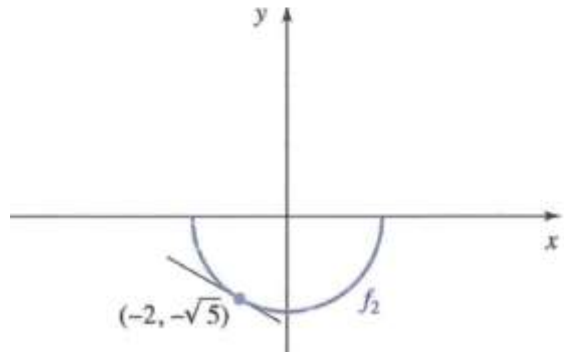
$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \qquad \text{et} \qquad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

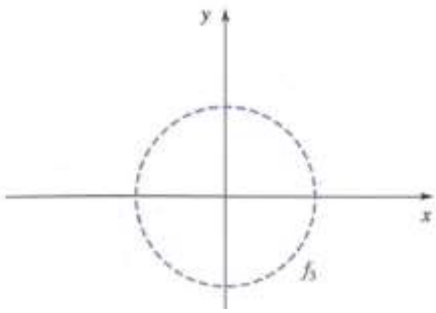
qui sont des fonctions dérivables sur $]-3, 3[$. Par contre,

$$f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{9 - x^2} & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ -\sqrt{9 - x^2} & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

est une fonction qui n'est pas dérivable.







Exemple 5 : Trouver y' si $x^3 + 5x^2 + xy^2 - 5y^2 = 0$

Solution :

$$3x^2 + 10x + 2xyy' + y^2 - 10yy' = 0$$

$$3x^2 + 10x + y^2 = 10yy' - 2xyy'$$

$$y' = \frac{3x^2 + 10x + y^2}{10y - 2xy}$$

Exemple 6 : Trouver la pente de la tangente au point (1, 1) de la courbe. $x^2 + xy + y^5 = 3$

Solution :

$$2x + xy' + y + 5y^4 y' = 0$$

$$y' = \frac{-2x - y}{x + 5y^4}$$

$$[y']_{(1,1)} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

Preuve :

La technique de dérivation implicite nous fournit une autre preuve de la validité de la formule de dérivation de x^n (ou de u^n) pour $n \in \mathbb{Q}$. En effet, soit :

$$y = x^n = x^{p/q} \qquad \text{où} \qquad p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$$

$$y^q = x^p$$

$$qy^{q-1} \times \frac{dy}{dx} = px^{p-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{q} \times \frac{x^{p-1}}{y^{q-1}} = \frac{p}{q} \times \frac{x^{p-1}}{(x^{p/q})^{q-1}} = \frac{p}{q} \times \frac{x^{p-1}}{x^{p-(p/q)}} = \frac{p}{q} \times x^{p/q-1} = n \times x^{n-1}$$

d'où la preuve.

Pratiques :

1. Trouver dy/dy.

a) x = $y^3 + 6y$

$\frac{1}{6y^2+6} = \frac{dy}{dx}$

b) $x = \frac{y^2+2y+6}{y^3-y^2}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{(2y+2)(y^3-y^2)-(3y^2-2y)(y^2+2y+6)}{(y^3-y^2)^2}$$

$$= \frac{-y^4-4y^3-16y^2+12y}{(y^3-y^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y^3-y^2)^2}{-y^4-4y^3-16y^2+12y}$$

c) $xy^3 + 3y^2 - 6x = 0$

$$\frac{-xy}{x^2+1}$$

d) $xy + 3 = \frac{x+2y^2}{xy-4x}$

$$xy+3 = \frac{x+2y^2}{xy-4x}$$

$$x^2y^2 + 3xy - 4x^2y - 12x = x + 2y^2$$

$$2xy^2 + 2x^2yy' + 3y + 3xy' - 8xy - 4x^2y' - 12 = 1 + 4yy'$$

$$y' = \frac{13-2xy^2-3y+8xy}{2x^2y+3x-4x^2-4y}$$

2. Trouver la pente de la tangente au point (1, 2) de la courbe $x^2y^2 - y + x^3 = 3$. **(-11/3)**

3. Trouver la pente de la tangente au point $(2, 2\sqrt{3})$ du cercle $x^2 + y^2 = 16$

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-1\sqrt{3}}{3}$$

Revue :

4. Trouver :
   a) f'(2) si $f(x) = (2x + 6)^3(x^2 - 1)^2$ (**29 400)**
   b) f'(0) si $f(x) = \sqrt{x}$ n'existe pas

5. Trouver dy/dx au point ou x = 2 si :

$y = 4t^3 - 3t^2$ et $t = x^3 + 1$ **(11016)**

Leçon 3 : Les équations d'une tangente et de la normale

A) La Pente et la Dérivée

Les dérivées :

N'oubliez pas que la dérivées d'une fonction représente la pente.

Trouver la pente de la tangente à la courbe représentative de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ au point $(a, f(a))$.

Solution :
(a, f(a)) est noté par (a, $a^3 - 2a^2 + 2$)
On doit trouver un autre point (un point voisin) alors :

$$(a + \Delta x, f(a + \Delta \boldsymbol{x}))$$
$$(a + \Delta x, (a + \Delta x)^3 - 2(a + \Delta x)^2 + 2)$$

Pente de la sécante = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \boldsymbol{3a^2 - 4a}$ **(quand $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$)**
Donc la pente de la tangente = $\boldsymbol{3a^2 - 4a}$

Pratique :

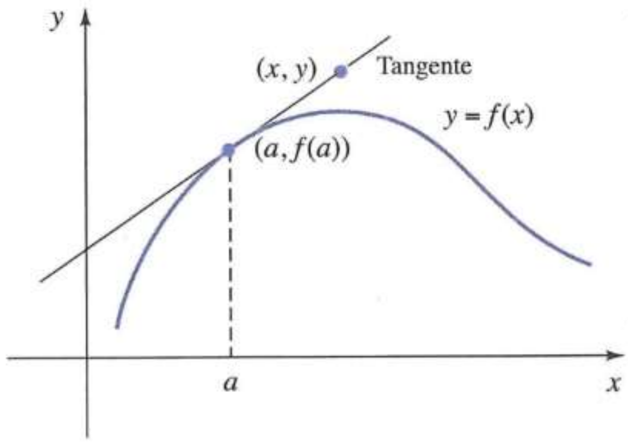
1) Trouver la pente de la tangente au point indiqué de chacune des courbes suivantes :
a) y = $3x^4 - x^2 + 6x - 7$ au point (1, 1) **réponses : 16**

b) xy = 8 au point (4, 2) **réponses : -1/2**

c) $y = \frac{8}{x^2+4}$ au point (-2,1) **réponses :1/2**

B)L'équation de la drotie Tangente

Trouve l'équation de la droite tangente au point (a, f(a)) de la courbe d'une fonction y = f(x).



N'oubliez pas la dérivée f'(a) représente la pente de la tangente.

Pour trouver l'équation de la tangente, il faut préciser le lien entre les coordonnées x et y de ce point quelconque.
f'(a) est la pente de cette tangente.
Et on peut calculer la pente en se servant des deux

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

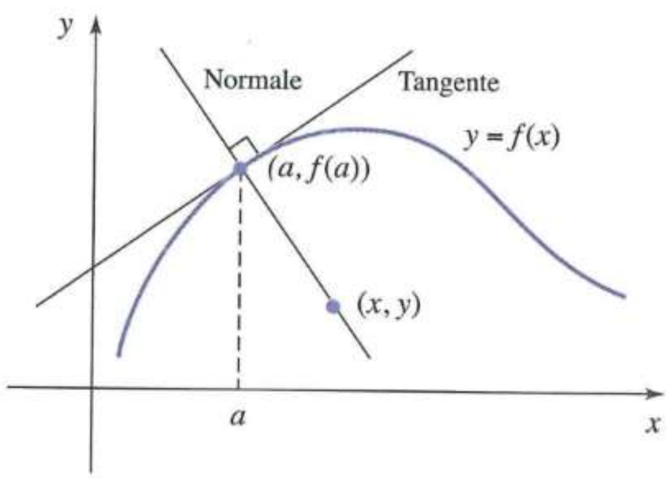
C)L'équation de la droite Normale

Une droite normale à une courbe en un point la perpendiculaire à la tangente en ce point.
La produit de deux pentes perpendiculaires est -1 donc les deux pentes sont inverses/opposées.

- Si f'(a) est la pente de la tangente,

Alors

- $\frac{-1}{f'(a)}$ est la pente de la normale

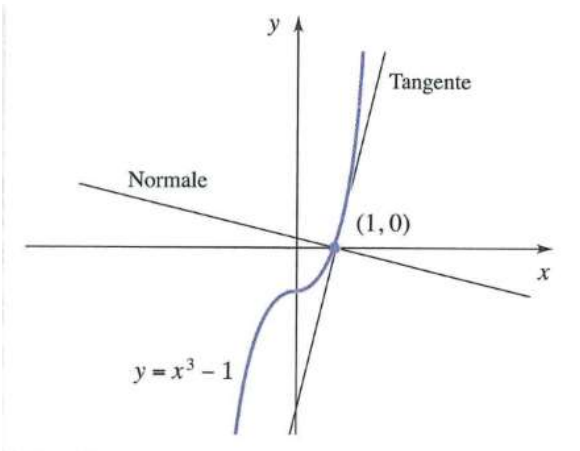


L'équation de la droite normale :

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = -\frac{1}{f'(a)}$$

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

Exemple 1 :
Trouve l'équation de la tangente et de la normale au point (1, 0) de la courbe :
$y = x^3 - 1$
Solution

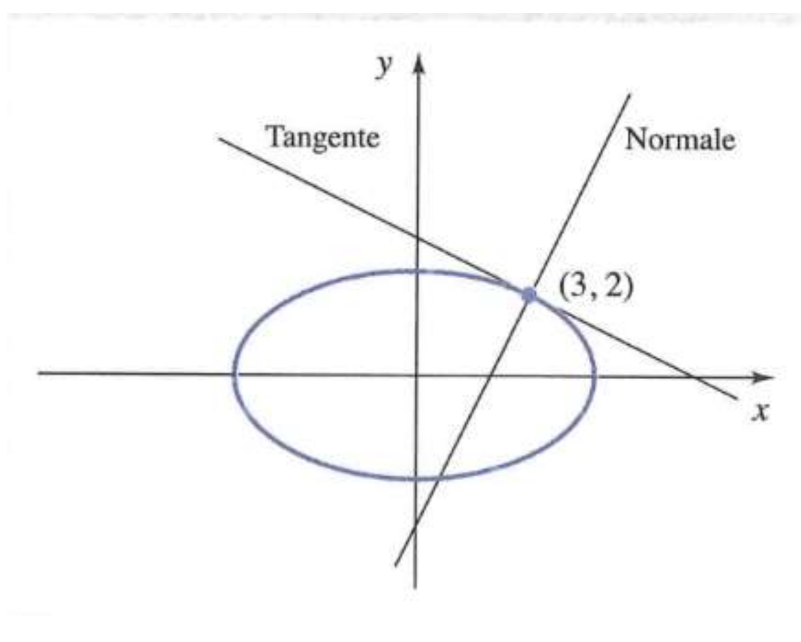


$y' = 3x^2$
$y'(1) = 3(1)^2 = 3$
$y(1) = 1^3 - 1 = 0$

L'équation de la tangente
$\frac{y-0}{x-1} = 3$
$y - 0 = 3(x - 1)$
$y = 3x - 3$

L'équation de la droite normale
Pente = 3 alors pente inverse/opposée = -1/3
$\frac{y-0}{x-1} = \frac{-1}{3}$
$3y = -1(x - 1)$
$3y = -x + 1$
$y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3}$

Exemple 2 :
Trouve l'équation de la normale au point (3, 2) de l'ellipse suivant :
$x^2 + 4y^2 = 25 =$ doit faire une dérivation implicite
Solution :
$2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$
$8y\frac{dy}{dx} = -2x$
$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{8y} = \frac{-x}{4y}$
Au point (3, 2)
$\frac{-3}{4(2)} = \frac{-3}{8}$

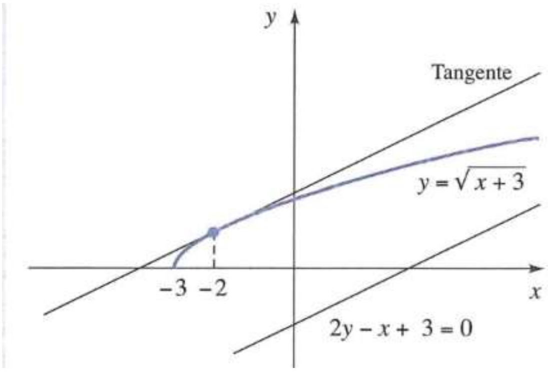


Alors la pente qui est perpendiculaire est 8/3
$\frac{y-2}{x-3} = \frac{8}{3}$
$3(y - 2) = 8(x - 3)$
$3y - 6 = 8x - 24$
$3y - 8x + 18 = 0$

Exemple 3 :

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x+3}$. Trouver l'équation de la tangente à cette courbe parallèle à la droite $2y - x + 3 = 0$.

Solution :



L'équation de la droite parallèle peut s'écrire :

$$2y = x - 3 \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$$

La pente est donc $1/2$. Nous ne connaissons pas le point de tangence. Supposons a, la valeur de son abscisse; c'est donc le point $(a, \sqrt{a+3})$. La pente de la tangente à la courbe en ce point est

Dérivés de $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$f(x) = (x+3)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{\frac{-1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

$$f'(a) = \left[f'(x)\right]_{x=a} = \left[\frac{1}{2\sqrt{x+3}}\right]_{x=a} = \frac{1}{2\sqrt{a+3}}$$

Cette pente doit être égale à 1/2.

$$\frac{1}{2\sqrt{a+3}} = \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{a+3} = 1$$
$$a + 3 = 1$$
$$a = -2$$

Le point de tangence est $(-2, 1)$. L'équation de la tangente est donc :

$$\frac{y-1}{x+2} = \frac{1}{2}$$
$$2y - 2 = x + 2$$
$$2y - x - 4 = 0$$

Pratique :

1. Trouver l'équation de la tangente à la courbe au point donnée

a) $y = x^2 + x + 1$ au point (0, 1) **réponse : y = x + 1** b) $y = \frac{x-3}{x-3}$ au point (3, 0)
réponse y – x + 3 = 0

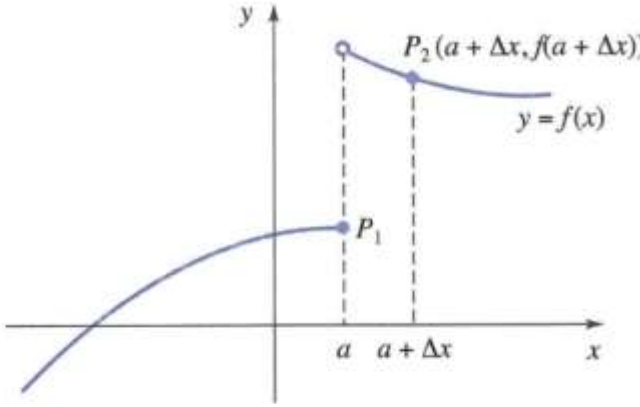
2. Trouve l'équation de la normale à la courbe au point donné

a) $y = x^3 - x + 1$ au point (1, 1) **réponse 2y + x – 3 = 0** b) $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ au point (-1, 3)
réponse 7y + x – 20 = 0

Unité : La Continuité

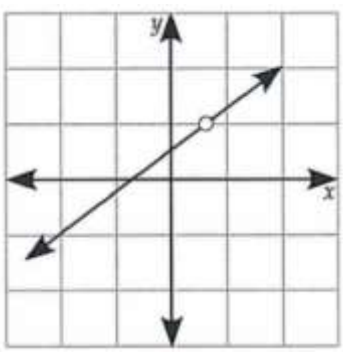
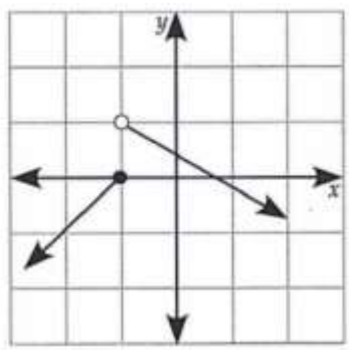
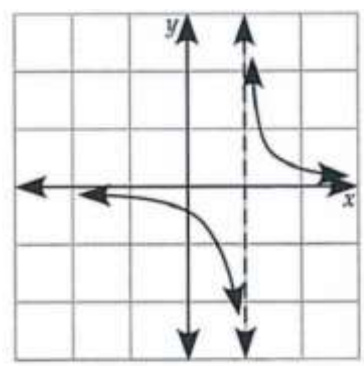
Leçon 1 : Les Fonctions Continues et Discontinues

A) Exemples de continuité et de discontinuité



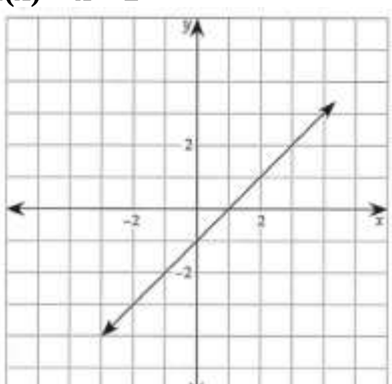
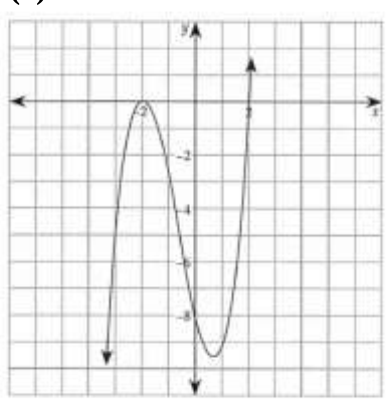
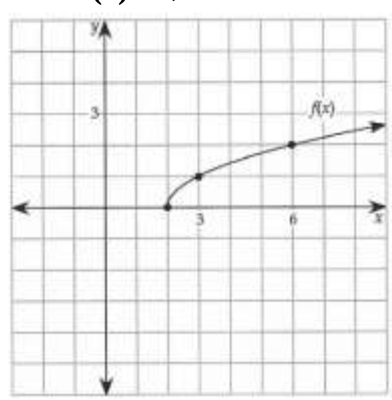
Une fonction continue est une fonction dont le graphique peut se tracer trait de crayon, c'est-à-dire en une seule partie. Alors aucun point de discontinuité (trou) ou asymptote.

Exemple de graphique qui sont discontinus :

Exemple de graphique qui sont continus :

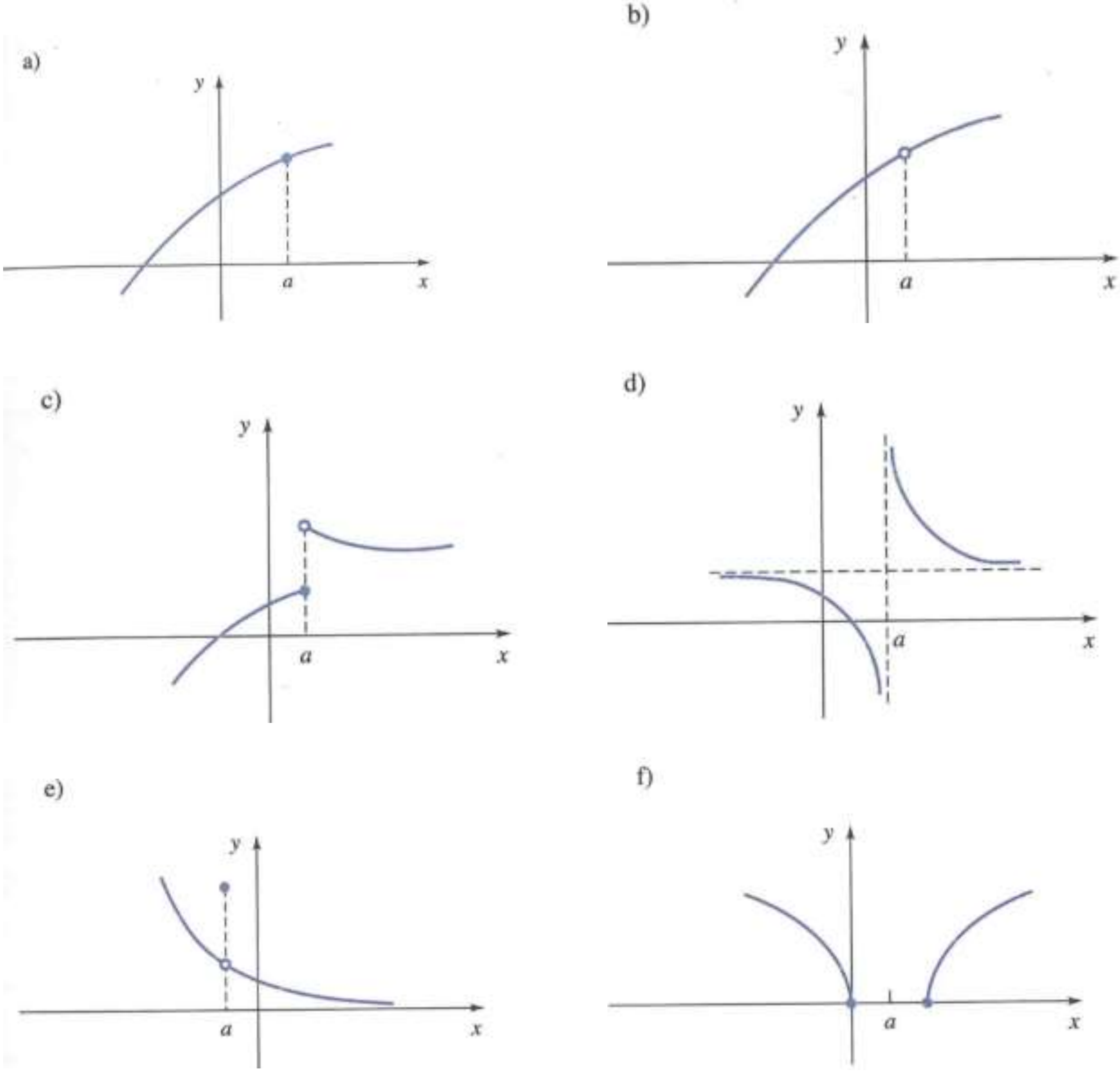
f(x) = x – 2 **f(x) = x³ + 2x² – 4x – 8** **f(x) = $\sqrt{x-2}$**

Les Fonctions Polynomiales sont des graphiques continus.

f(x) = $\sqrt{x-2}$ est une fonction continue parce qu'il n'a pas de trou ou asmptote.

Exemple 1 :
Identifie si les graphiques suivants sont continues ou discontinues.



B) Situations de discontinuité

On reconnaît qu'une fonction y = f(x) est discontinue au point d'abscisse x = a, si l'une ou l'autre (ou plusieurs) des situations suivantes est constatée :

1. La fonction n'est pas définie autour (c'est-à-dire deux côtés) de x = a.
2. f(a) n'existe pas.
3. $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.
4. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

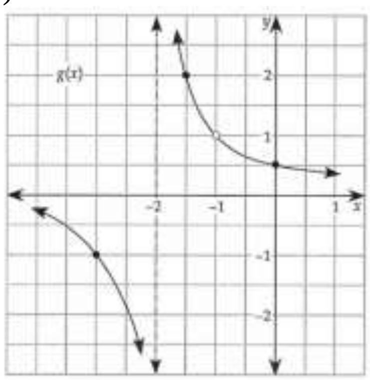
C) La Continuité en un point

On peut reconnaître la discontinuité d'une fonction en un point d'abscisse x = a. Si aucune des situations de discontinuité ne se rencontre en un point donné, laf onction sera continue en ce point.

Une fonction f est dite *continue* au point d'abscisse x = a si et seulement si :

1. f est définie dans le voisange (des deux côtés) de a.
2. f est définie en x = a, c'est-à-dire f(a) existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x)\ \ existe.$
4. $\lim_{x \to a} f(x)$ = f(a)

Exemple 2 :
Détermine si le graphique est continue
a)

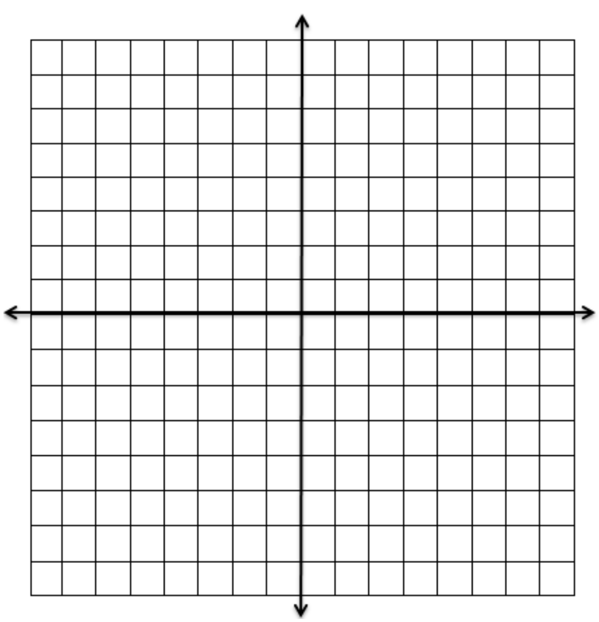


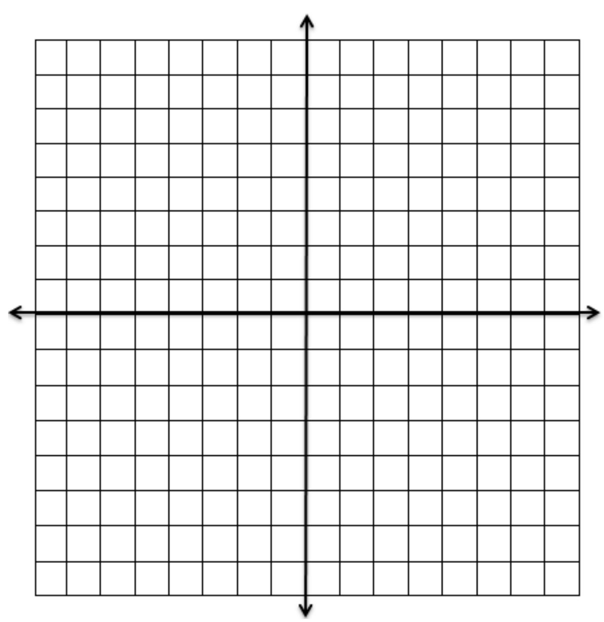
$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$$

Exemple 3 :
a) Trace les graphiques et détermine si les relations forment une fonction continue.

1) $f(x) = \begin{Bmatrix} 1-x & si\ x \leq 1 \\ x^2 & si\ x\ > 1 \end{Bmatrix}$

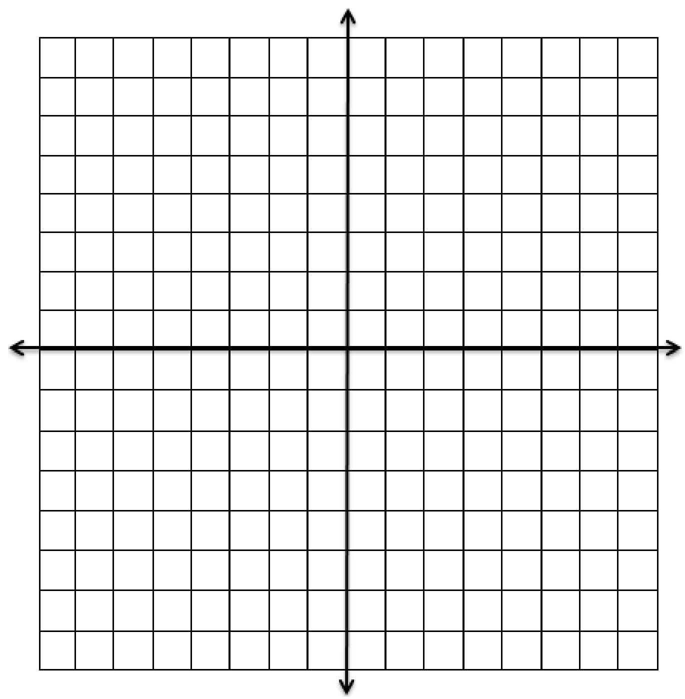
1) $f(x) = \begin{Bmatrix} -x+6; x<2 \\ x^2-7; x \geq 2 \end{Bmatrix}$





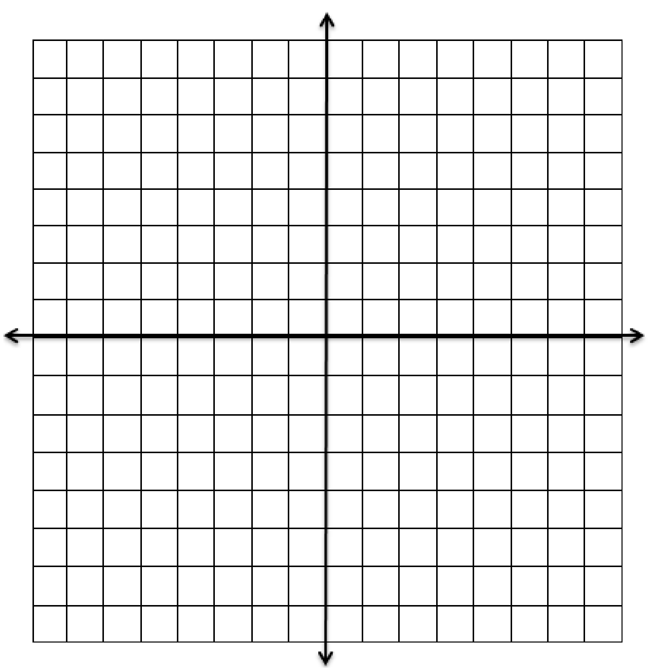
b) Évalue f(0), f(1) et f(2) pour les deux graphiques.

Exemple 4 :
Discuter la continuité de la fonction définie par
f(x) = $\frac{x^2-3x}{2x-6}$.



Exemple 5 : Dire si la fonction suivante est continue au point d'abscisse x = 4 :

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + 4 & si\ x < 4 \\ x^2 - 4x + 2 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$



D)La Classification des discontinuités

Discontinuité

Nous allons classer les discontinuités selon la cause. Ainsi, on distingue :

A. DISCONTINUITÉ ESSENTIELLE

On qualifie une discontinuité d'*essentielle* lorsque $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas, c'est-à-dire n'est pas un nombre réel.

On y retrouve la discontinuité essentielle

On y retrouve la discontinuité essentielle

a) *par saut fini*, où $\lim_{x \to a^+} f(x)$ existe et $\lim_{x \to a^-} f(x)$ existe

mais $\lim_{x \to a^+} f(x) \neq \lim_{x \to a^-} f(x)$

b) *infinie*, où $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ et/ou $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

c) *par manque*, où $f(a^+)$ n'existe pas et/ou $f(a^-)$ n'existe pas, c'est-à-dire où f n'est pas définie à droite et/ou à gauche de $x = a$.

B. DISCONTINUITÉ NON ESSENTIELLE

On dit qu'une discontinuité est *non essentielle* lorsque $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, c'est-à-dire est un nombre réel.

On a la discontinuité non essentielle

a) *par trou*, où $f(a)$ n'existe pas et $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

b) *par déplacement*, où $f(a)$ existe et $\lim_{x \to a} f(x)$ existe

mais $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$

Les trois premières catégories sont dites des discontinuités essentielles car on ne peut les enlever sans changer un nombre infini de points, tandis que les deux dernières sont dites non essentielles car en modifiant un, ou un nombre fini de points, on peut faire disparaître la discontinuité.

E) La Continuité sur un intervalle

Une fonction f est continue sur un intervalle ouvert]a, b[lorsqu'elle est continue en tout point de l'intervalle.

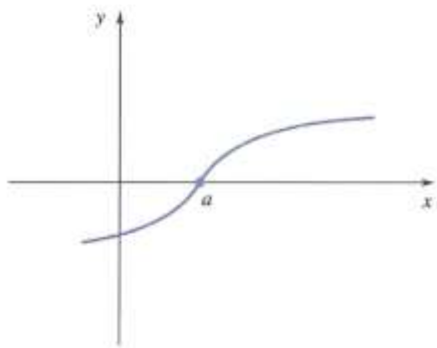
Une fonction f est continue sur un intervalle fermé [a, b] lorsqu'elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert]a, b[outre qu'elle est continue à droite en $x = a$ et continue à gauche en $x = b$.

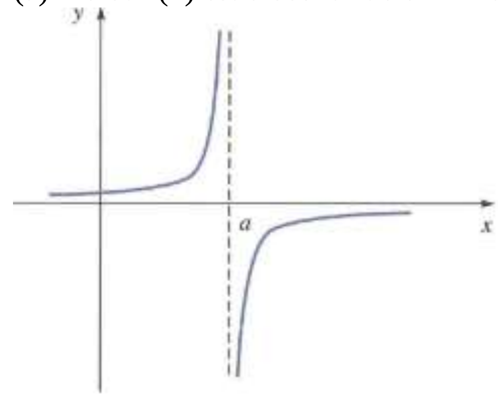
Dans le cas d'un intervalle fermé à une des extrémités seulement, la continuité à gauche ou à droite, selon le cas, est requise à l'extrémité fermée seulement.

Leçon 2 : Changer de signe

A)Introduction

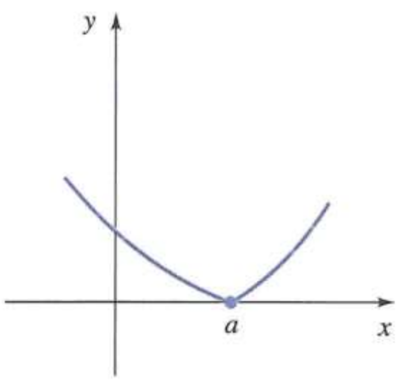
Si une fonction y = f(x) change de signe en x = a, alors f(a) = 0 ou f(x) est discontinue en x = a.

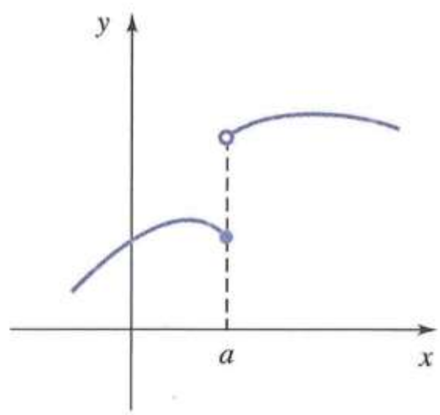




Comme on peut le voir sur ces deux illustrations, lorsque la fonction est continue, changer de signe implique passer à travers l'axe des x, donc prendre une valeur nulle pour la fonction ; autrement, il faut que la fonction soit discontinue. Bien relire l'axiome.

On doit noter que la réciproque de l'axiome n'est pas nécessairement vraie. En effet, si la fonction s'annule ou est discontinue, elle ne change pas nécessairement de signe comme l'illustrent les graphiques suivants :





Alors :

- Les valeurs de x pour lesquelles f(x) = 0 ou f(x) est discontinue sont les valeurs ou la fonction peut changer de signe.

Exemple 1 : Trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction suivante peut changer de signe :
$f(x) = x^3 + 3x^2 – x – 3$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$$
$$= (x^2 - 1)(x + 3)$$
$$= (x - 1)(x + 1)(x + 3)$$

Solution :
Ainsi : f(1) = 0, f(-1) = 0, f(-3) = 0
La fonction peut donc changer de signe pour les valeurs suivantes de x : 1, -1 et -3

Exemple 2 : Trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction suivante peut changer de signe :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-4}$$

Solution :

$f(-1/2) = 0$ et, en $x = 4$, f est discontinue. Donc, la fonction peut changer de signe en $x = -1/2$ et en $x = 4$.

B)Étude du signe d'une fonction

Après avoir déterminer les valeurs de x ou il peut avoir un changement de signe on peut déterminer les intervalles ou une fonction est positive ou négative.

Les valeurs de x divisent la droite des réels en plusieurs régions et nous déterminerons le signe de la fonction dans chacune de ces régions. À l'intérieur d'une même région, le signe de la fonction ne peut pas changer puisque nous avons déjà toutes les valeurs ou le signe peut changer.

Exemple 1 :

Déterminer les signes de f(x) = $(x^2 – 4)(x + 3)^2$

$f(x) = 0$ pour $x = 2$, $x = -2$, $x = -3$; le tableau suivant donne les signes de la fonction :

x	$-\infty$		-3		-2		2		∞
$f(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Solution :

Ceci signifie :

$$\text{sur }]-\infty, -3[\,, f(x) > 0$$
$$f(-3) = 0$$

$$\text{sur }]-3, -2[\,, f(x) > 0$$
$$f(-2) = 0$$

$$\text{sur }]-2, 2[\,, f(x) < 0$$
$$f(2) = 0$$

$$\text{sur }]2, \infty[\,, f(x) > 0$$

Exemple 2 :
Trouver les intervalles ou la dérivée de la fonction suivante est positive :
$y = x^4 - 4x^3 - 56x^2 + 240x + 20$

Solution :

$$y' = 4x^3 - 12x^2 - 112x + 240$$
$$y' = 4(x^3 - 3x^2 - 28x + 60)$$
$$y' = 4(x+5)(x-6)(x-2)$$

y' = 0 pour x = 2, x = 6, x = -5 ; le tableau suivant permet d'étudier les signes de la fonction y' :

x	$-\infty$		-5		2		6		∞
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc, $y' > 0$ pour $-5 < x < 2$ ou $x > 6$

Exemple 3 :
Trouver les intervalles ou la dérivée de la fonction suivante est négative : $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$

Solution :

$$y' = \frac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

La dérivée peut changer de signe pour :

$x = 0$ et $x = -2$ où $y' = 0$
et $x = -1$ où y' est discontinue

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
y'		$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	

Ainsi, y'< 0 pour

$-2 < x < -1$ ou $-1 < x < 0$ $\quad x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[$

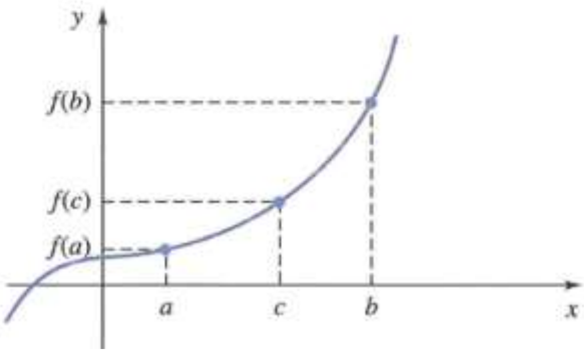
C) Croissance et décroissance d'une fonction

Une fonction croissante ou décroissante veut dire que la fonction (graphique) « monte » ou « descende » quand la variable indépendante x se déplace de la gauche à droite.

La croissance sur un intervalle

Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si :

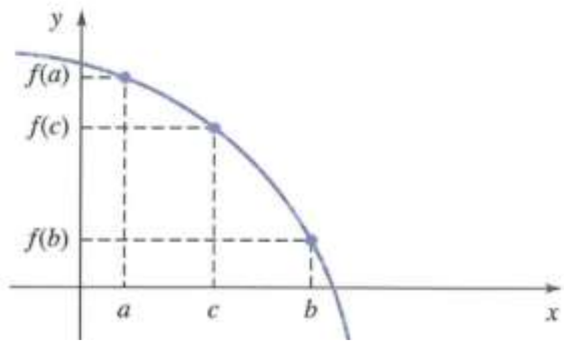
pour tout $a, b \in I,\ a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$



La décroissance sur un intervalle

Une fonction f est dite décroissante sur I si

pour tout $a, b \in I,\ a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.



La croissance en un point

Une fonction f est dite croissante au point d'abscisse x = c s'il existe un intervalle ouvert autour de c tel que si a, b appartiennent à cet intervalle :

$$a < c \Rightarrow f(a) < f(c)$$

$$c < b \Rightarrow f(c) < f(b)$$

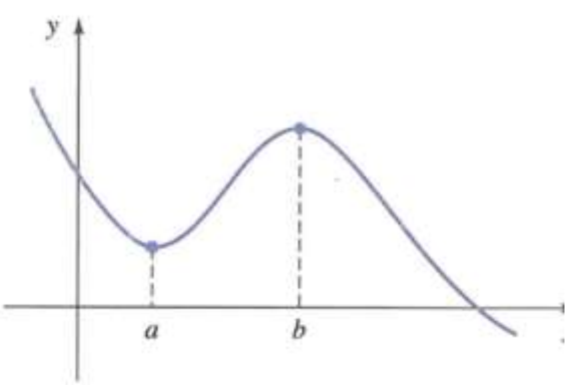
La décroissance en un point

Une fonction f est dite décroissante d'abscisse x = c s'il existe un intervalle ouvert autour de c tel que si a, b appartiennent à cet Intervalle :

$$a < c \Rightarrow f(a) > f(c)$$

$$c < b \Rightarrow f(c) > f(b)$$

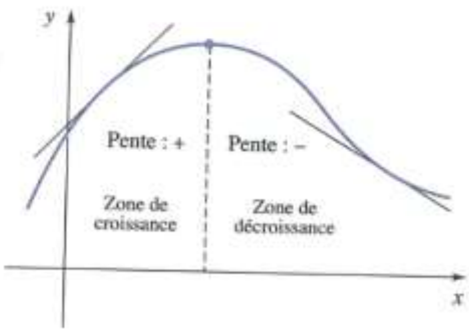
Si I est un intervalle fermé, alors une fonction f peut être croissante sur I sans nécessairement l'être au points extrêmes de l'intervalle. Dans le graphique suivant :



La fonction f est croissante sur [a, b] et pourtant f n'est pas croissante en x = a, ni en x = b.

En résumé, si une fonction est croissante sur un intervalle fermé I, alors elle est croissante en tout point de I sauf peut-être aux points extrêmes de I. Évidemment, la même remarque est applicable à la définition de décroissance.

Liaison entre la notion de croissance et celle de dérivée ?



- Si une fonction est croissant en un point, alors la tangente en ce point aura une pente positive.
- Si la fonction est décroissante, la pente de la tangente sera négative.

Alors :
Associer l'idée de croissance ou de décroissance avec le signe de la dérivée, plus précisément celle de croissance avec le signe positif et celle de décroissance avec le signe négatif.

Théorème 1 :
- Si f est une fonction dérivable (donc continue) en x = c, alors $f'(c) > 0 \rightarrow$ f est croissante en x = c
- De même, si $f'(x) > 0$ sur un intervalle I, alors f est croissante sur I.

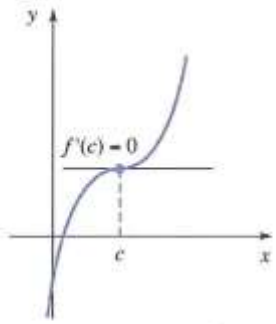
Théorème 2 :
- Si f est une fonction dérivable (donc continue) en x = c, alors $f'(c) < 0 \rightarrow$ f est décroissante en x = c
- De même si $f'(x) < 0$ sur un intervalle I, alors f est décroissante sur I.

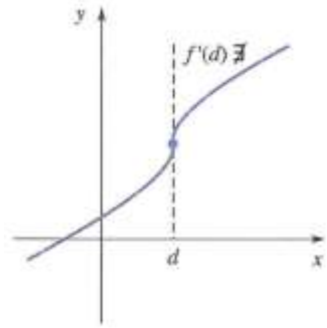
Théorème 3 :
- Si f est une fonction dérivable (donc continue) en x = c, alors f croissante en x = c $\rightarrow f'(c) \geq 0$
- De même, si f est croissante et dérivable sur un intervalle I, alors $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \in I$.

Théorème 4 :
- Si f est une fonction dérivable (donc continue) en x = c, alors f décroissante en x = c $\rightarrow f'(c) \leq 0$
- De même, si f est décroissante et dérivable sur un intervalle I, alors $f'(x) \leq 0$, pour tout $x \in I$.

Ainsi, pour un fonction f continue sur $\lfloor a,b \rfloor$ et telle que $f'(x) > 0$ sur $\rfloor a,b \lfloor$, on dira alors que f est croissante sur $\lfloor a,b \rfloor$.

Il faut bien noter que les théorèmes 1 et 3 (de même pour 2 et 4) ne sont pas réciproques l'un de l'autre. En effet, car une fonction peut être croissante même si sa dérivée n'est pas strictement positive; cela peut se produire dans certains cas où la dérivée s'annule ou encore n'existe pas. Donnons en guise d'exemples les fonctions suivantes illustrées graphiquement, où $f'(c) = 0$ et $f'(d)$ n'existe pas alors que ces fonctions sont croissantes en ces points.





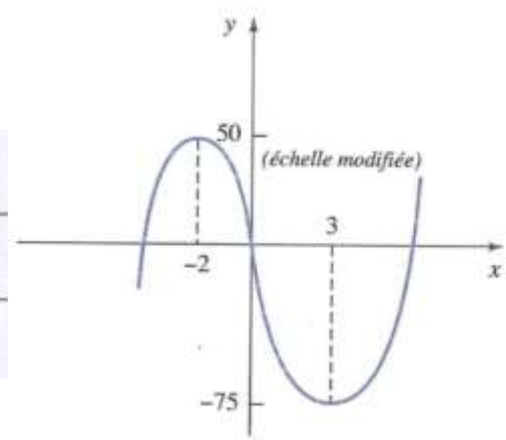
Exemple 1 :
Trouver les intervlles ou la fonction suivante est croissante :
$f(x) = 2x^3 = 3x^2 - 36x + 6$ « a » est positive alors le graphique va vers le haut dans QI et vers le bas QIII

Solution :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$
$$= 6(x^2 - x - 6)$$
$$= 6(x-3)(x+2)$$

f'(x) = 0 alors x = 3 ou x = -2. Ce sont les deux seules valeurs ou f'(x) peut changer de signe.
Selon les théorèmes de 1 et 2, $f'(x) > 0 \rightarrow f$ croissante et $f'(x) < 0 \rightarrow f$ décroissante.

x	$-\infty$		-2		3		∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	



La fonction est croissante pour $x < -2$ et $x > 3$, soit :
sur $]-\infty, -2]$ et sur $[3, \infty[$

Exemple 2 :
Trouver les intervalles sur lesquelles la fonction suivante est décroissante :

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solution :

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$; $f'(x)$ est discontinue pour $x = -1$ et $x = 1$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		∞
$f'(x)$		+	0	−	$\nexists$	−	0	−	$\nexists$	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↘		↘		↘		↗	

f(x) est décroissante sur :

$\left[-\sqrt{3}, -1\right[$

$\left]-1, 1\right[$

$\left]1, \sqrt{3}\right]$

Notons qu'en x = 0, même si f'(0) = 0, la fonction est décroissante; elle décroit avant (lorsque $x < 0$) et continue de décroître après (lorsque $x > 0$).

f change de signe en $x = a \Rightarrow f(a) = 0$ ou f discontinue en $x = a$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ croissante

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ décroissante

---

f croissante $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

f décroissante $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

Pratique :

1. Trouver les intervalles ou les fonctions suivantes sont croissantes :

a) $y = 4x^2 - 3x + 7$ b) $y = 2x^3 + 21x^2 - 9$ c) $y = \frac{3x+6}{2x-5}$

$[3/8, \infty[$ $]-\infty, -7] \cup [0, \infty[$ $\varnothing$

2. Trouver les intervalles ou les fonctions suivantes sont décroissantes :

a) $y = (x-1)^3(x+4)$ b) $y = \frac{4}{\sqrt{x^2-3}}$ c) $y = \frac{5x^2}{1+x^2}$

$]-\infty, -11/4]$ $]\sqrt{3}, \infty[$ $]-\infty, 0]$

Unité : Les Maximums et les Minimums

Leçon 1 : Les Maximums et Minimums relatifs

A) Ce qu'ils sont

Définition de maximum relatif d'une fonction

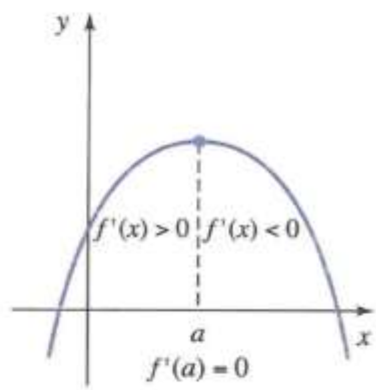
La valeur $f(a)$ s'appelle un *maximum relatif* de la fonction *f* s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$ tel que $a \in I$ et $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit aussi que *f* possède un maximum relatif au point d'abscisse $x = a$ ou encore que le point $(a, f(a))$ est un maximum relatif de la fonction *f*.

Définition de minimum relatif d'une fonction

La valeur $f(a)$ s'appelle un *minimum relatif* de la fonction *f* s'il existe un intervalle ouvert $I \subset D_f$ tel que $a \in I$ et $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit aussi que *f* possède un minimum relatif au point d'abscisse $x = a$ ou encore que le point $(a, f(a))$ est un minimum relatif de la fonction *f*.

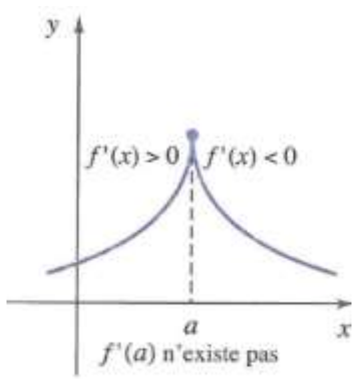
Extremum relatif : utiliser pour désigner indistinctement un minimum relatif ou un maximum relatif. Dans ces expressions, le mot relatif a le sens de « dans le voisinage »

Si on dit que le point (a, f(a)) est un maximum relatif, cela signifie que ce point est le plus haut de la courbe dans le voisinage de ce point.



1) Maximum relatif et dérivée

La pente f' est positive avant le point d'abscisse en x = a, et est négative après le point d'abscisse x = a. Au point d'abscisse x = a, la pente est nulle (f'(a) = 0).



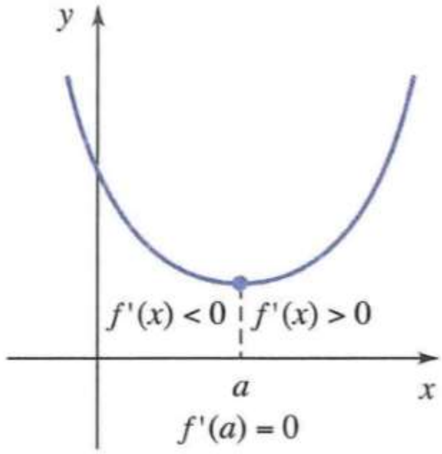
La pente f' est positive avant le point d'abscisse x = a (donc f est croissante) et est négative après le point d'abscisse x = a (donc f est décroissante). Au point d'abscisse x = a, la pente f'(a) n'existe pas, la fonction f' est discontinue.

Donc :

« croissance ; maximum relatif ; décroissance »

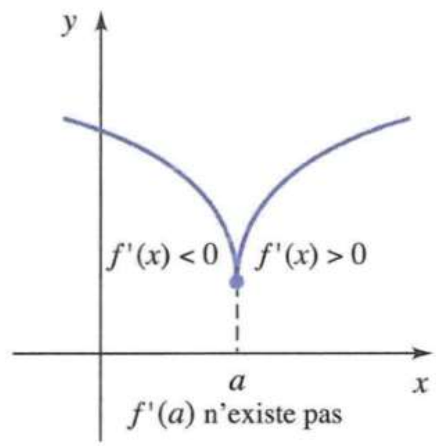
« $f'(x) > 0$; $f'(x) = 0$ ou n'existe pas ; $f'(x) < 0$ »

2) Minimum relatif et dérivée



La pente f'(x) est négative (décroissance) avant le point d'abscisse x = a et positive (croissance) après le point d'abscisse x = a. Au point d'abscisse x = a, la pente est nulle, f'(a) = 0

La pente de f'(x) est négative (décroissance) avant le point d'abscisse x = a et est positive (croissance) après le point d'abscisse x = a. Au point d'abscisse x = a, la pente f'(a) n'existe pas, f' est discontinue.



« décroissance ; minimum relatif ; croissance »

« $f'(x) < 0$; $f'(x) = 0$ ou n'existe pas ; $f'(x) > 0$ »

3) Extremum relatif et dérivée

Une fonction atteint un maximum ou un minimum relatif lorsque sa fonction dérivée f'(x) change de signe en passant de + à – ou de – à +. Alors f'(x) change de signe en x = a si elle devient nulle ou si elle est discontinue.

Théorème 1 :

Si f est une fonction qui atteint un maximum relatif en $x = a$ et si nous supposons f dérivable en $x = a$, alors $f'(a) = 0$.

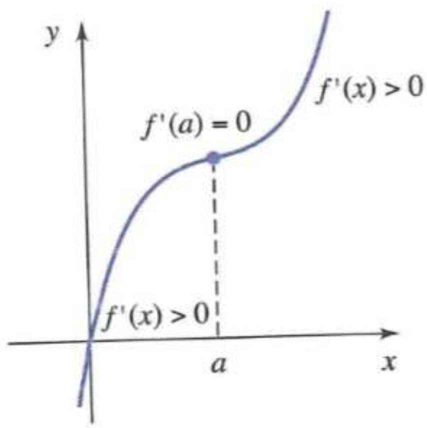
Puisque $f(a)$ est un maximum relatif, il existe donc un intervalle I autour de a tel que $f(a) \geq f(a + \Delta x)$. Ainsi,

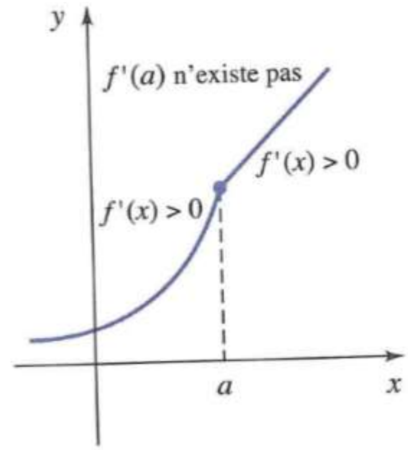
$$f(a + \Delta x) - f(a) \leq 0$$

Théorème 2 :

Si f est une fonction qui atteint un minimum relatif en x = a et si nous supposons f dérivable en x=a, alors f’(a)= 0.

MAX ou MIN relatif en x = a → f’(a) = 0 ou f’(a) n’existe pas.





f’(a) = 0 et pourtant ce point n’est ni un MAX ni un MIN relatif.

La dérivée ne change pas de signe, elle est positive avant x = a et demeure positive après x = a, la fonction est toujours croissante et n’atteint donc pas un MAX ou un MIN relatif. En effet, pour atteindre un maximum relatif, la fonction doit être croissante avant le point en question et décroissante après ce point, de même, pour atteindre un minimum relatif, la fonction doit être décroissante avant le point et croissante après ce point.

Il faut un changement de signe de la dérivée pour atteindre un MAX ou un MIN relatif (croissance à décroissance ou vice versa), donc un passage de positif à négatif ou de négatif à positif dans le signe de dérivée.

f’(a) n’existe pas et pourtant ce point n’est ni un MAX ni un MIN relatif.

Théorème 3 :

Si f est une fonction telle que $f'(a) = 0$ et s’il existe un intervalle $[c, d]$ autour de a tel que

$$f'(x) < 0 \text{ pour } c \leq x < a$$

et

$$f'(x) > 0 \text{ pour } a < x \leq d$$

alors $f(a)$ est un minimum relatif de la fonction f.

Théorème 4 :

Si f est une fonction telle que $f'(a)=0$ et s'il existe un intervalle $[c,d]$ autour de a tel que

$$f'(x)>0 \text{ pour } c \leq x < a$$

et

$$f'(x)<0 \text{ pour } a < x \leq d$$

alors $f(a)$ est un maximum relatif de la fonction f.

Dans chacun des théorèmes 3 et 4, si la fonction f est continue sur un intervalle I contenant a, l'hypothèse $f'(a)=0$ pourrait être remplacée par $f'(a)$ n'existe pas.

Revue :

$$\left.\begin{array}{c} f'(a)=0 \text{ ou } f'(a) \text{ n'existe pas} \\ \text{et } f' \text{ passe de } + \text{ à } - \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MAX relatif en } x=a$$

$$\left.\begin{array}{c} f'(a)=0 \text{ ou } f'(a) \text{ n'existe pas} \\ \text{et } f' \text{ passe de } - \text{ à } + \end{array}\right\} \Rightarrow \text{MIN relatif en } x=a$$

B)Comment trouver un MAX ou MIN

Définitions des valeurs critiques d'une fonction

Valeurs critiques de f : les valeurs de a de la variable x telles que f(a) existe et de plus **<u>f'(a) = 0</u>** ou f'(a) n'existe pas. Les points (a, f(a)) correspondant aux valeurs critiques s'appellent des points critiques de la fonction f. (On suppose f continue sur un intervalle contenant a.)

La détermination des MAX ou MIN relatifs : « test de la dérivée première »

1) Trouver f'(x)
2) Trouver les valeurs critiques de f(x).
3) Vérifier les changements de signe de f' à l'aide d'un tableau.

Exemple 1 : Trouver les MAX ou MIN relatifs de la fonction :
$y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$

Solutions :

1) $f'(x) = 12x^2 + 6x - 36 \qquad = 6(2x^2 + x - 6)$

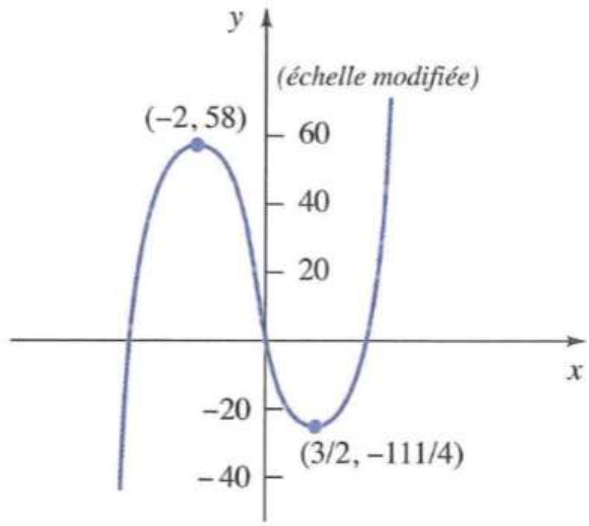
$$0 = 6(2x - 3)(x + 2)$$

2) Les valeurs critiques de f sont x = 3/2 et x = -2 parce que f'(3/2) = 0 et f'(-2) = 0
3) Test les valeurs de x dans f'(x) pour trouver ou la dérivée est croissante/décroissante.

x	$-\infty$		-2		$3/2$		∞
y'		+	0	−	0	+	
y		$\nearrow$	MAX rel.	$\searrow$	MIN rel.	$\nearrow$	

(Insère les valeurs de x dans f'(x) pour tester ou les max et min sont.)

4) On a un MAX relatif en x = -2, ce MAX étant f(-2) = 58
On a un MIN relatif en x = 3/2, ce MIN étant f(3/2) = -111/4



Exemple 2 :

Trouver les MAX et MIN relatifs de la fonction $y = x^{\frac{2}{3}}$

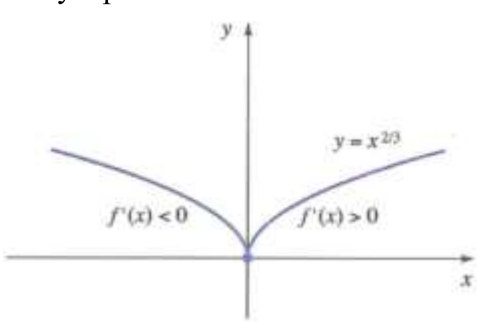
Solutions :
1)

$$y' = \frac{2x^{-1/3}}{3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

2) Valeurs critiques : x = - car f'(0) n'existe pas
3)

x	$-\infty$		0		∞
y'		−	∄	+	
y		↘	MIN rel.	↗	

4) On a un MIN relatif en x = 0, ce MIN étant f(0) = 0
Il n'y a pas de MAX relatif.



Exemple 3 :
Trouver les MAX et MIN relatifs de la fonction suivante :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{x+1}$$

Solutions :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

Valeurs critiques :

$x_1 = 0$ car $f'(0) = 0$

$x_2 = -2$ car $f'(-2) = 0$

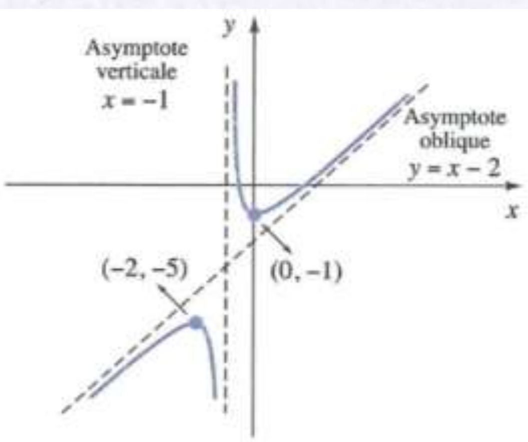
de plus, $f'(-1)$ n'existe pas.

x	$-\infty$		-2		-1		0		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	MAX rel.	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	MIN rel.	$\nearrow$	

On a un MAX relatif en $x = -2$, ce MAX étant $f(-2) = -5$

On a un MIN relatif en $x = 0$, ce MIN étant $f(0) = -1$

On a une discontinuité en $x = -1$; c'est une asymptote verticale.



Leçon 2 : Les Maximum et Minimum absolus

A) Ce qu'ils sont

Des MAX ou MIN relatifs c'est-à-dire de points qui étaient des MAX ou MIN dans un certain intervalle autour du point.

Maximum absolu d'une fonction sur un intervalle

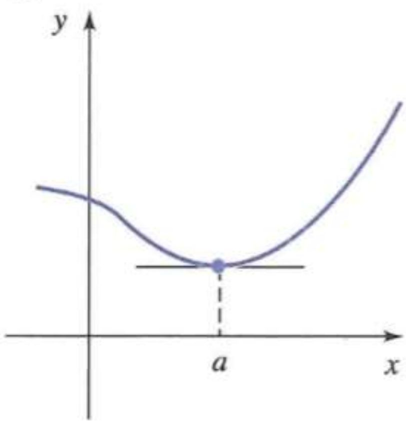
La valeur $f(a)$ s'appelle le *maximum absolu* de la fonction f sur l'intervalle I si $a \in I$ et si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit aussi que f atteint son maximum absolu sur I en $x = a$ ou encore que le point $(a, f(a))$ est le maximum absolu de la fonction f sur l'intervalle I.

Minimum absolu d'une fonction sur un intervalle

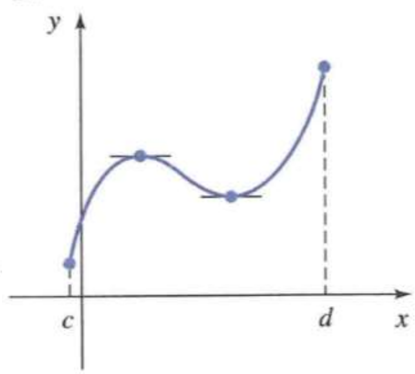
La valeur $f(a)$ s'appelle le *minimum absolu* de la fonction f sur l'intervalle I si $a \in I$ et si $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in I$. On dit aussi que f atteint son minimum absolu sur I en $x = a$ ou encore que le point $(a, f(a))$ est le minimum absolu de la fonction f sur l'intervalle I.

Pour une fonction continue

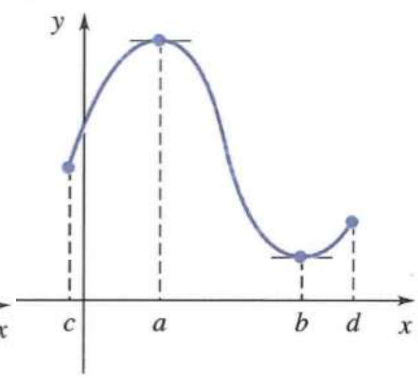
1.



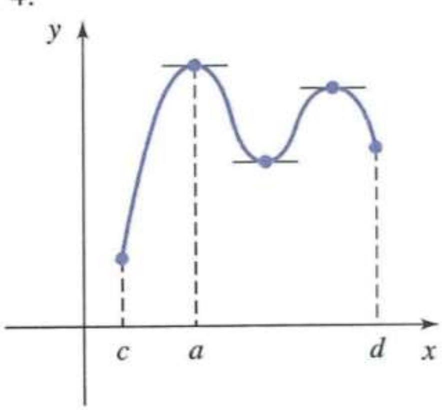
5.



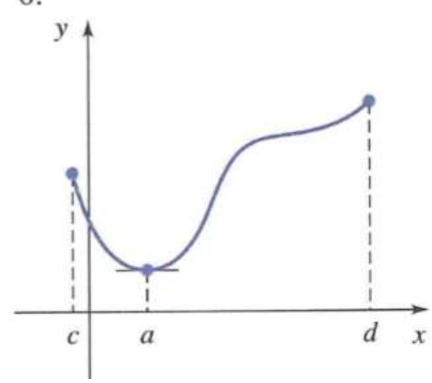
3.



4.



6.



1) Dans le premier graphique, on a un MIN absolu en $x = a$; il n'y a pas de MAX absolu puisque la fonction croît indéfiniment, sans borne.

2) Dans le deuxième graphique, il n'y a ni MAX ni MIN absolu.

3) Dans le troisième graphique, on a un MAX absolu en $x = a$; c'est aussi un MAX relatif. De plus, on a un MIN absolu en $x = b$, qui est de fait un MIN relatif.

4) Dans le quatrième graphique, on a un MAX absolu en $x = a$, qui est en même temps un MAX relatif; à noter que ce n'est pas le seul MAX relatif. Également, on a un MIN absolu en $x = c$, c'est-à-dire à l'une des extrémités de l'intervalle considéré; malgré la présence d'un MIN relatif, le MIN absolu ne se situe pas à cet endroit.

5) Dans le cinquième graphique, on a un MAX absolu en $x = d$ et un MIN absolu en $x = c$, ces deux points étant les extrémités de l'intervalle considéré. Ici encore, malgré la présence de MIN et de MAX relatifs, les MIN et MAX absolus se situent ailleurs, soit aux extrémités de l'intervalle.

6) Dans le sixième graphique, on a un MAX absolu en $x = d$ et un MIN absolu en $x = a$, le premier point étant une extrémité de l'intervalle, le second étant un MIN relatif.

De cette étude graphique retenons les éléments suivants :

a) une fonction ne possède pas toujours un MAX absolu et un MIN absolu.

b) si nous admettons que toute fonction continue sur un intervalle fermé possède un MAX et un MIN absolus sur cet intervalle, alors ces valeurs se situent en un point où il y a MAX ou MIN relatif ou en un des points extrêmes de l'intervalle.

c) Pour trouver le MIN et le MAX absolus, il nous suffira de comparer les MIN et MAX relatifs et les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle.

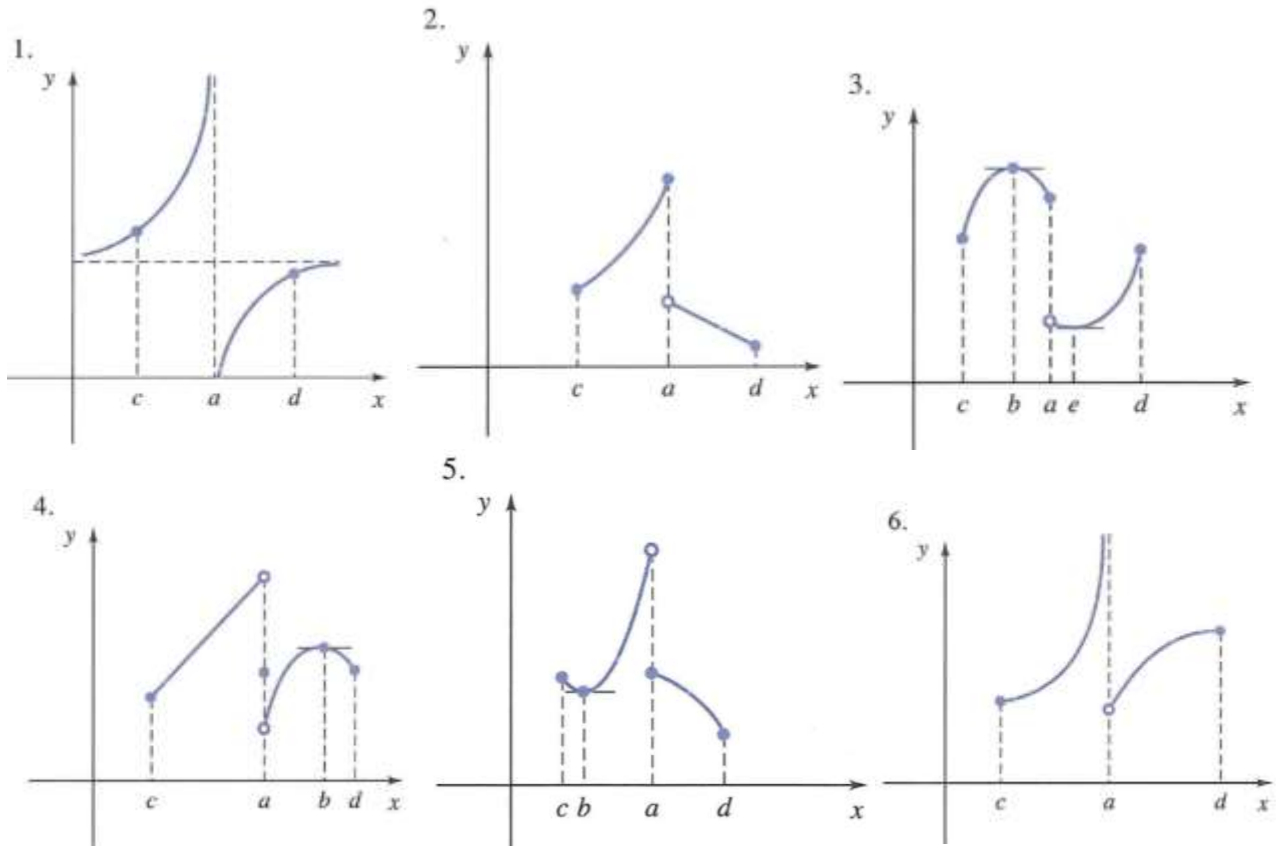
Donc, si une fonction *f* est continue sur un intervalle fermé, elle a un MIN et un MAX absolus qui se situent soit aux valeurs critiques, soit aux extrémités de l'intervalle considéré. Si la fonction *f* est continue mais que l'intervalle considéré s'étend à l'infini alors il n'y a pas nécessairement de MIN ou de MAX absolus. Dans ce dernier cas, s'il y a un MIN et/ou un MAX absolus, on le (les) retrouvera aux valeurs critiques de *f* ou à une extrémité finie de l'intervalle.

Pour une fonction discontinue

Des fonctions présentant une discontinuité dans l'intervalle I considéré que cet intervalle s'étende ou non à l'infini.

Les graphiques suivants ont une discontinuité en x = a et ou on considère la fonction sur l'intervalle [c, d].

Si une fonction f est discontinue sur un intervalle I, elle peut avoir un MIN et /ou un MAX absolus qui se situent alors soit aux extrémités de l'intervalle, soit aux valeurs critiques, soit au point de discontinuité.



1) Dans le premier graphique, il n'y a pas de MAX absolu ni de MIN absolu.

2) Dans le deuxième graphique, il y a un MAX absolu en $x = a$ et un MIN absolu en $x = d$.

3) Dans le troisième graphique, il y a un MAX absolu en $x = b$, ce qui est en même temps un MAX relatif. Il y a aussi un MIN absolu en $x = e$, ce qui est en même temps un MIN relatif.

4) Dans le quatrième graphique, il n'y a ni MAX absolu ni MIN absolu. Malgré la présence d'un MAX relatif, il n'y a pas de MAX absolu puisque le point est ouvert en $x = a$ (lorsqu'on approche par la gauche).

5) Dans le cinquième graphique, il n'y a pas de MAX absolu. Il y a un MIN absolu en $x = d$.

6) Dans le sixième graphique, il n'y a ni MAX absolu, ni MIN absolu.

De cette étude graphique retenons les éléments suivants :

a) Une fonction discontinue ne possède pas toujours un MAX absolu et un MIN absolu.

b) Pour une fonction discontinue, un MIN absolu ou un MAX absolu, s'il existe, peut se situer en un point où il y a un MIN ou un MAX relatifs, en un point de discontinuité ou en un point extrémité de l'intervalle considéré.

c) Pour analyser la situation en un point de discontinuité, il faut considérer la valeur de la fonction en ce point, si cette valeur existe, de même que les approches à gauche et à droite de ce point de discontinuité.

B)Comment trouver un MIN ou un MAX absolu

Méthode de détermination des minimums et maximums absolus

1) Trouver f'(x).
2) Trouver les valeurs critiques de f'. Trouver les points de discontinuité de f'.
3) Trouver les valeurs correspondantes de y = f(x) pour les valeurs critiques et pour les extrémités de l'intervalle considéré. Si l'intervalle s'étend à l'infini, calculer les limites à l'infini. S'il y a un (ou des) point(s) de discontinuité, trouver la valeur de la fonction en ce (ou ces) point(s), s'il y a lieu, puis trouver les limites à gauche et à droite en ce (ou ces) point(s) de discontinuité.
4) Conclure : la plus petite valeur trouvée correspond au MIN absolu de f alors que al plus grande valeur trouvée correspond au MAX absolu de f.

Exemple 1 :

Soit la fonction $y = x^4 - 14x^3 + 24x + 4$ sur [0, 3]. Trouver le MAX et le MIN absolus.

Solution :

1)

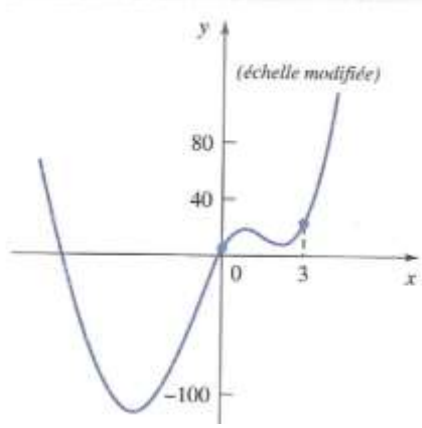
$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 28x + 24 \\ &= 4(x^3 - 7x + 6) \\ &= 4(x-1)(x-2)(x+3) \end{aligned}$$

2) Les valeurs critiques sont : x = 1   x = 2   x = -3

Choisis les x qui se trouvent dans l'intervalle.

3) f(0) = 4   f(1) = 15   f(2) = 12   f(3) = 31

4) On a un MIN absolu en x = 0 ;   f(0) = 4
On a un MAX absolu en x = 3 ;   f(3) = 31



Exemple 2 :

Soit la fonction y = (x + 7)/(x – 3) définie sur [0, 4]. Trouver le MAX et le MIN absolus.
Solution :
1)

$$y' = \frac{-10}{(x-3)^2}$$

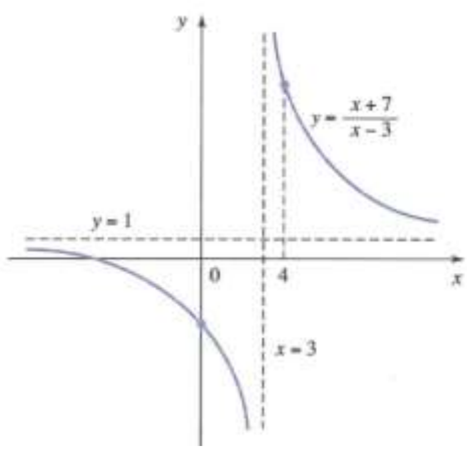
2) Il n’y a aucune valeur critique. Les extrémités de l’intervalle considéré sont 0 et 4. Il y a un point de discontinuité en x = 3.
3)

$$f(0) = -7/3$$
$$f(4) = 11$$
$$f(3) \quad \nexists$$

Il faut être prudent dans ce cas car la fonction n’est pas continue sur $[0,4]$; en effet, on a une discontinuité en $x = 3$. Or, nous avons bien dit qu’une fonction continue sur un intervalle fermé possède nécessairement un MIN et un MAX absolus. Si on n’a pas la continuité, on n’a pas nécessairement ce MIN absolu ou ce MAX absolu. Ainsi, en considérant l’approche à gauche et l’approche à droite, on a :

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x+7}{x-3} = \frac{10}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x\to 3^-} \frac{x+7}{x-3} = \frac{10}{0^-} = -\infty$$

4) Il n’y a ni MIN absolu ni MAX absolu dans le cas présent.



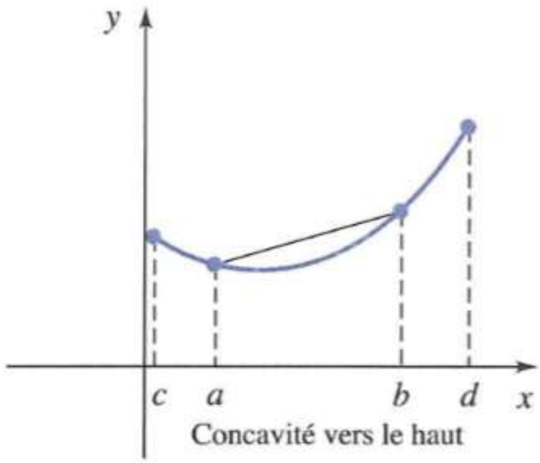
Unité : La Concavité et les points d'inflexion

Leçon 1 : La Concavité

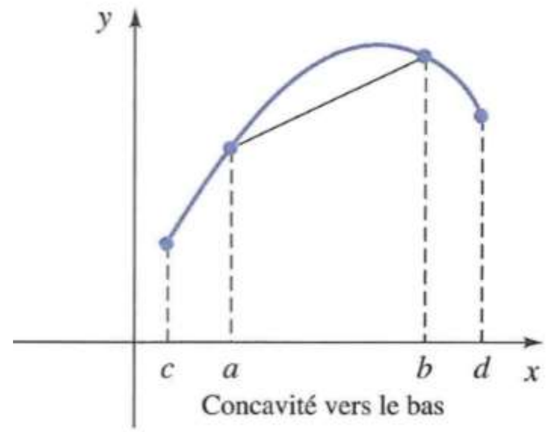
L'étude des courbes

La concavité c'est le « creux » d'une courbe.

Concavité vers le haut



Concavité vers le bas

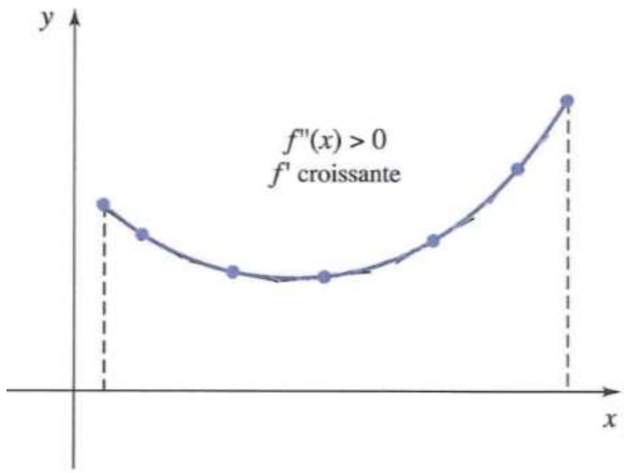


Corde : Un segment de droite joignant deux points distincts d'une courbe.

Si vous avez une droite linéaire (y = mx + b) la « courbe » représentative est une droite, toute corde se confond avec la droite elle-même, alors la concavité est nulle.

Une courbe est dite *concave vers le haut* dans un intervalle $[c,d]$ (ou $]c,d[$) si toute corde dans cet intervalle est au-dessus de la courbe, sauf pour ses points extrêmes.

Une courbe est dite *concave vers le bas* dans un intervalle $[c,d]$ (ou $]c,d[$) si toute corde dans cet intervalle est en dessous de la courbe sauf pour ses points extrêmes.



Associe la tangente à la courbe en cinq points.
Le mouvement de gauche à droite : on constate que la pente passe de valeurs négatives à zéro à des valeurs positives de plus en plus grandes, alors la pente de la tangente croît.

Donc la pente de la tangente est donnée par la fonction dérivée, et si cette dernière fonction est croissante, sa dérivée, c'est-à-dire la dérivée de la dérivée, doit être positive.

- Concavité vers le haut et dérivée seconde positive.
- Concavité vers le bas et dérivée seconde négative.

Théorème 1 :

Si f est une fonction telle que $f''(x) > 0$ sur I, alors la courbe de $y = f(x)$ est concave vers le haut dans cet intervalle.

Théorème 2 :

Si f est une fonction telle que $f''(x) < 0$ sur I, alors la courbe de $y = f(x)$ est concave vers le bas dans cet intervalle.

- La concavité en un point : Une courbe est concave vers le haut en un point s'il existe un intervalle ouvert autour de ce point sur lequel la concavité est dirigée vers le haut.
- Une courbe peut être concave vers le haut ou vers le bas sur un intervalle fermé [c, d] sans être nécessairement concave vers le haut, ou vers le bas, aux points extrêmes x = c et x = d.

La concavité vers le haut sera notée par : $\cup$

La concavité vers le bas sera notée par : $\cap$

Exemple 1 : Trouver les intervalles ou la concavité est dirigée vers le haut dans la courbe de $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 6$

Solution :

$$y' = 3x^2 - 18x + 24 \qquad y'' = 6x - 18 = 6(x-3)$$

$$y'' > 0 \text{ pour } x > 3$$

$$y'' < 0 \text{ pour } x < 3$$

Alors :

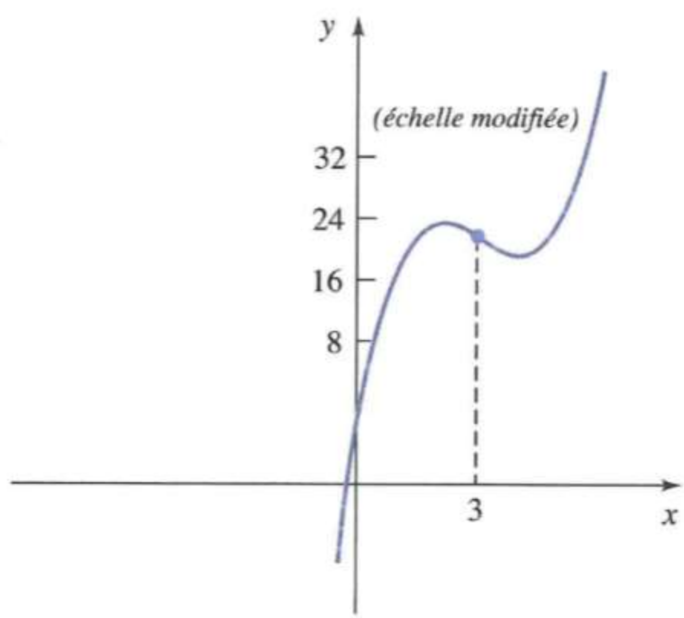
$$x > 3 \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow \text{concavité vers le haut}$$

$$x < 3 \Rightarrow y'' < 0 \Rightarrow \text{concavité vers le bas}$$

Ainsi, sur [3, ∞[, on a une concavité vers le haut.

x	$-\infty$		3		∞
y''		$-$	0	$+$	
y		$\cap$		$\cup$	

Il faut bien noter que la concavité est dirigée vers le haut sur l'intervalle semi-fermé [3, ∞[.



Leçon 2 : Les Points d'inflexions

A) Ce qu'ils sont

L'exemple ci-dessus, l'intervalle est fermé au point d'abscisse x = 3; si $x > 3$, la concavité est dirigée vers le haut et si $x < 3$, la concavité est dirigée vers le bas.

Si x = 3 ? **f''(3) = 0**

Avant ce point, la pente décroît et, après ce point, la pente croît. C'est un point de changement de concavité; c'est ce qu'on appelle **un point d'inflexion.**

Un point P sur la courbe y = f(x) d'une fonction continue f est dit point d'inflexion de la courbe si la concavité change de sens en ce point.

En un point d'inflexion, il existe toujours, autour de l'abscisse du point, un intervalle tel que la dérivée croît d'un côté du point et décroît de l'autre.

Théorème 3 :

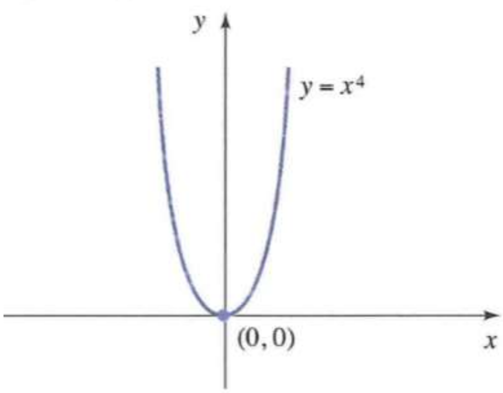
Si f est une fonction qui possède un point d'inflexion en x = a, et si la dérivée seconde est continue en x = a, alors f''(a) = 0

Preuve :

Puisqu'on a un point d'inflexion en $x = a$, $f'(x)$ est croissante d'un côté de $x = a$, c'est-à-dire $f''(x) \geq 0$ de ce côté de $x = a$ et $f'(x)$ est décroissante de l'autre côté de $x = a$, c'est-à-dire $f''(x) \leq 0$ de cet autre côté.

Puisque $f''(x)$ est continue en $x = a$, il s'ensuit que $f''(a) = 0$, d'où la preuve.

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie. En effet, si $f''(a) = 0$, on ne peut pas conclure qu'en $x = a$ on a un point d'inflexion. Par exemple, si $y = x^4$, $y''(0) = 0$, et pourtant, le point $(0,0)$ n'est pas un point d'inflexion.



Théorème 4 : (inverse de théorème 3)

Si f est une fonction continue en x = a telle que f''(a) = 0 (ou f''(a) n'existe pas et f continue en x = a) et si f''(x) change de signe autour de x = a, alors nous avons un point d'inflexion en x = a.

Puisque $f''(x)$ change de signe autour de $x = a$, la courbe change de concavité selon les théorèmes 1 et 2. Ainsi, par définition, on a un point d'inflexion en $x = a$, ce qui démontre le théorème.

Exemple 2 : Déterminer la concavité et trouver les points d'inflexion de la courbe de
$y = x^3 + x^2 - 8x - 1$

Solution :

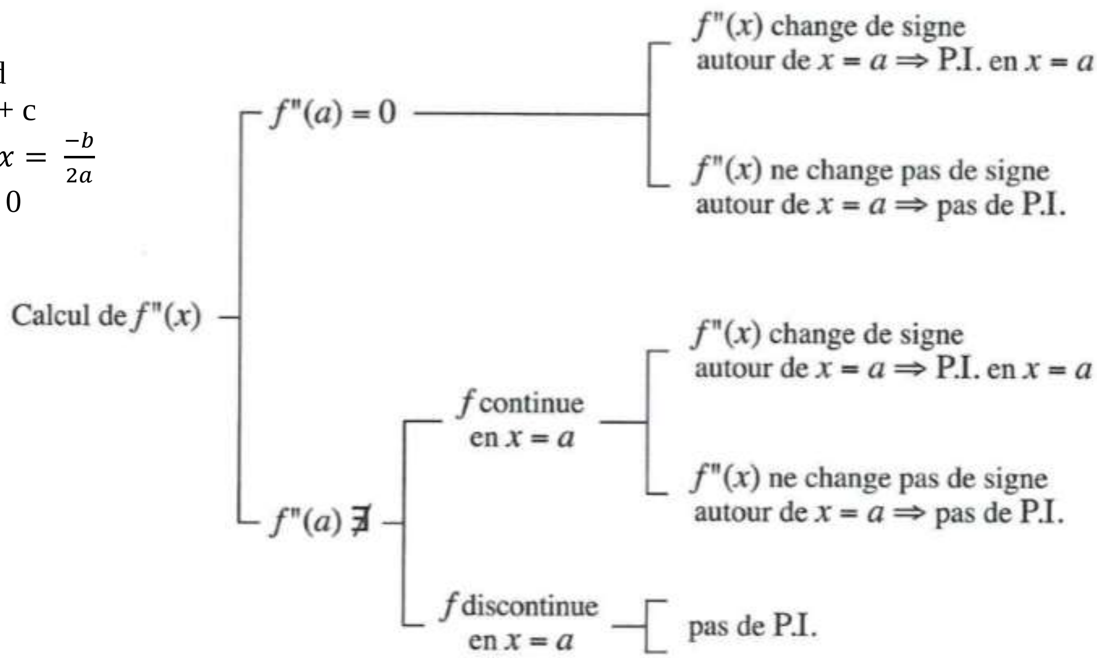
$$y' = 3x^2 + 2x - 8 \qquad y'' = 6x + 2 = 2(3x+1)$$

Si
$x < -1/3$ $\quad y'' < 0 \rightarrow$ Concavité vers le bas
$x > -1/3$ $\quad y'' > 0 \rightarrow$ Concavité vers le **HAUT**
Et pour
$x = -1/3$ $\quad y'' = 0$ et change de signe
Donc, (-1/3, 47/27) est un point d'inflexion. *** Insère x = -1/3 dans f(x).

B)Comment trouver les points d'inflexion

1) Calculer la dérivée seconde.
2) Considérer les changements de signes de la dérivée seconde autour d'un point (ou elle s'annule ou n'existe pas.
3) Assurer l'existence du point sur la courbe que les points d'inflexion sont trouvées.

Truc!!!
$y = ax^3 + bx^2 + d$
$y' = 3ax^2 + 2bx + c$
axe de symétrie $x = \frac{-b}{2a}$
$y'' = 6ax + 2b = 0$
$x = \frac{-b}{3a}$



Exemple 3 : Trouver les points d'inflexion $y = x^{\frac{1}{3}}$
(Exemple qu'il ait un point d'inflexion mais qu'en ce point la dérivée n'existe pas.)

Solution :

$$y' = \frac{1}{3}x^{-2/3} \qquad y'' = \frac{-2}{9}x^{-5/3} = \frac{-2}{9x^{5/3}}$$

Si :

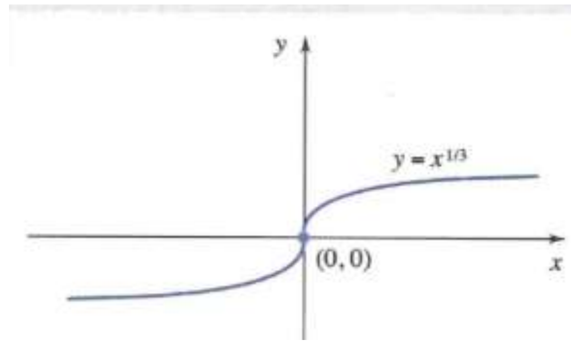
$x < 0 \quad y'' > 0 \Rightarrow$ concavité vers le haut

$x > 0 \quad y'' < 0 \Rightarrow$ concavité vers le bas

Pour $x = 0$, y'' n'existe pas mais y'' change de signe ; de plus la fonction est continue, donc existe, en $x = 0$. En effet, $f(0) = 0$.

Donc, (0 0) est un point d'inflexion.

x	$-\infty$	0	∞
y''	$+$	$\nexists$	$-$
y	$\cup$	P.I. $(0,0)$	$\cap$



Exemple 4 :
Déterminer la concavité et les points d'inflexion de la courbe de :

$$y = \frac{3}{2}x^{2/3} - x$$

Solution :

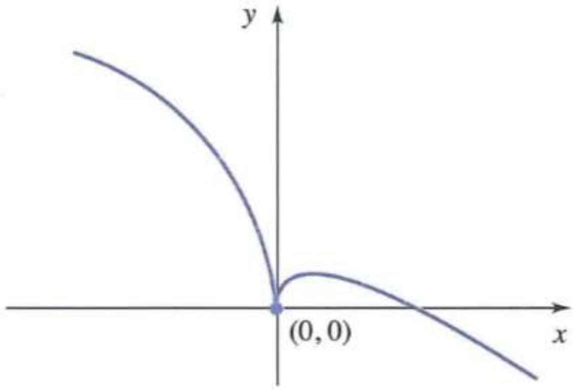
$$y' = x^{-1/3} - 1 \qquad y'' = -\frac{1}{3}x^{-4/3} = -\frac{1}{3x^{4/3}}$$

$x < 0 \quad y'' < 0 \Rightarrow$ concavité vers le bas

$x > 0 \quad y'' < 0 \Rightarrow$ concavité vers le bas

Pour $x = 0$, y'' n'existe pas mais y'' ne change pas de signe.

Donc, on n'a pas de point d'inflexion. Voici le graphique de la courbe et un tableau des résultats.



x	$-\infty$		0		∞
y''		$-$	$\nexists$	$-$	
y		$\cap$		$\cap$	

Exemple 5 : Déterminer la concavité et les points d'inflexion de la courbe de

$$y = \frac{x-1}{x-3}$$

Solution :

$$y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \qquad y'' = \frac{4}{(x-3)^3}$$

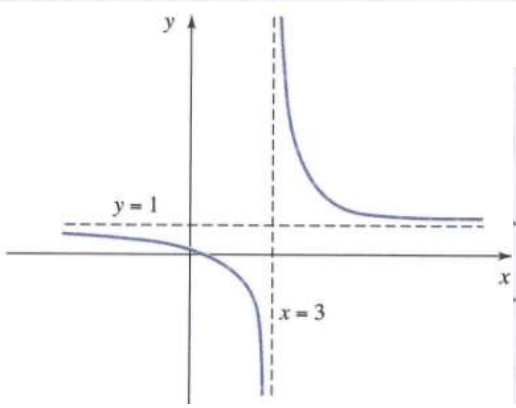
Si :

$x > 3$ $\quad y'' > 0 \Rightarrow$ concavité vers le haut

$x < 3$ $\quad y'' < 0 \Rightarrow$ concavité vers le bas

Pour $x = 3$, y'' n'existe pas; on a un changement de signe de y'' mais la fonction n'est pas définie en $x = 3$.

Donc, on n'a pas de point d'inflexion. Voici le graphique de la courbe et un tableau des résultats.



x	$-\infty$		3		∞
y''		$-$	$\nexists$	$+$	
y		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

La réciproque de théorème 1 et 2 :

Théorème 5 :
Si f est une fonction dont la courbe est concave vers le haut sur un intervalle I et si la dérivée seconde est continue sur (, alors $f''(x) \geq 0$ sur I.

Théorème 6 :
Si f est une fonction dont la courbe est concave vers le bas sur un intervalle I et si la dérivée seconde est continue sur I alors $f''(x) \leq 0$ sur I.

Revue :

$f''(x) > 0 \Rightarrow$ concavité vers le haut $f''(x) < 0 \Rightarrow$ concavité vers le bas
$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue en } x = a \\ f''(a) = 0 \text{ ou n'existe pas} \\ \text{et } f''(x) \text{ change de signe} \end{array}\right\} \Rightarrow$ point d'inflexion en $x = a$
point d'inflexion en $x = a$ $\Rightarrow$ $f''(a) = 0$ ou n'existe pas
concavité vers le haut $\Rightarrow f''(x) \geq 0$ concavité vers le bas $\Rightarrow f''(x) \leq 0$

Pratique :

1. Déterminer le sens de la concavité et les

a) $y = 6x^2 - 5x + 3$

$y' = 12x - 5$

$y'' = 12$

x	$-\infty$				∞
y''		+	+	+	
y		$\cup$	$\cup$	$\cup$	

La courbe est toujours concave vers le haut. Il n'y a pas de point d'inflexion.

b) $y = \sqrt{2x+5}$

Concavité vers le bas $\left[-5/2,\infty\right[$; pas de P.I.

c) $y = \frac{2x^2+x+8}{x}$

$y' = \frac{2x^2-8}{x^2}$

$y'' = \frac{16}{x^3}$

x	$-\infty$		0		∞
y''		$-$	$\nexists$	$+$	
y		$\cap$		$\cup$	

La courbe est concave vers le haut sur $\left]0,\infty\right[$ et concave vers le bas sur $\left]-\infty,0\right[$. Il n'y a pas de point d'inflexion.

d) $y = \frac{x^2-1}{x^2+2}$

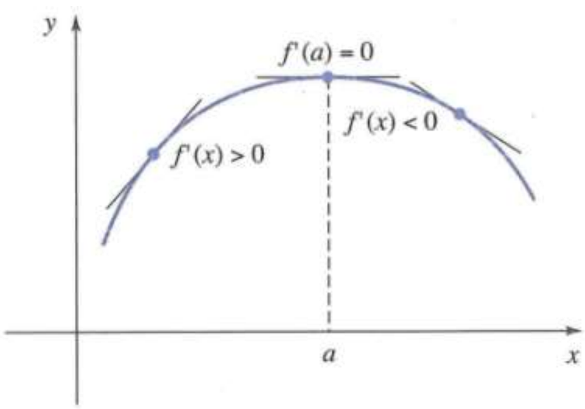
Concavité dirigée vers le haut sur $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et dirigée vers le bas sur $\left]-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right[$.

Il y a deux P.I.: $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{8}\right)$ et $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{8}\right)$

C) <u>Dérivée seconde et extremums relatifs</u>

Extremum : Désigne un maximum ou un minimum

Lien entre extremum relatif et concavité (seconde méthode pour déterminer ces extremums relatifs.)

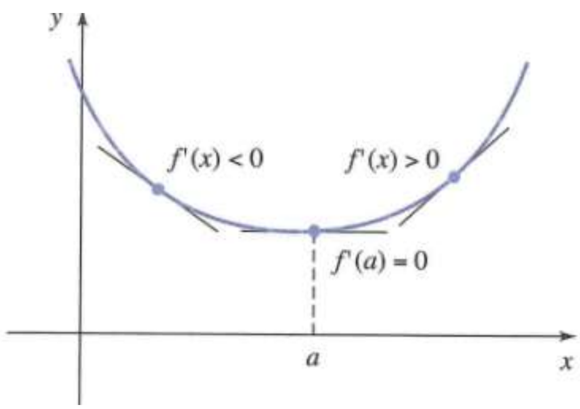


Maximum relatif en x = a

Observons le comportement de la fonction au point d'abscisse $x = a$ et autour de ce point. Au point d'abscisse $x = a$, $f'(a) = 0$ ($f'(a)$ pourrait aussi ne pas exister) et de plus, autour de ce point la fonction $f'(x)$ passe de + à −; la fonction $f'(x)$ est donc décroissante et de ce fait on conclut que $f''(x) \leq 0$. Géométriquement, on observe aussi que la concavité est dirigée vers le bas ce qui se traduit également par $f''(x) \leq 0$. On peut donc établir un lien entre la concavité dirigée vers le bas et la variation de $f'(x)$. Ainsi, si $f''(x) < 0$, la fonction $f'(x)$ est décroissante et si elle passe par 0 elle passe donc de + à − et en même temps la concavité est dirigée vers le bas.

Donc, dans la recherche d'un maximum, la condition « $f'(x)$ passe de + à − » peut être remplacée par « la concavité est dirigée vers le bas » ou « $f''(x) < 0$ ».

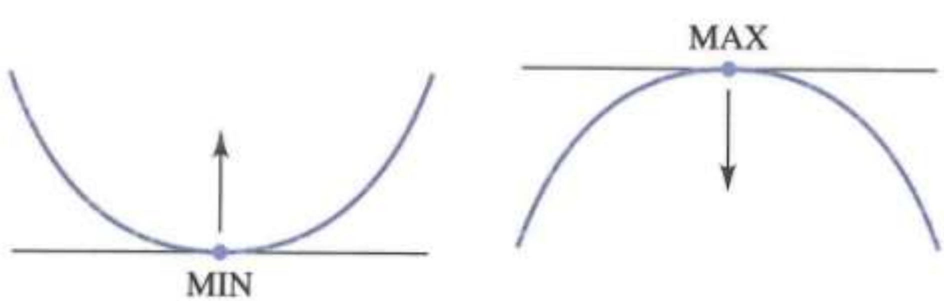
Soit une fonction présentant un minimum relatif en $x = a$.



Comme dans le cas précédent, en observant le comportement de la fonction au point d'abscisse $x = a$ et autour de ce point, on peut faire une association d'idée analogue. En ce point d'abscisse $x = a$, $f'(a) = 0$ ($f'(a)$ pourrait ne pas exister) et autour de ce point, $f'(x)$ passe de − à +; donc la fonction f' est une fonction croissante et alors $f''(x) \geq 0$. De même, la concavité dirigée vers le haut nous permet de dire que $f''(x) \geq 0$. Nous établirons le lien entre ces notions ainsi : si $f''(x) > 0$, la concavité est dirigée vers le haut et la fonction $f'(x)$ est croissante; si elle passe par 0 elle passe donc de − à +.

Ainsi, dans le test de la dérivée première, la condition « $f'(x)$ passe de − à + » peut être remplacée par « $f''(x) > 0$ » ou « la concavité est dirigée vers le haut ».

On pourra mémoriser facilement cette association d'idées en traçant un dessin comme ceci :



Théorème 1 :

Soit *f* une fonction dérivable. Si $f''(x)$ est une fonction continue sur un intervalle autour de $x = a$, si $f'(a) = 0$ et si $f''(a) > 0$, alors le point $(a, f(a))$ est un MIN relatif de la fonction *f*.

Théorème 2 :

Soit *f* une fonction dérivable. Si $f''(x)$ est une fonction continue sur un intervalle autour de $x = a$, si $f'(a) = 0$ et si $f''(a) < 0$, alors le point $(a, f(a))$ est un MAX relatif de la fonction *f*.

D) Comment trouver un extremum relatif

Test de la dérivée seconde

1) Trouver f'(x) et f''(x).
2) Trouver les valeurs critiques de f.
3) Conclure

$f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0 \Rightarrow$ MAX relatif en $x = a$

$f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0 \Rightarrow$ MIN relatif en $x = a$

Exemple 1 :
À l'aide du test de la dérivée seconde, trouver les extremums relatifs de la fonction
$f(x) = 3x^4 - 20x^3 - 6x^2 + 60x - 27$
Solution :

1)

$$f'(x) = 12x^3 - 60x^2 - 12x + 60$$
$$= 12(x^3 - 5x^2 - x + 5) = 12(x-1)(x+1)(x-5)$$
$$f''(x) = 36x^2 - 120x - 12 = 12(3x^2 - 10x - 1)$$

2)
Les valeurs critiques sont $x = 1$ $x = -1$ $x = 5$

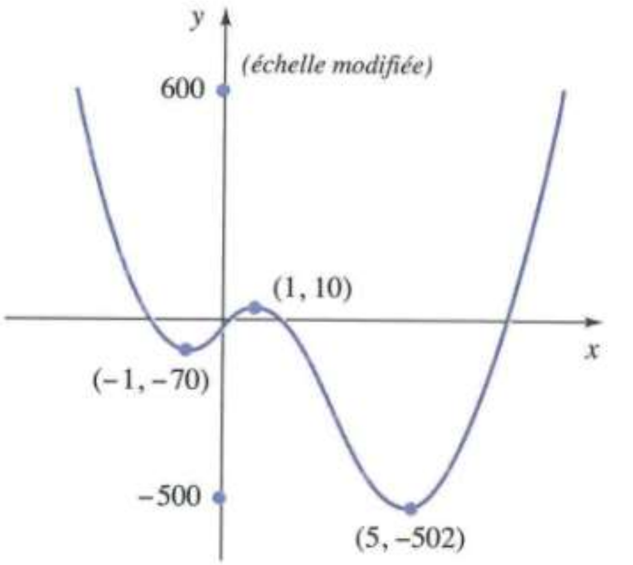
3)

$f'(1) = 0,\ f''(1) < 0 \Rightarrow$ MAX relatif en $x = 1$

$f'(-1) = 0,\ f''(-1) > 0 \Rightarrow$ MIN relatif en $x = -1$

$f'(5) = 0,\ f''(5) > 0 \Rightarrow$ MIN relatif en $x = 5$

Donc, f(1) = 10 est un MAX relatif; f(-1) = -70 eset un MIN relatif et f(5) = -502 est un MIN relatif.



Le test de la dérivée seconde étudie le signe de la dérivée seconde aux valeurs critiques alors que le test de la dérivée première étudie le signe de la dérivée première autour des valeurs critiques. Les deux tests ont bien sûr le même objectif à savoir de trouver les extremums relatifs.

Exemple 2 :
Trouver les extremums relatifs de la fonction $y = x^4$

Solution :
1) $y' = 4x^3$ $\qquad\qquad$ $y'' = 12x^2$

2) La valeur critique $x = 0$

3) $f'(0) = 0$ $\qquad\qquad$ $f''(0) = 0$

et on ne peut conclure avec ce test. Il faut donc revenir au test de la dérivée première dans lequel, à l'étape 3, nous étudierons les changements de signe de f' au moyen du tableau :

x	$-\infty$		0		∞
y'		−	0	+	
y		↘	MIN rel.	↗	

On a donc un MIN relatif en x = 0, ce MIN étant f(0) = 0.

Pratique :

1. En utilisant le test de la dérivée seconde, trouver le extremums relatifs de :

a) $y = (x - 5)^2(2x + 7)^2$

MIN relatifs : $(-7/2, 0)$ et $(5, 0)$; MAX relatif : $(3/4 ; 1\,305{,}02)$.

b) $y = |3x - 4|$

MIN relatif : $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$

c) $y = \sqrt{16 - x^2}$

MAX relatif : $(0, 4)$.

d) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Aucune extremum relatif

Unité : Optimisation

La recherche de l'optimum d'une certaine variable ; par exemple, un profit unitaire maximal selon un nombre d'objets vendus.

Attention !!
Il faut exprimer la variable à optimiser en termes d'une seule variable.

Pour résoudre des problèmes, il faut :

1) Bien lire le problème;
2) Identifier les variables, en particulier, la variable à optimiser et faire un schéma, s'il y a lieu;
3) Traduire les données en termes mathématiques;
4) Trouver le lien entre les variables;
5) Exprimer la variable à optimiser en termes d'une seule autre variable et déterminer l'intervalle utilisé;
6) Trouver l'optimum, soit le MIN ou le MAX selon le cas, à l'aide de la dérivée première et de la dérivée seconde selon les techniques déjà vues;
7) Répondre à la question posée.

Dans la plupart des problèmes concrets ce qu'on cherche c'est un MIN ou un MAX absolu et le plus souvent le contexte définit l'intervalle dans lequel on se situe.

Il faut encore faire une analyse de la situation après avoir trouvé la réponse (MAX ou MIN).

Exemple 1 :
Trouver deux nombres dont la somme est 28 et dont le produit est le plus grand possible.

Solution:

Les variables sont :

- Un nombre, x ;
- L'autre nombre, y ;
- Le produit est deux nombres, P, (et c'est un MAX)

$x + y = 28$

$P = xy$ On ne peut pas avoir 3 variable.

Alors :

$y = 28 - x$ substitue l'équation $y = 28 - x$ dans $P = xy$

$P = x(28 - x)$

$P = 28x - x^2$ Trouve le MAX de P (trouve le(s) valeurs critiques)

$\frac{dP}{dx} = 28 - 2x$; valeur critique : $x_1 = 14$

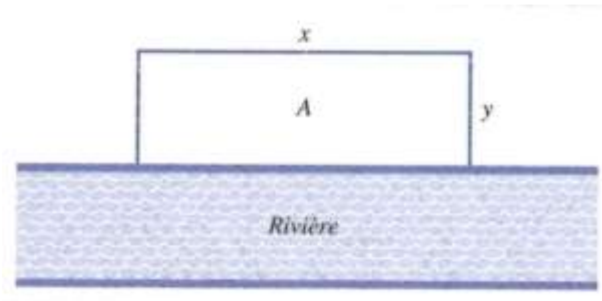
$\frac{d^2P}{dx^2} = -2$; donc < 0

Pour $x_1 = 14$, $dP/dx = 0$ et $d^2P/dx^2 < 0$. On a donc un maximum relatif en $x_1 = 14$ et les valeurs des deux nombres cherchés sont 14 et 14.

Analysons brièvement la solution. La fonction $P = 28x - x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$ et rien ne restreint le domaine de définition de cette fonction. P n'a pas de minimum. La solution trouvée est un MAX absolu en même temps qu'un MAX relatif.

Exemple 2 :
Un fermier possède 1 800 m de clôture. Il veut clôturer un champ rectangulaire adjacent à la rivière qui passe sur la terre. En ne mettant pas de clôture le long de la rivière, quelles doivent être les dimensions du champ pour que la surface soit maximale ?

Solution :



Les variables sont :
- la longueur du champ, x;
- la largeur du champ, y;
- l'aire de la surface clôturée, A.

$A = xy$ — A est la variable à maximiser et à

$x + 2y = 1\,800$ — si on l'exprime en termes de y, on a

$x = 1\,800 - 2y$

Donc :

$A = (1800 - 2y)y$

$A = 1800y - 2y^2$ cherche le MAX de A :

$$\frac{dA}{dy} = 1\,800 - 4y \text{ ; valeur critique : } y_1 = 450$$

$$\frac{d^2A}{dy^2} = -4 \text{ donc } < 0$$

Pour y1 = 450, on a

$$\frac{dA}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2A}{dy^2} < 0$$

$x + 2(450) = 1800$

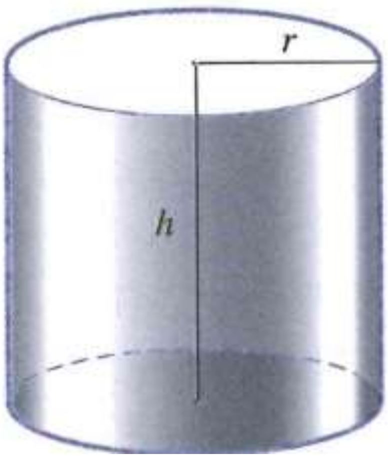
$x = 900$

Donc, on a un MAX relatif en $y_1 = 450$ et les deux dimensions cherchées sont une largeur de 450 m et une longueur de 900 m.

Le contexte limite de toute évidence la variable indépendante y à l'intervalle $[0, 900]$. Il est clair que la fonction A n'atteint pas son maximum aux extrémités de cet intervalle. Ainsi, le MAX relatif trouvé est le MAX absolu.

Exemple 3 :
Un fabricant de produits alimentaires veut mettre sur le marché un jus de pomme vitaminé. Il envisage de le mettre dans des boites de conserve cylindriques de 1 000 cm^3. Quelles doivent être les dimensions de la boîte pour qu'il utilise le moins de métal possible ?

Solution :



Les variables sont :
- le rayon de la base du cylindre, r;
- la hauteur du cylindre, h;
- la surface du cylindre, y incluant les extrémités, A.

Le volume, V, est une constante : V = 1000.
On a :

$$V = \pi r^2 h \qquad \text{et} \qquad A = \text{extrémités} + \text{surface latérale}$$
$$1000 = \pi r^2 h \qquad\qquad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad\qquad A = 2\pi r(r+h)$$

A est la variable à minimiser ; exprimons-la en termes de r :
Cherche le MIN de A :

$$A = 2\pi r\left(r + \frac{1000}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2\,000}{r} \qquad\qquad \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2\,000}{r^2}$$

Valeur critique :

$$4\pi r - \frac{2\,000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2\,000}{4\pi} \Rightarrow r_1 \approx 5{,}42$$

$$\frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4\,000}{r^3}; \qquad \left[\frac{d^2A}{dr^2}\right]_{r=5,42} = 4\pi + \frac{4\,000}{(5{,}42)^3} > 0$$

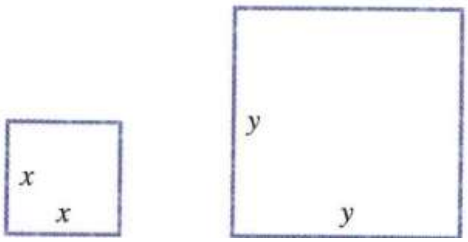
Donc, on a un MIN relatif en r1 = 5,42. À ce moment, on a :

$$h_1 = \frac{1000}{\pi r_1^2} = \frac{1000}{\pi(5{,}42)^2} \approx 10{,}83$$

Les dimensions idéales de la boîte de conserve sont de 5,42 cm pour le rayon de la base de 10,83 cm de hauteur. Comme dans l'exemple précédent, une analyse du contexte nous assure qu'il s'agit bien là de la solution cherchée.

Exemple 4 :
Deux citadins ont acheté une clôture à jardin de 135 m de longueur. Ils désirent la couper en deux de façon à ce que chaque partie permette de former un carré pouvant limiter un potager. Ou doit-on couper la clôture pour que la somme des surfaces soit maximale ?

Solution :



Les variables sont :
- le côté du premier carré, x;
- le côté du second carré, y;
- la somme des surfaces des deux carrés. A.

On a :

$$A = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad 4x + 4y = 135 \qquad \text{ou} \qquad y = \frac{135}{4} - x$$

A est la variable à maximiser. Exprimons-la en termes de x :
Cherche le MAX de A

$$A = x^2 + \left(\frac{135}{4} - x\right)^2 = x^2 + \frac{18\,225}{16} - \frac{135x}{2} + x^2$$
$$= 2x^2 - \frac{135x}{2} + \frac{18\,225}{16}$$

$$\frac{dA}{dx} = 4x - \frac{135}{2} \text{ ; valeur critique : } x_1 = \frac{135}{8}$$
$$\frac{d^2A}{dx^2} = 4 \text{ donc } > 0$$

Pour $x_1 = 135/8$, on a $dA/dx = 0$ et $d^2A/dx^2 > 0$. On a donc un MIN relatif en ce point. Or, c'est un MAX que nous cherchons.

Revenons à la fonction

$$A(x) = 2x^2 - \frac{135x}{2} + \frac{18\,225}{16}$$

Le contexte physique fait en sorte que la variable x est limitée à l'intervalle $\lfloor 0, 135/4 \rfloor$. Dans cet intervalle, on n'a pas de maximum relatif. Trouvons le MAX absolu :

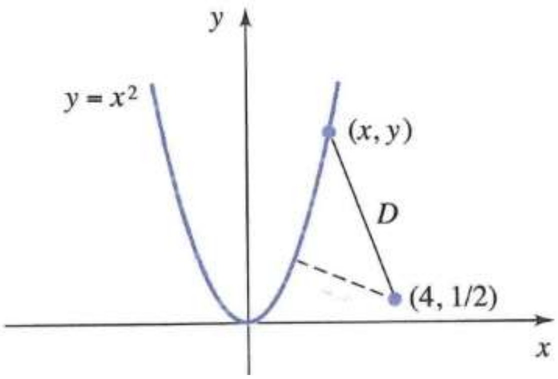
$$A(0) = \frac{18\,225}{16}; \quad A(135/4) = \frac{18\,225}{16}; \quad A(135/8) = \frac{18\,225}{32}$$

(*c'est ici un minimum relatif*)

Donc, le MAX absolu se retrouve aux extrémités de l'intervalle, c'est-à-dire quand $x = 0$ ou quand $x = 135/4$, donc si on ne coupe pas la clôture. En somme, il est préférable pour nos deux citadins de ne pas couper la clôture, c'est-à-dire de continuer leur collaboration et de ne faire qu'un jardin potager.

Exemple 5 :
Trouver la distance minimale entre la parabole $y = x^2$ et le point (4, 1/2).

Solution :



Les variables sont :
- l'abscisse d'un point sur la parabole, x;
- l'ordonnée de ce point, y;
- la distance entre ce point et le point $(4, 1/2)$, D.

On a :

$$y = x^2 \qquad \text{et} \qquad D = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1/2)^2}$$

D est la variable à minimiser ; exprimons-la en termes de x :

$$D = \sqrt{(x-4)^2 + (x^2-1/2)^2}$$

Cherche le minimum de D :

$$\frac{dD}{dx} = \frac{2(x-4) + 2(x^2-1/2)2x}{2\sqrt{(x-4)^2 + (x^2-1/2)^2}} = \frac{4x^3 - 8}{2\sqrt{(x-4)^2 + (x^2-1/2)^2}}$$

Valeur critique : $4x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 2$ d'où $x_1 \approx 1{,}26$

Compte tenu de la lourdeur de l'expression de la dérivée seconde $\dfrac{d^2D}{dx^2}$,
il est plus simple ici d'utiliser le test de la dérivée première pour déterminer si en cette valeur critique x_1 on a un MIN ou un MAX relatif.

x		$\sqrt[3]{2}$	
$\frac{dD}{dx}$	$-$	0	$+$
D	↘	MIN rel.	↗

on conclut qu'on a un MIN relatif quand $x_1 = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. La distance minimale D est alors de 2,95. Le contexte indique clairement que c'est un minimum absolu.

Exemple 6 :

Un pomiculteur a fait l'essai la saison dernière, d'un nouvel engrais liquide. Il a vérifié expérimentalement que le nombre de pommes produites par un arbre dépend de la quantité d'engrais utilisée sur cet arbre selon la fonction

$$P = 140 + 27x - \frac{x^3}{4}$$

où P représente le nombre de pommes cueillies dans un arbre et x le nombre de litres d'engrais utilisés sur cet arbre. Quelle quantité d'engrais devrait-il utiliser sur chacun de ses arbres s'il veut obtenir une production maximale ?

Solution :

Les variables sont x et P et P est la variable à maximiser. Cherchons le maximum de P :

$$\frac{dP}{dx} = 27 - \frac{3x^2}{4}$$

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{3x^2}{4} = 27$$

Valeurs critiques : $x_1 = 6$ et $x_2 = -6$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{-6x}{4}$$

Pour $x_1 = 6$, on a $\frac{dP}{dx} = 0$ et $\frac{d^2P}{dx^2} < 0$.

Donc, il s'agit là d'un MAX relatif.

Pour $x_2 = -6$, on a :

$$\frac{dP}{dx} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2P}{dx^2} > 0.$$

Il s'agit donc d'un MIN relatif. Toutefois, le contexte limite de façon évidente la variable x à l'intervalle $[0, \infty[$. Si $x = 0$, $P = 140$; si $x = 6$, $P = 248$ et si $x \to \infty$ alors $P \to -\infty$. Donc, la solution optimale consiste à utiliser 6 litres d'engrais par arbre afin d'obtenir une production maximale.

Unité : Les Taux

N'oubliez pas la dérivée d'une fonction peut s'interpréter de trois façons :
- La pente de la tangente en un point de la courbe ;
- Le taux de variation instantané de la fonction ;
- La vitesse instantanée.

Supposons que nous avons deux variables x et y reliées par un lien fonctionnel $y = f(x)$. Supposons de plus que nous connaissons le taux de variation de la variable x par rapport au temps, soit $\frac{dx}{dt}$. Il est alors facile de trouver le taux de variation de y par rapport à t, soit $\frac{dy}{dt}$.

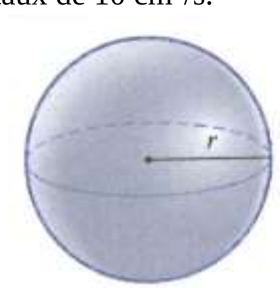
Il suffit d'utiliser la règle de dérivation en chaîne :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

On constate donc que les deux taux de variation $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ sont liés et qu'ainsi, si on connaît un des deux, on est en mesure de trouver l'autre.

Résolutions de problème :
1) Bien lire le problème.
2) Identifier les variables et les taux donnés et faire un schéma (s'il y a lieu).
3) Traduire les données en termes mathématiques.
4) Trouver le lien entre les variables.
5) Effectuer les calculs requis (dérivées)
6) Répondre à la question posée.

Exemple 1 :
On a une machine permettant d'insuffler du gaz dans un ballon sphérique au taux de 10 cm^3/s. Trouver le taux d'accroissement du rayon quand celui-ci est de 4cm.



Solution :
On relit le problème.
Les variables sont :
- Le volume de la sphère, V;
- Le rayon de la sphère, r;
- Le temps, t.

On a le taux de variation du volume par rapport au temps et on cherche le taux de variation du rayon. On a donc :

$\frac{dV}{dt} = 10$ et on demande $\frac{dr}{dt}$ quand r = 4

Il faut maintenant trouver le lien entre les variables V et r, c'est- à-dire le lien entre le volume d'une sphère et son rayon.

Ce lien nous est donné par la formule de géométrie bien comme :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Dérivons par rapport à t pour trouver le lien entre les dérivées.

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$$

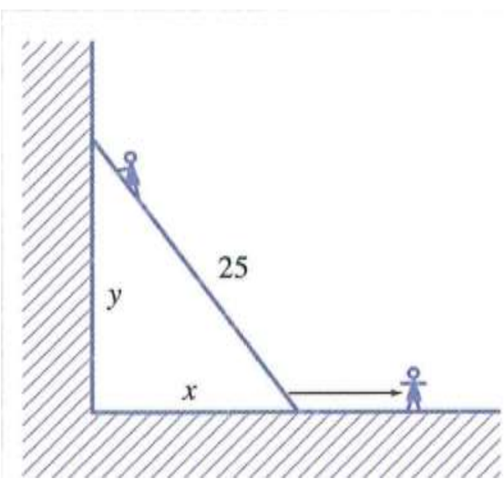
$$\frac{dr}{dt} = \frac{10}{4\pi r^2} = \frac{5}{2\pi r^2}$$

$$\left[\frac{dr}{dt}\right]_{r=4} = \frac{5}{2\pi \times 4^2} = \frac{5}{32\pi} = 0{,}0497$$

Donc, le rayon croît au taux de 0,0497 cm/s à ce moment.

Exemple 2 :
Un homme se tient d'une échelle de 25 mètres de longueur, appuyée contre un mur. Un farceur passant par là tire le pied de l'échelle en l'éloignant du mur à une vitesse de 2 m/s À quelle vitesse l'homme descend-il quand le pied de l'échelle est à 7 m du mur ?

Solution :



Les variables sont :
- La distance horizontale entre le pied de l'échelle et le mur, x;
- La distance verticale entre le haut de l'échelle et le sol, y;
- Le temps, t.

On a dx/dt = 2; on cherche dy/dt quand x = 7. Le lien entre les variables est :
$x^2 + y^2 = 25^2$

Dérivons par rapport à t :

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y} \times \frac{dx}{dt} = \frac{-2x}{y}$$

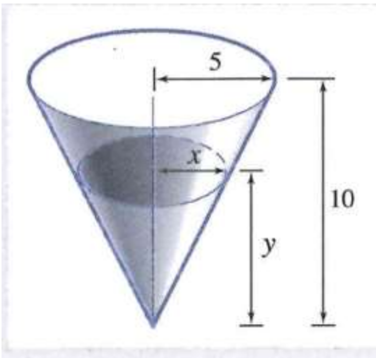
Si x = 7, alors, $y^2 = 25^2 - 7^2$
y = 24

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{x=7} = \frac{-14}{24} = \frac{-7}{12}$$

Donc, l'échelle descend (signe négatif) à une vitesse de 7/12 m/s.

Exemple 3 :
Un cône renversé a 10 m de diamètre et 10 m de profondeur. On y verse de l'essence au taux de 0,5 m^3/s. À quelle vitesse le niveau de l'essence monte-t-il quand le niveau est à 5 m de la base ?

Solution :



Les variables sont :

- Le rayon à la surface du liquide, x;
- La hauteur du liquide, y;
- Le volume du liquide, V;
- Le temps, t.

Volume cône = $\frac{1}{3}\pi r^2$

On a $dV/dt = 0,5$; on cherche dy/dt quand $y = 5$. Les liens entre les variables sont :

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \Rightarrow x = \frac{y}{2} \qquad \text{et} \qquad V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Si on relie ces deux équations, on a :

$$V = \frac{1}{3}\pi(y/2)^2 \times y = \frac{\pi y^3}{12}$$

Dérivons par rapport à t :

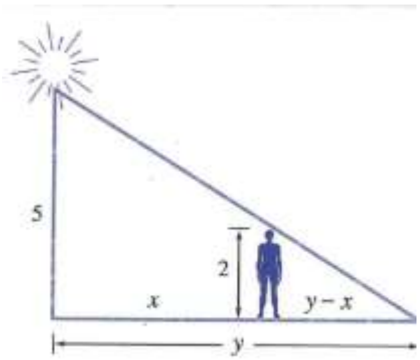
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \times 3y^2 \frac{dy}{dt} \qquad \text{donc,} \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2}\frac{dV}{dt}$$

$$\left[\frac{dy}{dt}\right]_{y=5} = \frac{4}{25\pi} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{25\pi} = 0,025\,\text{m/s}$$

Donc, le niveau de l'essence monte au taux de 0,025 m/s.

Exemple 4 :

Dans le Vieux Québec, par une belle nuit d'été, un visiteur venant de la planète aux douze soleils se tient à un lampadaire dont la lumière est située à 5 mètres du sol. Notre ami, qui mesure 2 mètres, s'éloigne du lampadaire; il voit alors l'extrémité de son ombrage et veut l'attraper. Évidemment, c'est peine perdue. S'il arrive à courir à une vitesse de 2 m/s, aidons-le trouver la vitesse à laquelle l'extrémité de l'ombre s'éloigne du lampadaire.



Solution :

Les variables sont :

- La distance entre notre ami et le lampadaire, x;
- La distance entre le lampadaire et l'extrémité de l'ombre, y;
- Le temps, t.

On a dx/dt = 2; on cherche dy/dt. Le lien entre les variables est :

$$\frac{y-x}{2}=\frac{y}{5}$$

$$\begin{aligned} 5y-5x &= 2y \\ 3y &= 5x \\ y &= \frac{5x}{3} \end{aligned}$$

Dérivons par rapport à t :

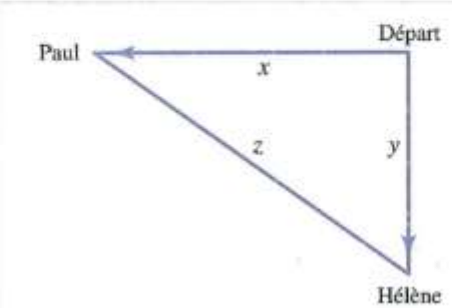
$$\frac{dy}{dt}=\frac{5}{3}\times\frac{dx}{dt}=\frac{5}{3}\times 2=\frac{10}{3}=3{,}33\ \text{ m/s}$$

Il s'agit d'expliquer à notre ami que son ombre avance plus vite que lui, soit à une vitesse de 3,33 m/s.

Exemple 5 :

Deux amoureux doivent se séparer. Ils partent en voiture et quittent Québec ensemble. À la sortie sud du pont Laporte, Paul emprunte la direction ouest et file à 100 km/h. Hélène se dirige vers le sud à 80 km/h. Au bout d'une heure, ils s'ennuient déjà; pour passer le temps, ils calculent à quelle vitesse ils s'éloignent l'un de l'autre à ce moment précis. Quelle est cette vitesse d'éloignement ?

Solution :



Les variables sont :
- la distance entre Paul et le point de départ, x;
- la distance entre Hélène et le point de départ, y;
- la distance entre Paul et Hélène, z;
- le temps, t.

On a $dx/dt = 100$ et $dy/dt = 80$; on cherche dz/dt quand $x = 100$ et $y = 80$. Le lien entre les variables est

$$z^2 = x^2 + y^2$$

On veut maintenant évaluer cette vitesse quand $x = 100$, $y = 80$.

Alors,

$$z = \sqrt{100^2 + 80^2}$$

c'est-à-dire

$$z = 128{,}062$$

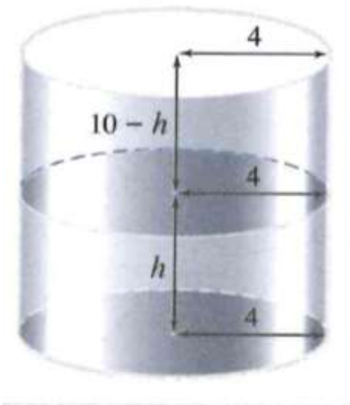
$$\left[\frac{dz}{dt}\right]_{\substack{x=100\\y=80}} = \frac{100 \times 100 + 80 \times 80}{128{,}062} = 128{,}062$$

Ils s'éloignent à une vitesse de 128 km/h.

Exemple 6 :

Le réservoir d'eau de la ville a la forme d'un cylindre de 4 m de rayon et de 10 m de hauteur. On y a découvert une fuite et on a mesuré qu'on perdait 1,4 m^3 d'eau à l'heure. À quelle vitesse le niveau de l'eau descend-il et, supposant le réservoir plein au départ, dans combien de temps sera-t-il vide ?

Solution :



Les variables sont :

- la hauteur de l'eau, h;
- le volume d'eau, V;
- le temps, t.

On a $\dfrac{dV}{dt} = -1{,}4$ et on cherche $\dfrac{dh}{dt}$

Notons bien que le volume diminue, c'est-à-dire que V est décroissant ce qui explique que sa dérivée soit négative.

Le lien entre les variables nous est donné par la formule donnant le volume d'un cylindre.

$$V = \pi 4^2 h = 16\pi h$$

Dérivons par rapport à t :

$$\frac{dV}{dt} = 16\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{16\pi}\frac{dV}{dt} = \frac{-1{,}4}{16\pi} = -0{,}028 \text{ m/h}$$

Donc, le niveau de l'eau descend à une vitesse de 0,028 m/h et ainsi il faudra $\dfrac{10}{0{,}028} = 357$ heures pour vider le réservoir.

Unité : Les Intégrales

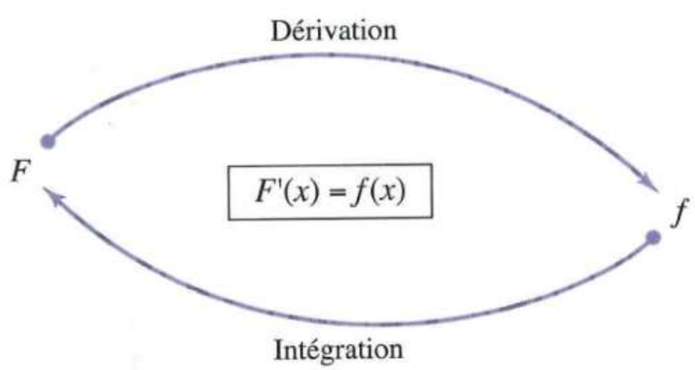
Leçon 1 : Ce que c'est

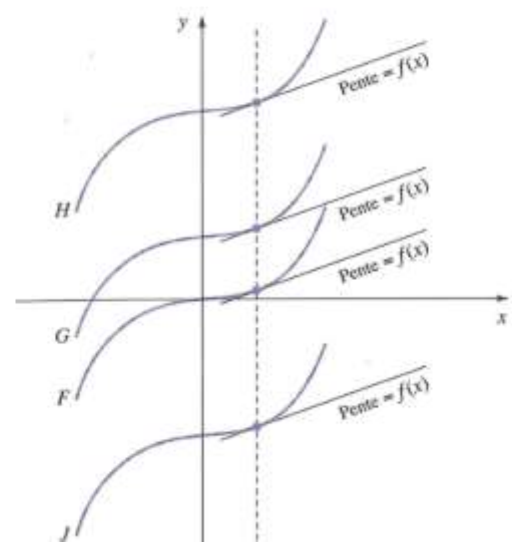
A) Introduction

Il y a deux types d'intégrales

<u>Intégrales indéfinies et intégrales définies</u>

En calcul différentiel, l'opération mathématique principale consiste à trouver la fonction dérivée d'une fonction donnée. Par exemple, si on connaît la fonction qui décrit le déplacement y d'un objet en fonction du temps t, c'est-à-dire si on connaît la fonction $y = f(t)$, on peut trouver la vitesse de cet objet en calculant sa dérivée dy/dt. Dans beaucoup de phénomènes naturels, le problème se pose en sens inverse. En effet, ce qu'on observe et qu'on peut quantifier, c'est la variation d'une variable, c'est-à-dire son taux de variation ou sa dérivée. À partir de cette dérivée, on voudra remonter à la fonction primitive. On dit alors qu'on intègre. L'opération qui consiste à trouver la dérivée d'une fonction donnée s'appelle la *dérivation*. L'opération inverse qui consiste à trouver une fonction dont on connaît la dérivée s'appelle l'*intégration*. Au chapitre 4, nous donnerons un autre sens au mot « intégration » et nous verrons que ces deux sens sont intimement liés par le théorème fondamental du calcul intégral. Schématisons :





Primitive et intégrale indéfinie

Considérons une fonction y = f(x). S'il existe une fonction y = F(x) telle que F'(x) = f(x), alors la fonction F s'appelle une primitive de f.

Exemple :
Si on considère la fonction $f(x) = 3x^2$,
alors la fonction $F(x) = x^3$ est une primitive de f(x) puisque $F'(x) = 3x^2$.

Il est clair que les fonctions $G(x) = x^3 + 1/2$, $H(x) = x^3 + \sqrt{2}$, $J(x) = x^3 - 1$ et en fait une infinité d'autres fonctions de x ont cette même dérivée, soit $3x^2$.
Toutes ces fonctions ont un caractère commun : elles sont toutes de la forme $x^3 + K$ ou K est une constante quelconque.

En effet, toutes les primitives d'une même fonction f(x) sont égales, à une constante près. Ainsi, elles ont, en tout point, la même dérivée, de sorte qu'elles ont exactement la même forme. Elles ne diffèrent que par une translation verticale.

Toutes les primitives d'une fonction f(x) dans une même famille de fonctions qui auront toutes la forme F(x) + K. (Ex : $x^3 + 4$) On appelle intégrale indéfinie de f(x) la famille de fonctions de la forme F(x) + K ou F(x) est une primitive de f(x) et K un constant arbitraire.

Nous utiliserons la notation suivante :

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

Se lit : « l'intégrale de f de x dx est égale à grand F de x plus K ».

- $\int$ est le *signe d'intégration*; il indique notre intention de trouver une intégrale indéfinie.
- $f(x)$ est la *fonction à intégrer* ou l'*intégrande*.
- dx est l'*élément différentiel*; il indique par rapport à quelle variable on intègre. L'utilisation de la notation différentielle s'avérera très commode dans la technique d'intégration.
- $F(x)$ est une *primitive* de $f(x)$; essentiellement, c'est cette fonction que nous devons trouver.
- K est une constante arbitraire dite *constante d'intégration*.

Exemple : Trouve les primitives.

$y = 5x^2$	$y' = 10x$
	$y' = 15$
	$y' = -12x$
	$y' = 3x^2$
	$y' = x^2$
	$y' = x^3$
	$y' = -8x^3$
	$y' = 1/2x^{-1/2}$
	$y' = x^{1/2}$
	$y' = x^{-2}$
	$y' = 3x^{11}$
	$y' = 0$
	$y' = 5x^4$
	$y'\ 4x^5$
	$y' = \frac{2}{3}x^2$
	$y' = 8x^{-3}$

Exemple 1 : Trouve $\int 3x^2dx$

Solution :

$$\int \boldsymbol{3x^2dx = \ x^3 + K}$$

Exemple 2 : Trouve $\int cosxdx$
Solution :

$$\int cosxdx = sinx + K$$

En effet,
y = sinx
alors y' = cosx
Aussi écrit sous forme : d(sinx + K) = cosxdx

Exemple 3 : Trouve $\int \boldsymbol{(4x^3 + x + 1)dx}$
Solution :

$$\int \boldsymbol{(4x^3 + x + 1)dx = \ x^4 + \frac{x^2}{2} + x + K}$$

En effet, car d($x^4 + \frac{x^2}{2} + x + K$) = $\boldsymbol{(4x^3 + x + 1)dx}$

Fonctions Intégrables

Lorsqu'une fonction f(x) possède une intégrale indéfinie F(x) + K, on dit que la fonction f(x) est intégrable.
Est-ce que toutes les fonctions sont intégrables ? Non!

Exemples qui sont intégrables :

$$\int \sqrt{1+x^4}\,dx \quad , \quad \int e^{-x^2}\,dx \quad , \quad \int \sin x^2 dx \quad , \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx \quad ,$$

$$\int \frac{\cos x}{x}\,dx \quad , \quad \int \frac{e^x}{x}\,dx \quad , \quad \int \frac{dx}{\ln x} \quad \text{et} \quad \int \ln(\ln x)\,dx$$

Propriétés de l'intégrale indéfinie

Les règles :

Ici u et v désignent des fonctions de x.
« u » représente toujours une fonction de x, a une constante positive, n un nombre réel quelconque et K la constante d'intégration.

B) Les Formules et Exemple

Règle 1	$\int du = u + K$	
Règle 2	$\int k\, u\, dx = k \int u\, dx$	où k est une constante quelconque
Règle 3	$\int (u+v)dx = \int u\, dx + \int v\, dx$	

Formule 1	$\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + K$	où $n \neq -1$
Formule 2	$\int \dfrac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + K$	
Formule 3	$\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + K$	où $a \neq 1$
Formule 4	$\int e^u du = e^u + K$	
Formule 5	$\int \sin u\, du = -\cos u + K$	
Formule 6	$\int \cos u\, du = \sin u + K$	

Formule 7	$\int \tan u\, du = \ln\lvert\sec u\rvert + K$
Formule 8	$\int \cot u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + K$
Formule 9	$\int \sec u\, du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + K$
Formule 10	$\int \operatorname{cosec} u\, du = \ln\lvert\operatorname{cosec} u - \cot u\rvert + K$
Formule 11	$\int \sec^2 u\, du = \tan u + K$
Formule 12	$\int \operatorname{cosec}^2 u\, du = -\cot u + K$
Formule 13	$\int \sec u \tan u\, du = \sec u + K$
Formule 14	$\int \operatorname{cosec} u \cot u\, du = -\operatorname{cosec} u + K$

Exemple 4 : Trouve $\int d(tanx)$

Solution :

$$\int d(tanx) = tanx + K$$

Exemple 5 : Trouve $\int sec^2xdx$

Solution :

$$\int sec^2xdx = \int d(tanx) = tanx + K$$

Exemple 6 : Trouve $\int 5e^x dx$

Solution : $\int 5e^x dx = 5\int e^x dx = 5(e^x + K_1)$

$5e^x + K \quad (ou\ K = 5k_{1)}$

Exemple 7 : Trouve $\int (3x^2 + cosx + \ e^x)\ dx$

Solution :

$$\int (3x^2 + cosx + \ e^x)\ dx = \int 3x^2\ dx + \int cosx\ dx + \int e^x\ dx$$

$= x^3 + K1 + sinx + K2 + e^x + K3$

$= x^3 + sinx + e^x + K$

Exemple

a) $\int x^8 dx$ b) $\int \sqrt{x}\, dx$ c) $\int \frac{dx}{x^3} dx$

Solution :

a) Selon la formule 1 : $\int x^8 dx = \frac{x^{8+1}}{8+1} + K = \frac{x^9}{9} + K$

b) La formule 1 s'applique même lorsque n est une fraction.

$$\int \sqrt{x}\ dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + K = \frac{2}{3}x^{3/2} + K = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + K$$

c) La formule 1 s'applique même lorsque n est négatif (sauf lorsque $n = -1$).

$$\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + K = \frac{-1}{2x^2} + K$$

Exemple :

Trouver $\int (3x^5 - 2x^2 + 7x - 4)\, dx$

Solution :

$$\int (3x^5 - 2x^2 + 7x - 4)\, dx = 3\int x^5 dx - 2\int x^2 dx + 7\int x\, dx - 4\int dx$$

$$= \frac{3x^6}{6} - \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 4x + K$$

$$= \frac{x^6}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 4x + K$$

Intégration des puissances, des exponentielles et des fonctions trigonométriques

Exemple :

Trouver a) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$

b) $\int (5^x - 3\sin x)\, dx$

Solution :

a) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx = \int \frac{dx}{x} + \int x^{-2} dx = \ln |x| + \frac{x^{-1}}{-1} + K = \ln |x| - \frac{1}{x} + K$

b) $\int (5^x - 3\sin x)\, dx = \int 5^x dx - 3\int \sin x\, dx = \frac{5^x}{\ln 5} - 3(-\cos x) + K = \frac{5^x}{\ln 5} + 3\cos x + K$

Dans la formule 2 (il en sera de même dans toutes les formules où l'on retrouve des logarithmes dans la primitive), on remarque la présence d'une valeur absolue. Cela peut nous sembler embarrassant et inutilement compliqué. C'est cependant nécessaire. Voici pourquoi. Rappelons la définition de la valeur absolue de u :

$$|u| = \begin{cases} u & \text{si } u \geq 0 \\ -u & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

La valeur absolue de u est donc une notation utilisée pour représenter deux situations, celle où $u > 0$ et celle où $u < 0$. Dans la formule 2, détachons les deux fonctions en présence, soit la fonction à intégrer $f(u) = 1/u$ et la primitive $F(u) = \ln |u|$. On sait qu'une fonction logarithme n'est définie que pour des valeurs positives de l'argument. Or, la fonction à intégrer $1/u$ peut très bien être négative. Considérons les deux cas possibles selon le signe de u.

1. Si $u > 0$, alors $d(\ln u) = \frac{1}{u}\, du = \frac{du}{u}$
2. Si $u < 0$, il faut considérer ln $(-u)$. Alors, $d(\ln(-u)) = \frac{1}{-u}\, d(-u) = \frac{-du}{-u} = \frac{du}{u}$

Donc, la fonction

$$F(u) = \begin{cases} \ln u & \text{si } u > 0 \\ \ln(-u) & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

a pour différentielle du/u quel que soit le signe de u. Pour simplifier l'écriture de la fonction primitive $F(u)$, on note simplement $\ln|u|$.

Exemple :

Trouver $\int \frac{x^4 + 5x + 1}{3x^2}\, dx$

Les fonctions à intégrer ne sont pas toujours exactement de la même forme que les formules de base. Il faut parfois faire des transformations algébriques avant de reconnaître l'une ou l'autre de ces formules.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 + 5x + 1}{3x^2}\, dx &= \int \left(\frac{x^4}{3x^2} + \frac{5x}{3x^2} + \frac{1}{3x^2} \right) dx \\
&= \frac{1}{3}\int x^2 dx + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{5}{3}(\ln|x|) + \frac{1}{3}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + K \\
&= \frac{x^3}{9} + \frac{5}{3}\ln|x| - \frac{1}{3x} + K
\end{aligned}$$

Leçon 2 : Changement de variable

Considérons l'intégrale indéfinie suivante.

$$\int cosx\ dx$$

Selon la formule 6, le résultat est sinx + K. Vérifie le en faisant la dérivée de sinx + K.

d(sinx + K) = cosx dx

La fonction à intégrer est cosx.

$$\int cos2x\ dx$$

Supposons que la famille de sin2x + K est la solution, c'est inexact!!!

d(sin2x + K) = 2cos2xdx

Alors

$$\int \cos 2x\ dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)(2)\cos 2x\ dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\ dx = \frac{1}{2}(\sin 2x + K_1) = \frac{\sin 2x}{2} + K$$

$$\int cosx^2\ dx$$

$\sin x^2$ est inexact!!

$$d(\sin x^2 + K) = (2x)\cos x^2 + K$$

On ne peut pas utiliser la formule 6, cette intégrale est impossible à trouver!

A) Les Substitutions d'une variable :

Exemple :

Trouver $\int xe^{x^2+1}dx$

Solution :

En regardant attentivement cette intégrale indéfinie, on peut penser l'amener vers la formule 4. Pour ce faire, faisons le changement de variable suivant.

Posons $u = x^2+1$; alors $du = 2x\,dx$. Ainsi, $x\,dx = \frac{1}{2}du$

Réécrivons maintenant l'intégrale avec la variable u :

$$\int xe^{x^2+1}dx = \int e^{x^2+1}(x\,dx) = \int e^u\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int e^u du$$

Bien sûr, on applique la formule 4 :

$$= \frac{1}{2}(e^u + K_1) = \frac{e^u}{2} + K$$

et on revient à la variable originale x.

$$= \frac{e^{x^2+1}}{2} + K$$

Conditions pour effectuer une condition de variable

Le changement de variable est très fréquent et quasi indispensable dans bien des cas. Il est toutefois naturel de se demander dans quelles conditions il est permis de l'utiliser.

En fait, le changement de variable $x = g(u)$ est permis à la condition que g soit une fonction dérivable et qu'elle admette une fonction inverse dérivable $u = g^{-1}(x)$. Cette dernière condition est importante ; bien souvent, en pratique, on définit le changement de variable en posant $u = g^{-1}(x)$.

Démontrons que ces conditions sont requises pour effectuer un changement de variable dans une intégration. Soit à intégrer

$$\int f(x)\,dx$$

et supposons que l'on fasse le changement de variable $x = g(u)$ où g remplit les conditions énoncées au paragraphe précédent. Alors $dx = g'(u)\,du$, et on a :

$$\int f(g(u))g'(u)\,du$$

Supposons qu'on trouve une solution à cette intégrale, soit h(u) + k. Alors :

$$d(h(u)+K) = h'(u)\,du = h'(u)\times\frac{1}{g'(u)}\,dx$$

$$d(h(u)+K) = f(g(u))g'(u)\times\frac{1}{g'(u)}\,dx$$

$$d\,(h\,(u)+K) = f\,(g\,(u))\,dx$$

$$d\,(h\,(g^{-1}(x))+K) = f\,(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad h\,(g^{-1}(x))+K = \int f(x)\,dx$$

et ainsi, $h(g^{-1}(x)) + k$ est la solution cherchée.

Exemple 1 :

Trouver $\int\sqrt{4x-3}\,dx$

Solution :

Posons $u = 4x-3$; alors $du = 4\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{4}du$

Ainsi :

$$\int\sqrt{4x-3}\,dx = \int\sqrt{u}\left(\frac{1}{4}du\right) = \frac{1}{4}\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{4}\int u^{1/2}du$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right)+K = \frac{1}{6}u^{3/2}+K = \frac{1}{6}(4x-3)^{3/2}+K$$

Exemple 2 :

Trouver $\int\frac{\cos x}{\sin^4 x}dx$

On peut ramener cette intégrale vers la formule 1 en faisant le changement de variable suivant.

Posons $u = \sin x$; alors $du = \cos x\,dx$.

Alors : $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^4 x} = \int\frac{du}{u^4} = \int u^{-4}du = \frac{u^{-3}}{-3}+K = \frac{-1}{3u^3}+K = \frac{-1}{3\sin^3 x}+K$

Exemple 3 :

Trouver $\int (x^3+5)^3 x^2 dx$

Solution :

En observant attentivement la fonction à intégrer, on constate que l'expression entre parenthèses a pour dérivée $3x^2$, ce qu'on retrouve presque dans le reste de la fonction à intégrer, puisqu'il n'y manque que le facteur 3. On peut facilement suppléer à l'absence d'une constante.

Posons $u = x^3 + 5$; alors $du = 3x^2\, dx \quad \Rightarrow \quad x^2 dx = \frac{1}{3} du$.

Alors : $\int (x^3+5)^3 x^2 dx = \int u^3 \left(\frac{1}{3} du\right) = \frac{1}{3}\int u^3 du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^4}{4}\right) + K = \frac{u^4}{12} + K = \frac{(x^3+5)^4}{12} + K$

Exemple 4 :

Trouver $\int (x^3+5)^3 x\, dx$

Solution :

On peut être tenté ici de faire le changement de variable $u = x^3 + 5$. Dans ce cas, $du = 3x^2\, dx$. Or, on ne retrouve pas cette expression dans le reste de la fonction à intégrer. Il y manque un facteur $3x$. On ne peut pas suppléer à l'absence d'une variable. Ce changement de variable $u = x^3 + 5$ ne conduit à rien et il faut donc changer de stratégie. Nous procédons plutôt en développant le binôme.

$$\begin{aligned}
\int (x^3+5)^3 x\, dx &= \int (x^9 + 15x^6 + 75x^3 + 125)x\, dx \\
&= \int (x^{10} + 15x^7 + 75x^4 + 125x)\, dx \\
&= \frac{x^{11}}{11} + \frac{15x^8}{8} + \frac{75x^5}{5} + \frac{125x^2}{2} + K \\
&= \frac{x^{11}}{11} + \frac{15x^8}{8} + 15x^5 + \frac{125x^2}{2} + K
\end{aligned}$$

Exemple 5 :

Trouver $\int \frac{dx}{2x+7}$

Solution

Posons $u = 2x + 7$; alors $du = 2\,dx \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \frac{dx}{2x+7} = \int \frac{(1/2)\,du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + K = \frac{1}{2}\ln|2x+7| + K$$

$$= \ln|2x+7|^{1/2} + \ln k = \ln k\sqrt{|2x+7|}$$

Exemple 6 :

Trouver $\int \frac{3x^2+3x+2}{x+1}dx$

Solution :

Pour se ramener aux formules 1 et 2, effectuons la division de ces polynômes.

$$\frac{3x^2+3x+2}{x+1} \equiv 3x + \frac{2}{x+1}$$

Alors : $\int \frac{3x^2+3x+2}{x+1}dx = \int\left(3x + \frac{2}{x+1}\right)dx = \int 3x\,dx + \int \frac{2\,dx}{x+1} = \frac{3x^2}{2} + 2\ln|x+1| + K$

Exemple 7 :

Trouver $\int \tan x \, dx$

Solution :

Nous allons procéder selon deux méthodes différentes.

Première méthode

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

Posons $u = \cos x$; alors $du = -\sin x \, dx \quad \Rightarrow \quad \sin x \, dx = -du$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + K = -\ln|\cos x| + K$$

Seconde méthode

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sec x \tan x}{\sec x} dx$$

Posons $u = \sec x$; alors $du = \sec x \tan x \, dx$.

$$\int \frac{\sec x \tan x}{\sec x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + K = \ln|\sec x| + K$$

L'apparente différence entre les deux réponses s'explique aisément. En effet, ce sont deux réponses équivalentes, comme le démontrent les transformations suivantes.

$$\ln|\sec x| = \ln|1/\cos x| = \ln|\cos x|^{-1} = -\ln|\cos x|$$

Exemple 8 :

Trouver $\int \sin x \cos x \, dx$

Solution :

Nous pouvons utiliser deux méthodes différentes.

Première méthode

Posons $u = \sin x$; alors $du = \cos x \, dx$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} + K = \frac{\sin^2 x}{2} + K$$

Seconde méthode

Posons $u = \cos x$; alors $du = -\sin x \, dx$ et $\sin x \, dx = -du$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \int \cos x \, (\sin x \, dx) = \int u \, (-du) = \frac{-u^2}{2} + K = \frac{-\cos^2 x}{2} + K$$

Ces deux réponses, en apparence fort différentes, se distinguent par une constante. En effet :

$$\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{1 - \cos^2 x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos^2 x}{2}$$

Exemple 9 :

Trouver a) $\int e^{x/2}dx$

b) $\int \sin 7x\, dx$

Solution :

a) Posons $u = \frac{x}{2}$; alors $du = \frac{dx}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = 2du$

$$\int e^{x/2}dx = \int e^{u}(2\,du) = 2\int e^{u}du = 2e^{u} + K = 2e^{x/2} + K$$

b) Posons $u = 7x$; alors $du = 7dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{7}du$

$$\int \sin 7x\, dx = \int \sin u\left(\frac{1}{7}du\right) = \frac{1}{7}\int \sin u\, du = \frac{1}{7}(-\cos u) + K = \frac{1}{7}(-\cos 7x) + K = \frac{-\cos 7x}{7} + K$$

Leçon 3 : Intégrale définie

Utilité du théorème fondamental

De toute évidence, le théorème fondamental du calcul intégral nous fournit un moyen d'évaluer une intégrale définie sans avoir recours au processus utilisé à l'exemple 4.7. De plus, nous verrons au chapitre 6 certains problèmes qui se ramènent à la recherche de la limite d'une somme infinie d'infiniment petits, c'est-à-dire à l'évaluation d'une intégrale définie, ce qui exige essentiellement, selon le théorème fondamental, la recherche d'une primitive.

A) Introduction :

11

Évaluer $\int_2^4 (x^2+3x+1)\,dx$

Solution

Selon le théorème fondamental :

$$\int_2^4 (x^2+3x+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x\right]_2^4 = \left(\frac{64}{3}+\frac{48}{2}+4\right)-\left(\frac{8}{3}+\frac{12}{2}+2\right)=\frac{116}{3}$$

4.12

Évaluer $\int_0^2 (x+1)\,e^x\,dx$

Solution

Trouvons d'abord l'intégrale indéfinie $\int (x+1)\,e^x dx$ en procédant par parties.

Posons $u = x+1$ et $dv = e^x\,dx$. Alors $du = dx$ et $v = e^x$.

$$\int (x+1)\,e^x dx = (x+1)\,e^x - \int e^x dx = (x+1)\,e^x - e^x + K = x\,e^x + K$$

Revenons à l'intégrale définie que nous évaluons grâce au théorème fondamental.

$$\int_0^2 (x+1)\,e^x\,dx = x\,e^x\Big|_0^2 = 2\,e^2 - 0\,e^0 = 2\,e^2 = 14{,}778$$

B) Application d'intégrale indéfinie

Exemple 1 :

Résoudre l'équation différentielle suivante.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x \, dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x \, dx$$

$$\frac{-1}{y} = \sin x + K$$

$$y = \frac{-1}{\sin x + K}$$

Exemple 2 :

La pente de la tangente en tout point d'une courbe est égale au produit des coordonnées de ce point. Trouver l'équation de cette courbe, sachant qu'elle passe par le point (2, 1).

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = x \, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x \, dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + K$$

$$y = e^{(x^2/2)+K}$$

$$1 = e^{(2^2/2)+K}$$

$$1 = e^{2+K}$$

$$\Rightarrow \quad 2 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = -2$$

$$y = e^{(x^2/2)-2}$$

Exemple 3 :

Sur la Terre, l'accélération causée par la force gravitationnelle est constante et vaut $-9{,}8\ m/s^2$. À partir du sol, on lance une balle vers le haut à une vitesse de 30 m/s. Quelle hauteur maximale cette balle atteindra-t-elle ?

$$v = \frac{dy}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Partant de

$$\frac{dv}{dt} = a = -9{,}8$$

on a :

$$dv = -9{,}8\ dt$$
$$v = -9{,}8\ t + K$$

Au départ (au sol), $t = 0$ et $v = 30$. Ainsi :

$$30 = -9{,}8\ (0) + K$$
$$\Rightarrow \quad K = 30$$
$$\Rightarrow \quad v = -9{,}8t + 30$$

Lorsque la balle atteindra sa hauteur maximale, la vitesse de la balle sera 0. Si $v = 0$, que vaut t ?

$$0 = -9{,}8t + 30$$
$$\Rightarrow \quad t = 3{,}061\ \text{s}$$

Pour trouver la hauteur atteinte par la balle après 3,061 s, considérons :

$$v = \frac{dy}{dt} = -9{,}8t + 30$$
$$dy = (-9{,}8t + 30)\ dt$$
$$y = -9{,}8\frac{t^2}{2} + 30t + K_1$$
$$y = -4{,}9\ t^2 + 30t + K_1$$

Au départ (au sol), $t = 0$ et $y = 0$. Ainsi :

$$0 = 4{,}9\ (0)^2 + 30\ (0) + K_1$$
$$\Rightarrow \quad K_1 = 0$$

Donc : $\quad y = -4{,}9\ t^2 + 30t$

Après 3,061 s, la hauteur maximale atteinte sera :

$$y_{max} = -4{,}9\ (3{,}061)^2 + 30\ (3{,}061)$$
$$y_{max} = 45{,}918\ \text{m}$$

Exemple 4 :

Une certaine substance placée dans une solution se décompose selon un taux qui, en tout temps, est proportionnel à la quantité de substance présente à cet instant. Si on a placé 100 g d'une telle substance dans une solution et que deux heures plus tard il en reste 30 g, combien en restera-t-il une heure plus tard ?

Soit Q la quantité de substance présente au temps t. Selon l'énoncé,

$$\frac{dQ}{dt} = kQ$$

où k est une constante de proportionnalité. Les conditions initiales sont : si $t = 0$, alors $Q = 100$ et si $t = 2$, alors $Q = 30$.

Procédons :

$$\frac{dQ}{Q} = k\,dt$$

$$\ln|Q| = k\,t + K_0$$

Note : Comme il est certain que $Q \geq 0$, il n'est pas utile de conserver la valeur absolue.

Poursuivons :

$$Q = e^{kt+K_0}$$

Selon une condition initiale, $Q = 100$ lorsque $t = 0$.

$$100 = e^{k(0)+K_0} = e^{K_0}$$

Donc : $$Q = e^{kt+K_0} = e^{kt}e^{K_0} = 100e^{kt}$$

Selon une autre condition initiale, $Q = 30$ lorsque $t = 2$.

$$30 = 100e^{k(2)}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2k} = \frac{30}{100} = 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad 2k = \ln 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\ln 0{,}3$$

Finalement, on trouve l'équation :

$$Q = 100e^{(t/2)\ln 0{,}3} = 100e^{\ln 0{,}3^{t/2}} = 100\,(0{,}3)^{t/2}$$

Pour répondre à la question posée, il suffit de faire $t = 3$.

$$Q\,(3) = 100\,(0{,}3)^{3/2} = 16{,}432 \text{ g}$$

Exemple 5 :

Un réservoir rempli initialement de 300 litres d'un mélange contient 10 kilogrammes de sel dissous. On y verse au taux constant de 5 litres par minute un mélange contenant 100 grammes de sel par litre de mélange. Le contenu du réservoir est gardé uniforme et on enlève 5 litres par minute. Déterminer la quantité de sel présente dans le réservoir après une heure.

Soit Q la quantité de sel (exprimée en kilogrammes) présente au temps t. Alors, le taux de variation de la quantité de sel est donné par :

$$\text{taux de variation} = (\text{ce qui entre}) - (\text{ce qui sort})$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{10} \times 5 - \frac{Q}{300} \times 5$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} - \frac{Q}{60} = \frac{30-Q}{60}$$

$$\frac{60\,dQ}{30-Q} = dt$$

$$60\int \frac{dQ}{30-Q} = \int dt$$

$$-60\ln|30-Q| = t + K$$

$$\ln|30-Q| = \frac{t+K}{-60}$$

$$30 - Q = e^{(-t-K)/60}$$

Note : On peut enlever la valeur absolue puisque, selon le contexte, il est clair que $Q < 30$, donc $30 - Q > 0$.

$$Q = 30 - e^{(-t-K)/60} = 30 - e^{-K/60}e^{-t/60}$$

Selon la condition initiale donnée dans l'énoncé, $Q = 10$ lorsque $t = 0$. Alors :

$$10 = 30 - e^{-K/60}e^{0}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-K/60} = 20$$

Enfin :

$$Q = 30 - 20e^{-t/60}$$

Pour déterminer la quantité de sel présent dans le réservoir après une heure, il suffit de faire $t = 60$:

$$Q(60) = 30 - 20e^{-60/60} = 30 - \frac{20}{e} = 22{,}642 \text{ kg}$$

Leçon 4 : L'aire sous/entre la/les courbe(s)

A) Introduction

La fonction y = f(x) est la dérivée de la fonction A(x).

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dA}{dx}$$

Disons que

$$\frac{dA}{dx} = 3x^2$$

Donc :

$$dA = 3x^2\ dx$$

En d'autres mots :

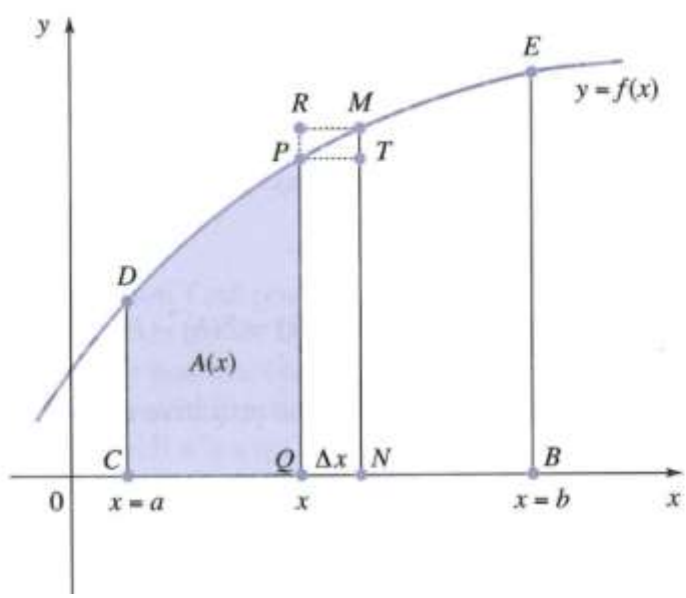
$$dA = f(x)\ dx$$

$$A = \int dA = \int f(x)\ dx = F(x) + K$$

F(x) est une primitive de la fonction y = f(x).

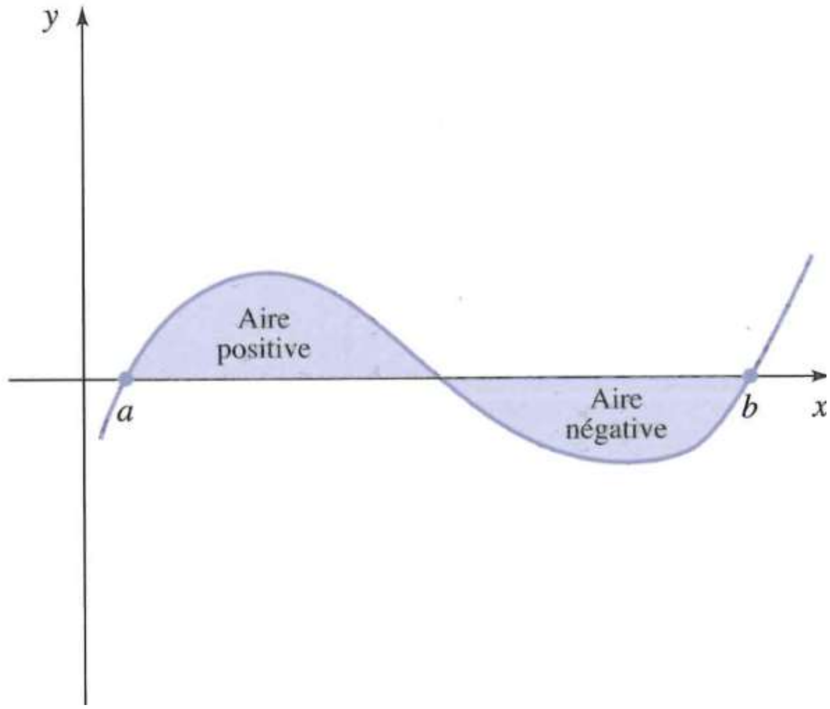
$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a)$$

Exemple :



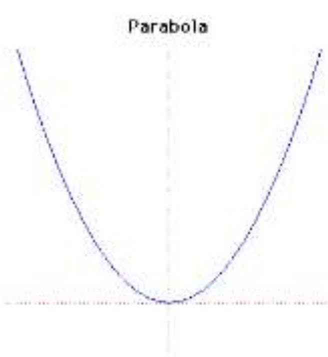
$$\text{Si } y = f(x) \geq 0 \quad \text{sur} \quad [a, b] \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$\text{Si } y = f(x) \leq 0 \quad \text{sur} \quad [a, b] \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$$



B) L'aire entre un courbe et l'axe des x.

Exemple 1 :
Trouve l'aire plane sous la parabole y = x^2 entre les verticales x = 0 et x = 1.



Solution :

On a f(x) = x^2. On trouve la primitive F(x) = $\frac{x^3}{3}$. L'aire cherchée A est donnée par :

$$A = \int_0^1 x^2 dx$$

$$A = F(1) + \cancel{K} - F(0) + \cancel{K}$$
$$A = \frac{(1)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

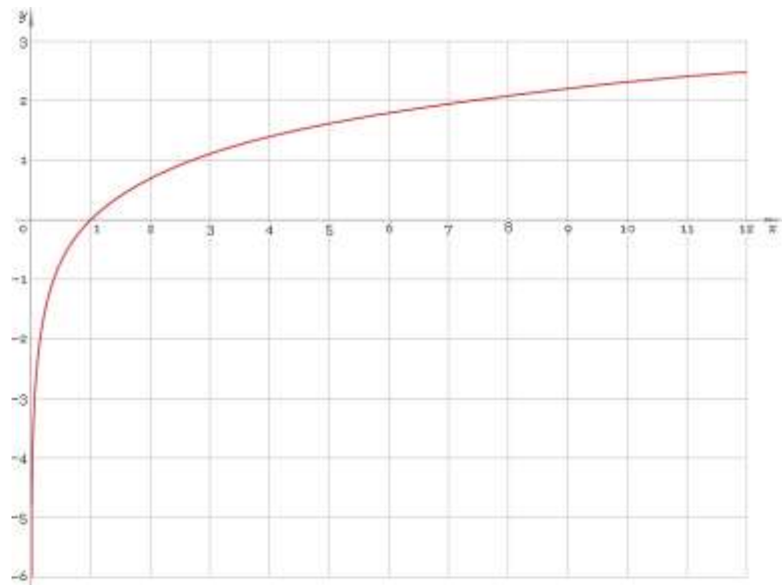
Exemple 2 :

Trouve l'aire plane sous la courbe de y = ln x entre les verticales x = 1 et x = 9

Solution :
f(x) = ln x

Primitive :
F(x) = xlnx – x grâce à une intégration par parties.

$A = \int_1^9 lnx\, dx$



A = F(9) – F(1)
A = (9ln9 – 9) – (1ln1 – 1)

**ln1 = 0

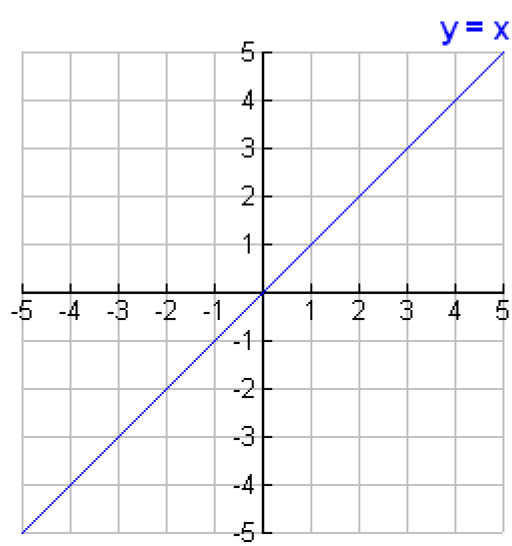
A = 9ln9 – 8
A = 11,775

Exemple 3 :
Trouve l'aire plane sous la courbe de y = x entre les verticales x = 1 et x = 5.
Aire = A

On a f(x) = x.
Primitive :
$F(x) = \frac{x^2}{2}$.

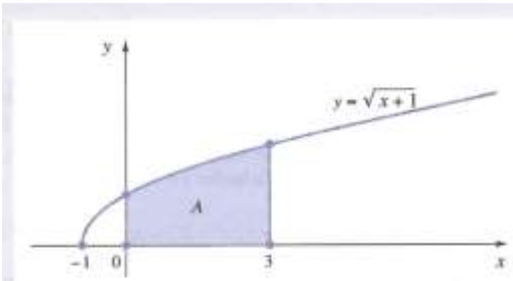
$A = F(5) – F(1) = \frac{(5)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}$

$A = \frac{25}{2} - \frac{1}{2} = 12$



Exemple 4 :

Trouve l'aire de la figure bornée par la courbe $y = \sqrt{x+1}$, l'axe des x, l'axe des y et la verticale x = 3



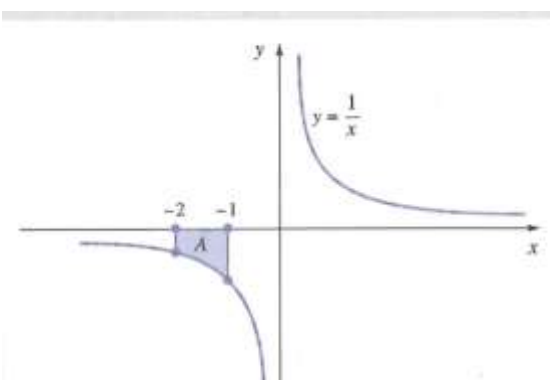
La fonction $y = \sqrt{x+1}$ est positive sur l'intervalle [0, 3]. L'aire cherchée A est donc donnée par l'intégrale définie

$$A = \int_0^3 \sqrt{x+1}dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \left[\frac{2}{3}(3+1)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{14}{3}$$

$$A = 4,\overline{\overline{6}}$$

Exemple 5 :

Trouve l'aire de la figure plane bornée par la courbe y = $\frac{1}{x}$, l'axe des x et les verticales x = -2 et x = -1.



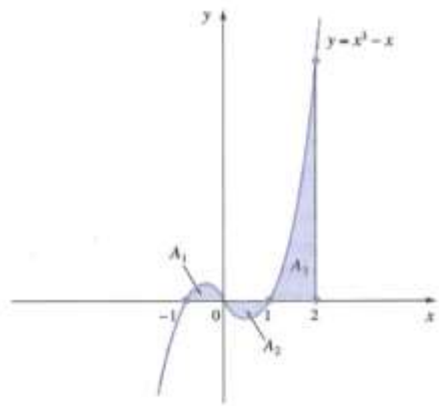
La fonction y = $\frac{1}{x}$ est négative sur l'intervalle $[-2, -1]$.

L'intégrale définie $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx$ mesure donc l'aire cherchée mais affectée d'un signe négatif. Ainsi :

$$A = -\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\, dx = -\left[\ln|x|\right]_{-2}^{-1} = -\left(\ln 1 - \ln 2\right) = \ln 2 = 0,693$$

Exemple 6 :

Trouve l'aire de la figure plane bornée par la courbe $y = x^3 - x$, l'axe des x et les verticales $x = -1$ et $x = 2$.



La fonction $y = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1)$

$x = -1$, 0 et 1

Elle est négative entre 0 et 1, positive entre -1 et 0 et entre 1 et 2.

Il y a donc 3 parties!

$$A_1 = \int_{-1}^{0} [(x^3 - x) - 0]dx$$

$$A_1 = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}\right] = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_{0}^{1} [0 - (x^3 - x)]dx$$

$$A_2 = -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -\left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2}\right] = -\left(-\frac{1}{4}\right) - 0 = \frac{1}{4}$$

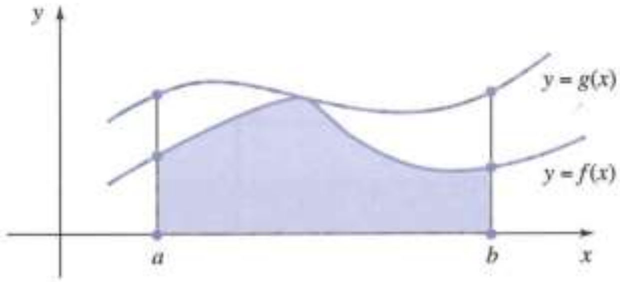
$$A_3 = \int_{1}^{2} [(x^3 - x) - 0]dx$$

$$A_3 = \left[\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2} - 0\right] = \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2}\right] - \left[\frac{1^4}{4} - \frac{1^2}{2}\right] = [4 - 2] - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right] = \frac{9}{4}$$

Alors, l'aire cherchée A est $A_1 + A_2 + A_3$

$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{4}$

C) L'aire entre deux courbes

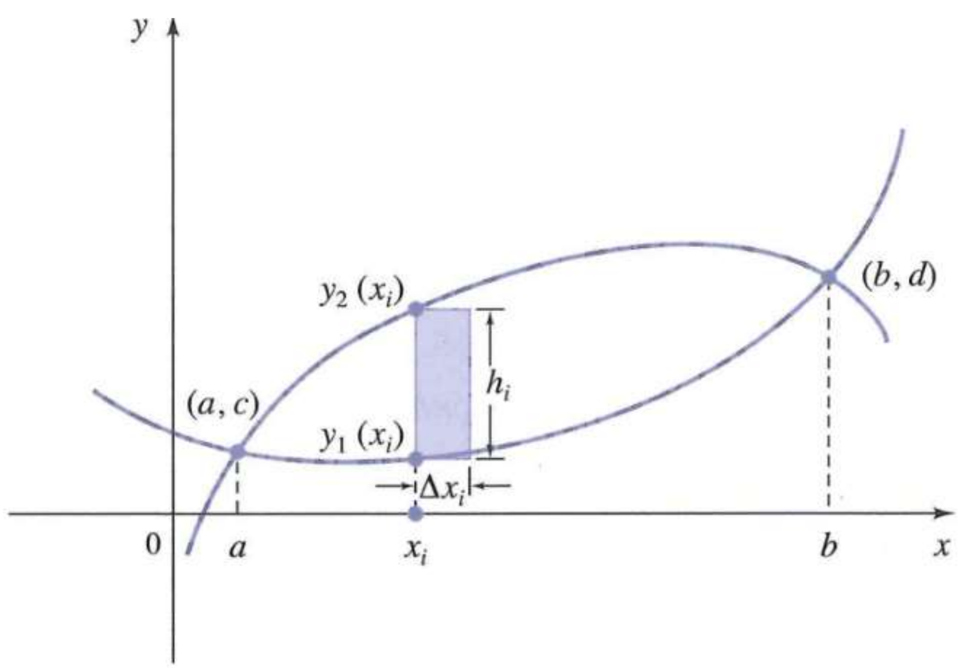


Si $a < b$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

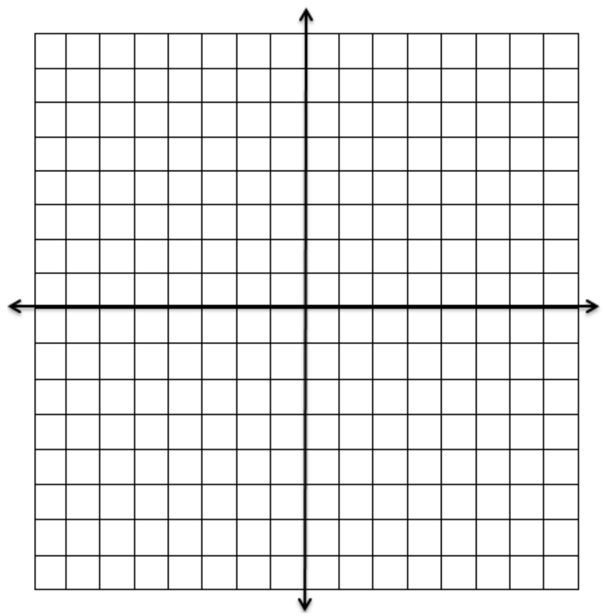
Alors :
A = $\int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$

1) Les Rectangles verticaux



Exemple 1 :

Trouve l'aire entre les courbes $y = x^2 - 6x + 10$ et $y = 2x - 5$ $(1, 33u^2)$

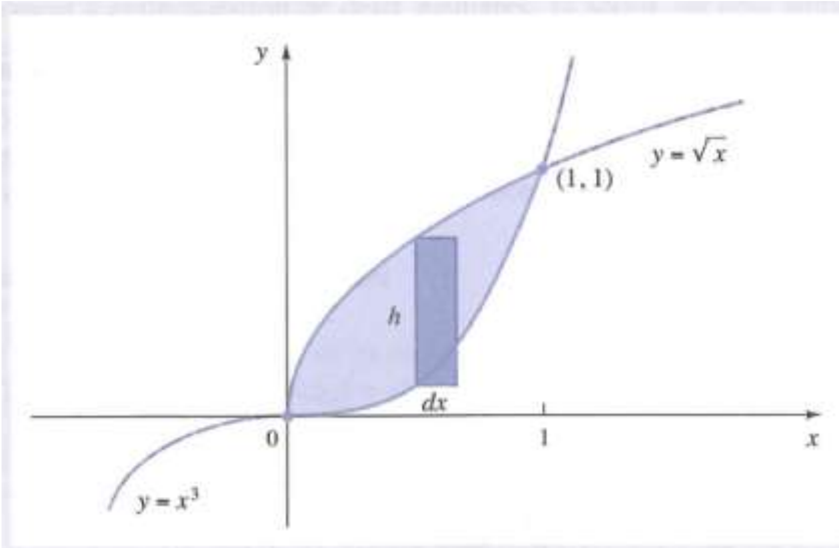


Exemple 2 :

Trouve l'aire entre les courbes $y = 6\cos x$ et $y = x^2$ $(10, 099\ u^2)$

Exemple 3 :

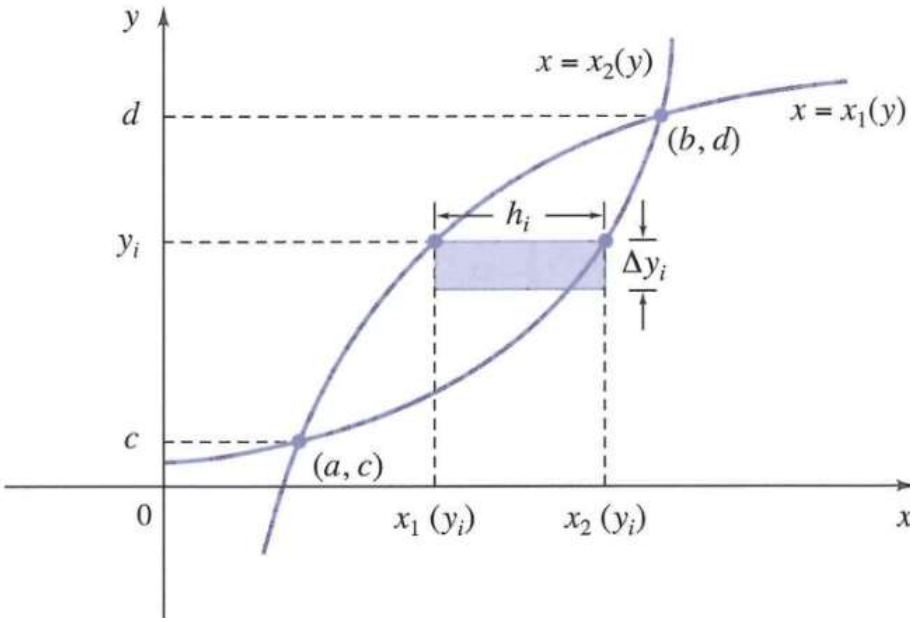
Trouve l'aire de la surface plane bornée par les courbes $y = \sqrt{x}$ et $y = x^3$.



1. Trouve les points d'intersections.

2. Faite l'intégration et insère les points d'intersection dans la primitive pour trouver l'aire.

2) Les Rectangles Horizontaux

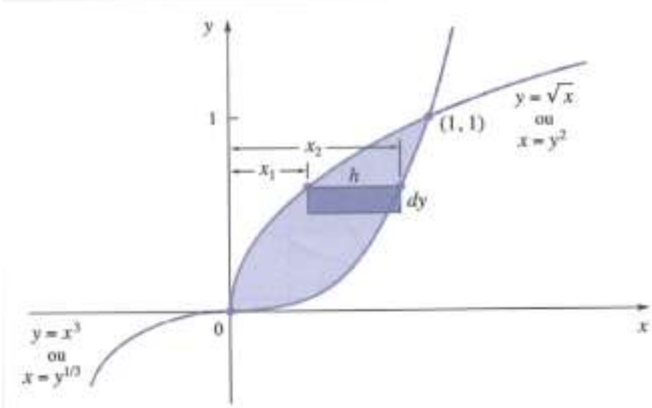


Exemple 4 :
En procédant avec des rectangles horizontaux, trouver l'aire de la surface plane bornée par les courbes $y = \sqrt{x}$ et $y = x^3$.

Dans la surface considérée, plaçons horizontalement un « rectangle type ». Alors la longueur de ce rectangle est

$$h = x_2(y) - x_1(y) = y^{1/3} - y^2$$

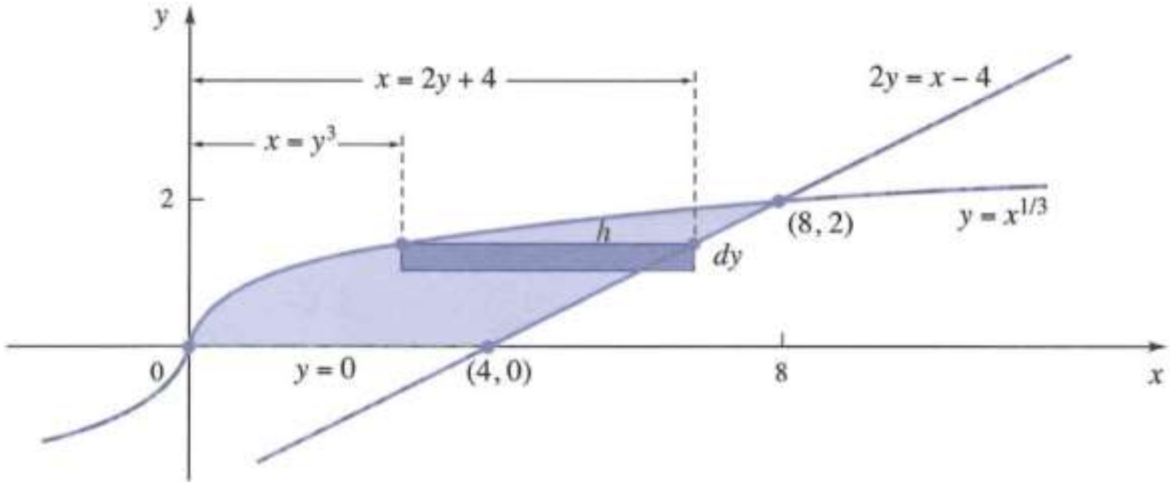
Et la largeur des dy.



$$A = \int_0^1 h\,dy = \int_0^1 \left(y^{1/3} - y^2\right) dy = \left[\frac{3}{4} y^{4/3} - \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{5}{12}$$

Exemple 5 : Trouve l'aire de la surface plane bornée par les courbes $y = x^{1/3}$, 2y = x – 4 et y = 0.

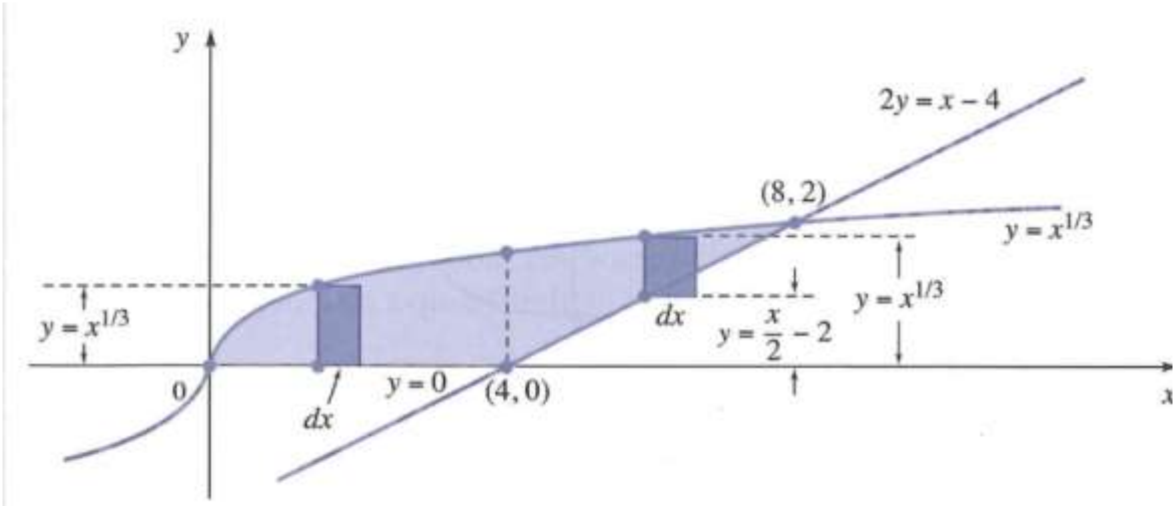
1) Rectangles horizontaux



Plaçons horizontalement un « rectangle type ». Alors :

$$A = \int_0^2 h\, dy = \int_0^2 \left((2y+4) - y^3\right) dy = \left[y^2 + 4y - \frac{y^4}{4} \right]_0^2 = (4+8-4) - 0 = 8$$

2) Rectangles verticaux



Lorsqu'on procède avec des rectangles verticaux, on rencontre une difficulté. L'expression de la hauteur h d'un « rectangle type » n'est pas la même selon qu'on est à gauche du point (4, 0) ou à droite de celui-ci. Dans un cas,

$$h = x^{1/3} - 0$$

et dans l'autre cas,

$$h = x^{1/3} - \left(\frac{x}{2} - 2\right)$$

Pour calculer l'aire cherchée, il faut procéder en deux parties, c'est-à-dire calculer la portion de l'aire à gauche de la verticale $x = 4$ et y additionner la portion de l'aire à droite de $x = 4$. Ainsi :

$$A = \int_0^4 x^{1/3}dx + \int_4^8 \left(x^{1/3} - \frac{x}{2} + 2\right) dx$$

$$A = \left[\frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^4 + \left[\frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{x^2}{4} + 2x\right]_4^8$$

$$A = \frac{3}{4}\,4^{4/3} + \frac{3}{4}\,8^{4/3} - \frac{64}{4} + 16 - \frac{3}{4}\,4^{4/3} + \frac{16}{4} - 8 = 8$$

Exemple 6 : Trouve l'aire de la surface plane bornée par x = 0, y = 0 et $y = \sqrt{1+x^3}$.

Pour évaluer cette intégrale, utilisons la méthode de Simpson avec 8 sous-intervalles.

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1+x^3}\, dx \approx \left(\frac{0-(-1)}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\big(f(-1) + 4f(-0{,}875) + 2f(-0{,}75) + 4f(-0{,}625)$$
$$+ 2f(-0{,}5) + 4f(-0{,}375) + 2f(-0{,}25) + 4f(-0{,}125) + f(0)\big)$$

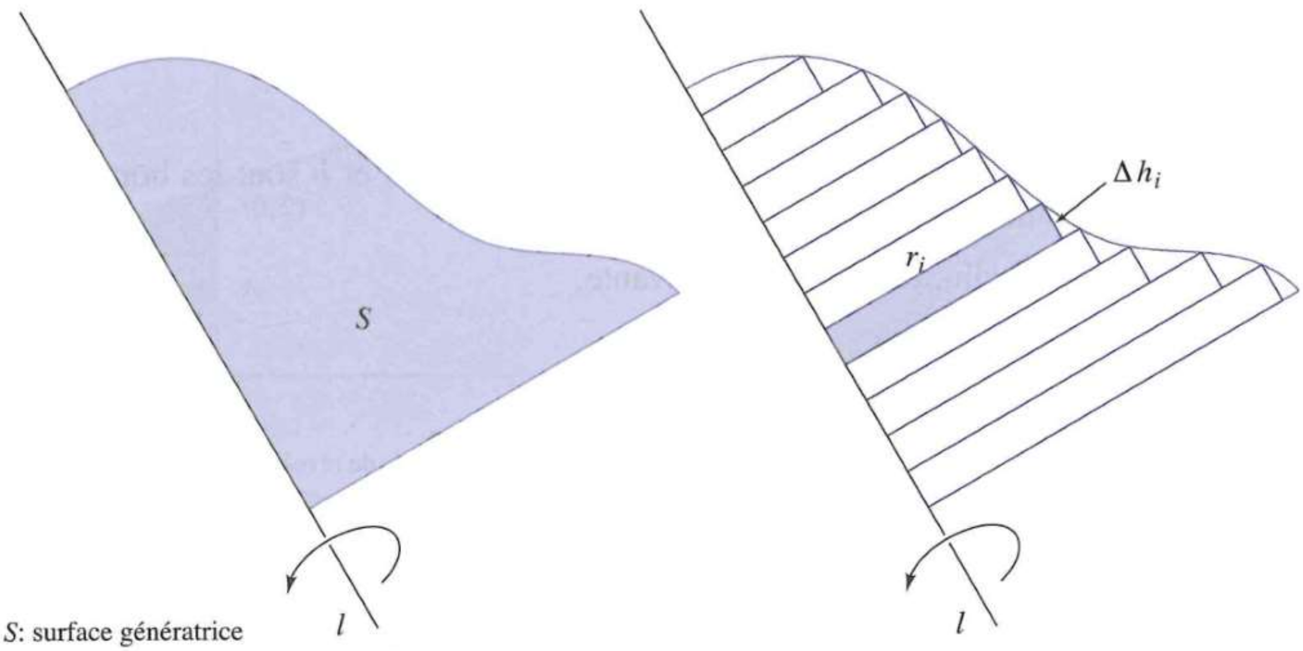
$$A_S \approx \frac{1}{24}(0 + 2{,}300 + 1{,}520 + 3{,}476 + 1{,}870 + 3{,}892 + 1{,}984 + 3{,}996 + 1)$$

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1+x^3}\, dx \approx 0{,}835$$

Unité : Problèmes d'Application

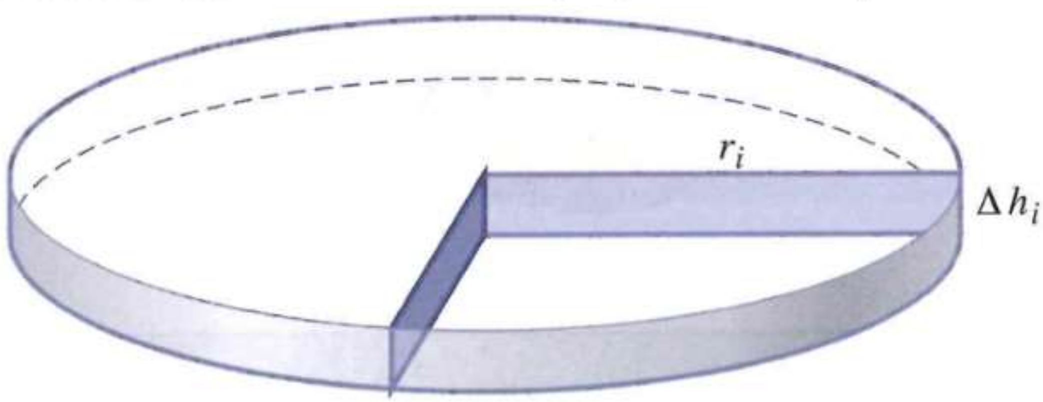
Leçon 1 : Méthode de disques (ou rondelles)

A)Disques pleins



S: surface génératrice

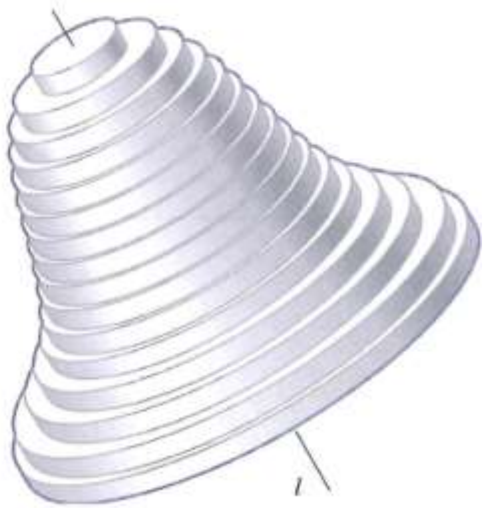
Plaçons, perpendiculairement à l'axe de révolution, n rectangles inscrits dans la surface génératrice. Chacun de ces rectangles engendre un disque par une rotation complète autour de l'axe l; ce disque est un cylindre circulaire droit de rayon r_i et de hauteur Δh_i:



Le volume du i^e disque est donné par $\pi r_i^2 \Delta h_i$. Formons la somme des n disques engendrés par les n rectangles à l'intérieur de la surface génératrice :

$$\sum_{i=1}^{n} \pi r_i^2 \Delta h_i$$

Cela constitue une approximation du volume cherché. Cette somme, c'est le volume de l'ensemble des disques empilés les uns sur les autres.



L'approximation s'améliore quand les disques deviennent plus nombreux et plus minces, c'est-à-dire quand $n \to \infty$ et $\max \Delta h_i \to 0$.

Donc :

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta h_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi r_i^2 \Delta h_i$$

et, selon la notation conventionnelle :

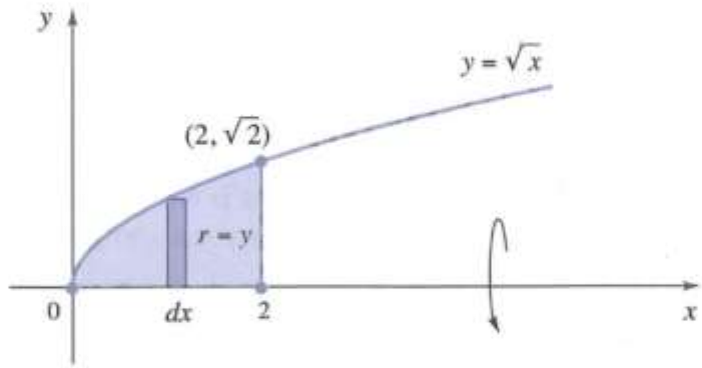
$$\boxed{V = \pi \int_a^b r^2 \, dh}$$

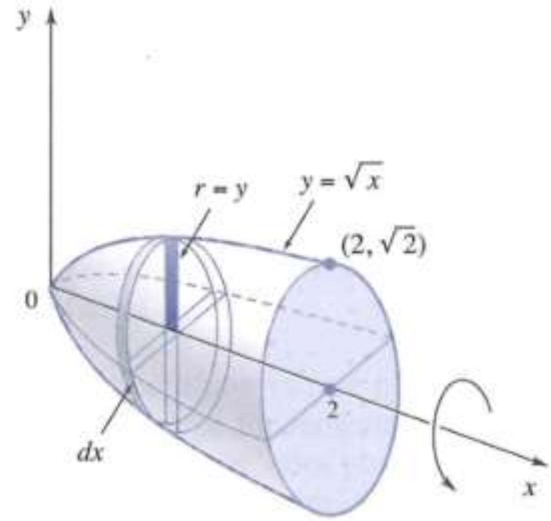
où l'élément différentiel de volume est $dV = \pi r^2 dh$, a et b sont les bornes d'intégration et r est une fonction de h exprimant le rayon des disques.

Le solide de révolution a la forme suivante.

Exemple 1 :

Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des x de la surface plane bornée par $y=\sqrt{x}$, $y=0$ et $x=2$.

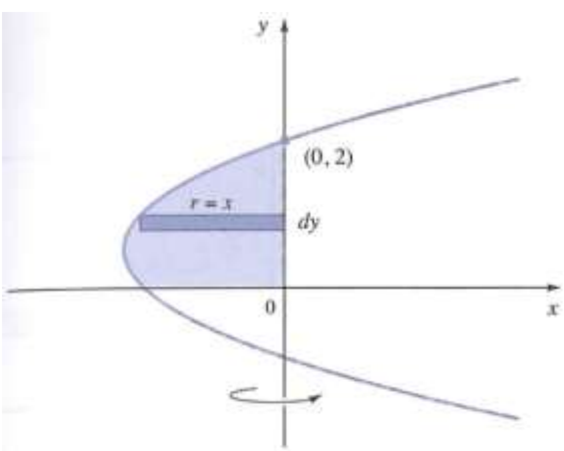


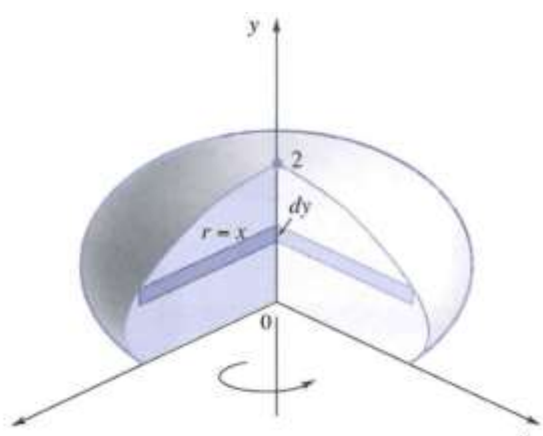


$$V=\pi\int_0^2 r^2 dh=\pi\int_0^2 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx=\pi\int_0^2 x\ dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=2\pi$$

Exemple 2 :

Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des y de la surface plane dans le deuxième quadrant bornée par $x=y^2-y-2$, $x=0$ et $y=0$.





$$V=\pi\int_0^2 r^2 dh=\pi\int_0^2 (x)^2 dy=\pi\int_0^2 (y^2-y-2)^2 dy=\pi\int_0^2 (y^4-2y^3-3y^2+4y+4)\ dy$$

$$=\pi\left[\frac{y^5}{5}-\frac{2y^4}{4}-\frac{3y^3}{3}+\frac{4y^2}{2}+4y\right]_0^2=\pi\left(\frac{32}{5}-8-8+8+8\right)=\frac{32\pi}{5}$$

B) Disques troués

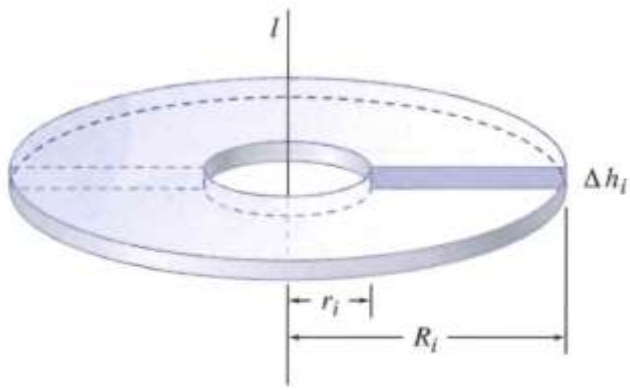
Toujours avec la méthode des disques, considérons maintenant le cas où la surface génératrice ne touche pas à l'axe de révolution.

Divisons la surface génératrice en n rectangles perpendiculaires à l'axe de révolution l, c'est-à-dire où la plus grande dimension est perpendiculaire à l'axe de révolution l. La révolution d'un de ces rectangles autour de l'axe l engendre une *rondelle* ou un *disque troué*. Le volume de la i^e rondelle engendrée par le i^e rectangle est donné par :

$$\pi R_i^2 \Delta h_i - \pi r_i^2 \Delta h_i$$

C'est-à-dire :

$$\pi \left(R_i^2 - r_i^2 \right) \Delta h_i$$



Le volume des n rondelles engendrées par la révolution autour de l'axe l des n rectangles construits dans S est donné par :

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left(R_i^2 - r_i^2 \right) \Delta h_i$$

Cela constitue une approximation du volume cherché. Cette approximation s'améliore si les rondelles deviennent plus nombreuses et plus minces, c'est-à-dire si $n \to \infty$ et si $\max \Delta h_i \to 0$.

Donc :

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta h_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(R_i^2 - r_i^2 \right) \Delta h_i$$

et, selon la notation conventionnelle :

$$V = \pi \int_a^b \left(R^2 - r^2 \right) dh$$

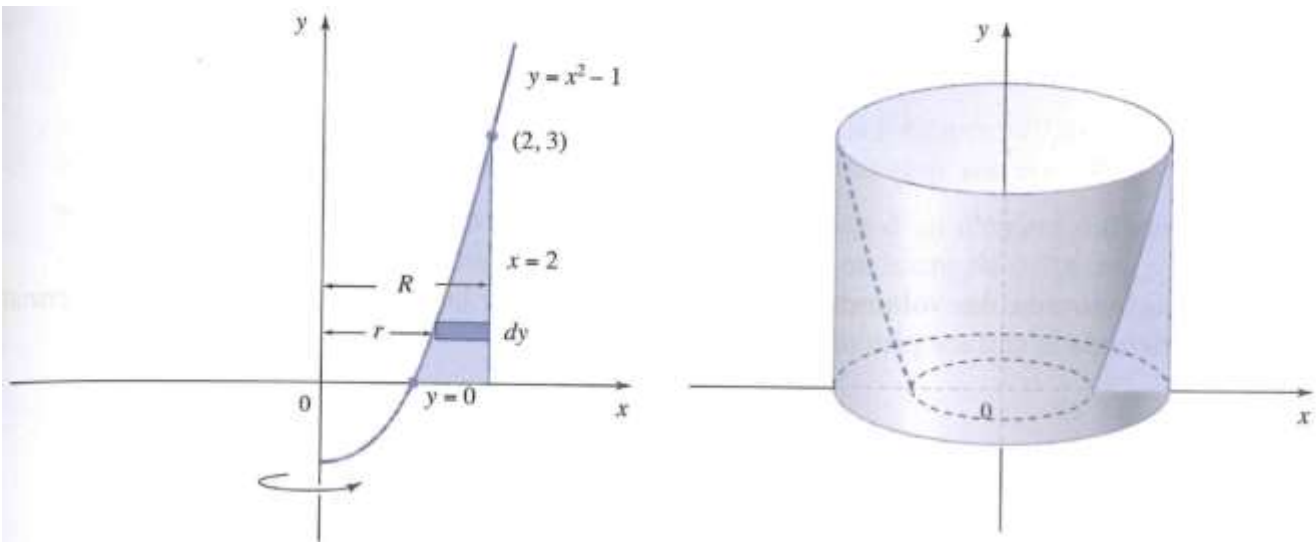
où a et b sont les bornes d'intégration, R une fonction de h exprimant le rayon extérieur des rondelles, r une fonction de h exprimant le rayon intérieur des rondelles et dh l'élément différentiel d'épaisseur des rondelles ou disques troués.

Exemple 3 :

Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des y de la surface plane bornée par $y = x^2 - 1$, $y = 0$ et $x = 2$.

Selon la figure suivante, on a $R = 2$ et $r = x = \sqrt{y+1}$. Alors :

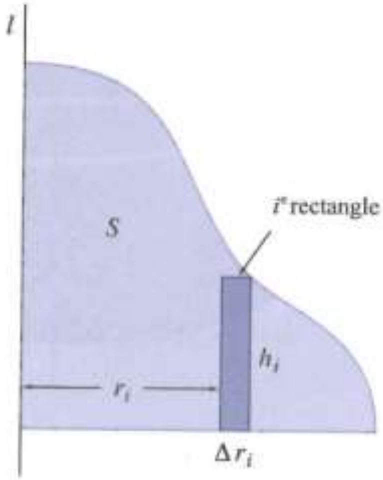
$$V = \pi\int_0^3 \left(R^2 - r^2\right) dy = \pi\int_0^3 \left(4 - (y+1)\right) dy = \pi\int_0^3 (3 - y)\, dy = \pi \left[3y - \frac{y^2}{2}\right]_0^3 = \pi \left(9 - \frac{9}{2}\right) = \frac{9\pi}{2}$$



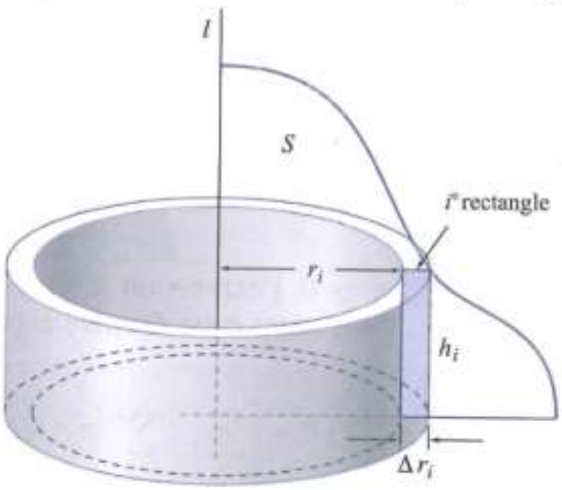
Leçon 2 : Méthode des tubes (ou couches cylindriques)

Dans cette méthode, il n'y a pas à distinguer les cas où l'axe de révolution est une borne ou non de la surface génératrice.

Soit une surface S qui tourne autour de l'axe l.



À l'intérieur de la surface S, plaçons n rectangles de manière que leur côté qui n'est pas infiniment petit soit parallèle à l'axe de révolution l. Le i^e rectangle a pour hauteur h_i, pour largeur Δr_i et est situé à une distance r_i de l'axe l. Chacun de ces n rectangles, par une révolution autour de l'axe l, engendre un *tube* ou une *couche cylindrique*.



Le volume du i^e tube est donné par la différence des volumes du cylindre extérieur moins celui du cylindre intérieur.

$$\pi \left(r_i + \Delta r_i\right)^2 h_i - \pi r_i^2 h_i$$

C'est-à-dire :

$$\pi \left(2r_i \Delta r_i + \Delta r_i^2\right) h_i$$

Faisons la somme des volumes des n tubes engendrés par la révolution des n rectangles construits à l'intérieur de la surface génératrice.

On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \pi \left(2r_i h_i \Delta r_i + h_i \Delta r_i^2\right)$$

Cela constitue une approximation du volume cherché.

L'approximation s'améliore quand les tubes deviennent plus nombreux et plus minces, c'est-à-dire quand $n \to \infty$ et max $\Delta r_i \to 0$.

Ainsi :

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(2r_i h_i \Delta r_i + h_i \Delta r_i^2\right)$$

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta r_i \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i h_i \Delta r_i + \sum_{i=1}^{n} \pi h_i \Delta r_i^2\right)$$

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i h_i \Delta r_i + \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} \pi h_i \Delta r_i^2$$

Notons ici que lorsque max $\Delta r_i \to 0$, l'expression $\pi h_i \Delta r_i^2$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $2\pi r_i h_i \Delta r_i$. Donc, dans cette dernière expression de V, la seconde limite est 0. Il reste donc :

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta r_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i h_i \Delta r_i$$

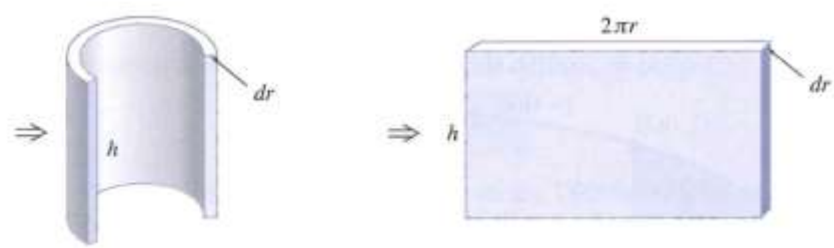
et, selon la notation conventionnelle :

$$V = \int_a^b 2\pi\, r\, h\, dr$$

où a et b sont les bornes d'intégration et $dV = 2\pi\, r\, h\, dr$ est l'élément différentiel de volume dans lequel $2\pi r$ représente la circonférence du tube, h sa hauteur et dr son épaisseur.

Pour se représenter et mémoriser aisément cette expression d'un élément différentiel de volume, on peut associer un tube très mince à une feuille enroulée en forme de cylindre.

Imaginons qu'on découpe cette feuille dans le sens de la hauteur et qu'on la déplie pour obtenir une feuille plane.

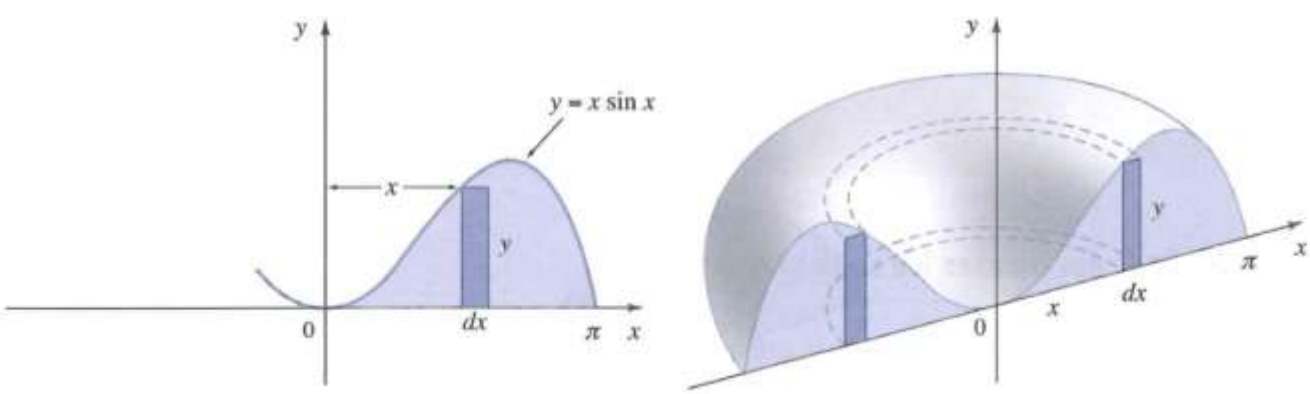


L'expression du volume de cette feuille est :

$$dV = 2\pi r \times h \times dr$$

Exemple 4 :

Trouver le volume du solide engendré par la révolution autour de l'axe des y de la surface plane bornée par l'axe des x et la première arche de $y = x \sin x$.



Procédons avec la méthodes des tubes. Notons que la méthode des rondelles s'avérerait impraticable puisqu'il faudrait isoler x dans l'équation $y = x \sin x$.

On a $r = x$, $h = y = x \sin x$ et $dr = dx$.

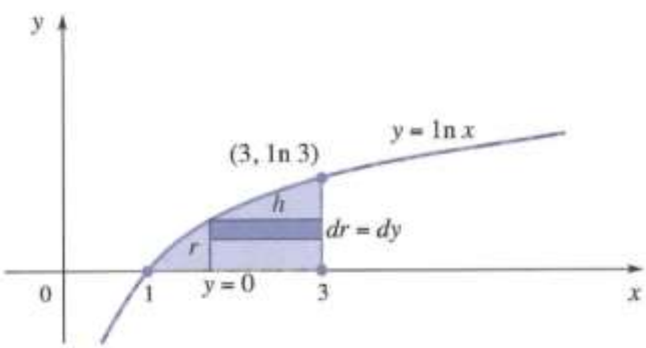
$$V = 2\pi \int_0^{\pi} r\,h\,dr = 2\pi \int_0^{\pi} x\ (x \sin x)\ dx = 2\pi \int_0^{\pi} x^2 \sin x\ dx$$

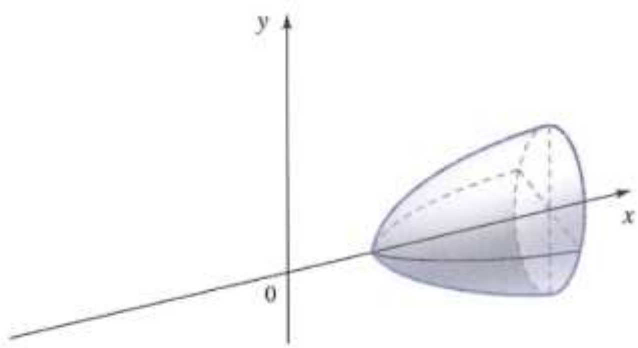
En procédant à une intégration par parties, on trouve que $-x^2 \cos x + 2\,x \sin x + 2 \cos x$ est une primitive de $x^2 \sin x$. Alors :

$$V = 2\pi\ \left[-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x\right]_0^{\pi} = 2\pi\left(-\pi^2(-1) + 0 - 2 - (0 + 0 + 2)\right)$$

$$V = 2\pi\left(\pi^2 - 4\right) = 36{,}880$$

Exemple 5 :





Notons qu'on pourrait procéder ici par la méthode des disques. Utilisons plutôt la méthode des tubes.

On a $r = y$, $h = 3 - x = 3 - e^y$ et $dr = dy$.

$$V = 2\pi \int_0^{\ln 3} r\,h\,dr = 2\pi \int_0^{\ln 3} y\ (3 - e^y)\ dy = 2\pi \int_0^{\ln 3} (3y - ye^y)\ dy$$

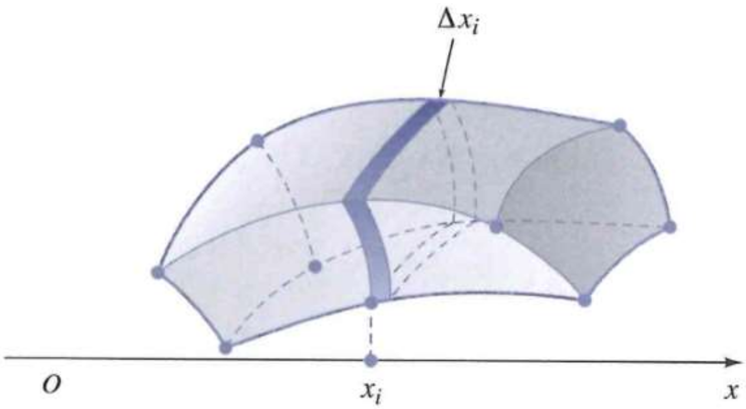
$$V = 2\pi\left[\frac{3y^2}{2} - e^y(y-1)\right]_0^{\ln 3} = 2\pi\left(\frac{3\ln^2 3}{2} - 3\,(\ln 3 - 1) - (0 - e^0(-1))\right)$$

$$V = 2\pi\left(\frac{3\ln^2 3}{2} - 3\ln 3 + 3 - 1\right) = \pi\left(3\ln^2 3 - 6\ln 3 + 4\right) = 3{,}233$$

Leçon 3 : Méthode des tranches (ou sections connues)

Dans cette troisième partie de la présente section, nous irons au-delà des méthodes déjà introduites pour les appliquer à un plus grand nombre de solides, soit à des solides qui ne sont pas de révolution, plus précisément à des solides dont on connaît une section plane. Cette méthode que nous introduisons maintenant se nomme la *méthode des tranches* ou la *méthode des sections connues*.

Considérons un solide divisé en tranches perpendiculairement à un axe Ox.



Nous avons n tranches déterminées par des plans perpendiculaires à Ox. Supposons que l'on puisse déterminer l'aire de la surface latérale de ces tranches par une fonction $A = A(x)$. Par exemple, appelons $A(x_i)$ l'aire latérale de la i^e tranche. Alors, $A(x_i)\ \Delta x_i$ représente le volume de cette i^e tranche si Δx_i en est l'épaisseur. Faisons la somme des volumes de ces n tranches. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} A(x_i)\ \Delta x_i$$

Cela constitue une approximation du volume du solide considéré. L'approximation s'améliore à mesure que les tranches amincissent et que leur nombre augmente ; bref, passant à la limite, on a :

$$V = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\ \Delta x_i$$

et, en utilisant la notation conventionnelle de l'intégrale définie, on obtient :

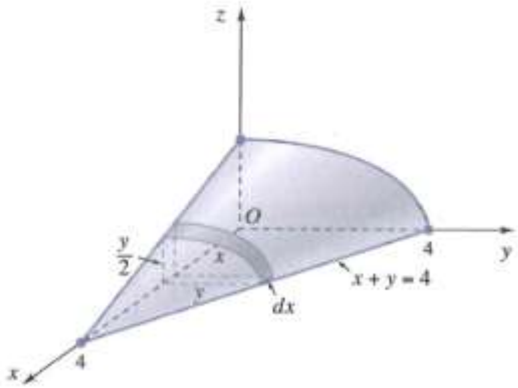
$$\boxed{V = \int_a^b A(x)\, dx}$$

où a et b sont les bornes d'intégration et $dV = A(x)\ dx$ est l'élément différentiel de volume dans lequel $A(x)$ représente une fonction de x donnant l'aire latérale d'une tranche du solide coupée perpendiculairement à l'axe des x.

Exemple 6 :

Un solide a pour base le triangle formé par les droites $x = 0$, $y = 0$ et $x + y = 4$. Toute tranche perpendiculaire à l'axe des x est un quart d'ellipse dont le grand axe est dans le plan xOy et le petit axe, égal à la moitié du grand axe, est perpendiculaire au plan xOy. Trouver le volume de ce solide.

Esquissons d'abord une représentation graphique de ce solide dans un système d'axes cartésien à trois dimensions.



Considérons une tranche de ce solide coupée perpendiculairement à l'axe des x à une distance x de l'origine. Cette tranche, d'épaisseur dx, a pour surface le quart d'une ellipse. Alors :

$$A(x) = \frac{1}{4}\pi\ (y)\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{\pi}{8}\ (y^2) = \frac{\pi}{8}\ (4-x)^2$$

Ainsi :

$$V = \int_0^4 A(x)\,dx = \int_0^4 \frac{\pi}{8}\ (4-x)^2 dx = \frac{\pi}{8}\int_0^4 (16 - 8x + x^2)\ dx$$

$$V = \frac{\pi}{8}\left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{\pi}{8}\left(64 - 64 + \frac{64}{3} - 0\right) = \frac{8\pi}{3}$$