Unités

Les Fonctions
Radicales,

Les Fonctions Rationnelles,

Les Systèmes d'Inéquations
Linéaires et Quadratiques,

Les Suites et les Séries

Table des matières

Unité

Les Fonctions Radicales

Leçon 1 : Revue Mathé 10^{e} et en plus

Revue Mathé 10^{e} et en plus

Radical :
- Expression contenant une racine.

Radicande :
- Expression à l'intérieur de la racine.

A) Les restrictions sur les valeurs des variables.

Si un radical représente un nombre réel et qu'il a un indice pair (racine carrée), le radicande doit être non négatif ex : $\sqrt{-4}$ n'existe pas, c'est étranger.

Le radical $\sqrt{4-x}$ a un indice pair. Donc, la valeur de 4 – x doit être supérieure ou égale à zéro.

$4 - x \geq 0$

$4 - x \geq 0$
$+x \quad +x$
$4 \geq x$
$x < 4$

Le radical $\sqrt{4-x}$ est un nombre réel seulement si x est inférieur ou égal à 4. Pour le vérifier, remplace x par des valeurs supérieures à 4, Par 4 et par des valeurs inférieures à 4.

Alors ce qui est à l'intérieur d'une racine doit être ≥ 0.

B) Les Radicaux sous forme Simplifié et forme Entière.

1. Écris les radicaux sous une forme simplifiée.

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{48}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt{x^4y^6z}$

2. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $3\sqrt{6}$ b) $2\sqrt{5}$ c) $4\sqrt{10}$ d) $y^3x\sqrt{x}$

C) La simplification de radicaux et le regroupement de termes semblables.

Radicaux semblables :

- Des radicaux de même indice qui ont le même radicande.

3. Regroupe les termes semblables.

a) $\sqrt{6} - \sqrt{10} + 3\sqrt{6} + 7\sqrt{10}$

b) $\sqrt{3} + 4\sqrt{11} - 6\sqrt{3} + 15\sqrt{11}$

4. Simplifie et regroupe les termes semblables.

a) $7\sqrt{5} - 2\sqrt{125} + 5\sqrt{20}$

b) $\sqrt{50} + 3\sqrt{2}$

c) $-\sqrt{27} + 3\sqrt{5} - \sqrt{80} - 2\sqrt{12}$

d) $\sqrt{4c} - 4\sqrt{9c}$, où $c \geq 0$

D) La forme exponentielle et radical

1. Écris les radicaux sous forme exponentielle et évalue.

a) $\sqrt[3]{27^2}$ ____________________ b) $\sqrt[4]{16^3}$____________________ c) $\sqrt[5]{32^4}$____________________

2. Écris les formes exponentielles sous forme de radicaux et évalue.

a) $64^{\frac{2}{3}}$ ____________________ b) $9^{\frac{5}{2}}$ ____________________ c) $125^{\frac{2}{3}}$____________________

Pratique :

1. Écris chaque radical sous sa forme simplifiée.

a) $\sqrt{52}$ b) $\sqrt[4]{m^7}$ c) $\sqrt{63n^7p^4}$

2. Écris chaque radical sous forme entière.

a) $4\sqrt{3}$ b) $j\sqrt[3]{j}$ c) $2k^2(\sqrt[3]{4k})$

3. Simplifie et regroupe les termes semblables.

a) $2\sqrt{7} + 13\sqrt{7}$ b) $\sqrt{24} - \sqrt{6}$ c) $\sqrt{20x} - 3\sqrt{45x}$, où $x \geq 0$

Leçon 2 : La Multiplication et la division des radicandes.

A) La multiplication de radicaux

Quand tu multiplies des radicaux, tu dois multiplier les coefficients, puis multiplier les radicandes. La multiplication est possible seulement si les radicaux ont le même indice.

Exemple même type de racine :

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3}$

$(5)^{\frac{1}{2}}(3)^{\frac{1}{2}}$ on met les racines sous forme d'exposant

$(5 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}$ on utilise les lois des exposants pour multiplier

$(15)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{15}$ on remet l'exposant sous forme de racine

Exemple différent type de racine :

Évalue.

$\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{6}$

$(6)^{\frac{1}{2}}(6)^{\frac{1}{3}}$ on met les racines sous forme d'exposant

$6^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ on utilise les lois des exposants pour multiplier

$6^{\frac{5}{6}}$

$\sqrt[6]{6^5}$ on remet l'exposant sous forme de racine

Méthode 1 : Multiplier ensuite simplifier

Ex : $(2\sqrt{7})(4\sqrt{75})$ $= (2)(4)\sqrt{(7)(45)}$

$= 8\sqrt{525}$

$= 8\sqrt{(25)(21)}$

$= 8(5)\sqrt{21}$

$= 40\sqrt{21}$

Méthode 2 : simplifie ensuite multiplier

$(2\sqrt{7})(4\sqrt{75}) = (2\sqrt{7})(4\sqrt{(25)(3)})$

$(2\sqrt{7})[(4)(5)(\sqrt{3}]$

$(2\sqrt{7})(20\sqrt{3})$

$(2)(20)\sqrt{(7)(3)}$

$40\sqrt{21}$

5. Effectue les multiplications à l'aide de la **distributivité**. Simplifie les produits.

a) $\left(2\sqrt{3}-5\right)\left(\sqrt{3}+1\right)$

b) $\left(3\sqrt{5}-2\right)^2$

c) $(-3\sqrt{2x})(4\sqrt{6})$, où $x \geq 0$

d) $7\sqrt{3}(5\sqrt{5} - 6\sqrt{3})$

d) $(8\sqrt{2} - 5)(9\sqrt{5} + 6\sqrt{10})$

f) $9\sqrt[3]{2w}(\sqrt[3]{4w} + 7\sqrt[3]{28})$, où $w \geq 0$

5. Un artiste crée un motif, il insert un triangle équilatéral dans un carré. L'aire du carré est de 32 cm^2.
a) Quel est le périmètre exact du triangle ?
b) Détermine la hauteur exacte du triangle.
c) Quelle est l'aire exacte du triangle ?
Exprime toutes tes réponses sous la forme la plus simple.

B) La Rationalisation du dénominateur et La Division des Radicandes

Rationaliser :

- Convertir une expression en un nombre rationnel sans changer sa valeur.
- Si le radical se trouve au dénominateur, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par une quantité qui donnera un nombre rationnel au dénominateur.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2\sqrt{3}} &= \frac{5}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}(\sqrt{3})}\\ &= \frac{5\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

Conjugués :

- Deux facteurs binomiaux dont le produit est une différence de carrés.
- Les binômes (a + b) et (a – b) sont des conjugués, car leur produit est $a^2 - b^2$.

$$\begin{aligned}\frac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}} &= \left(\frac{5\sqrt{3}}{4-\sqrt{6}}\right)\left(\frac{4+\sqrt{6}}{4+\sqrt{6}}\right)\\ &= \frac{20\sqrt{3}+5\sqrt{18}}{4^2-(\sqrt{6})^2}\\ &= \frac{20\sqrt{3}+5\sqrt{9(2)}}{16-6}\\ &= \frac{20\sqrt{3}+15\sqrt{2}}{10}\\ &= \frac{4\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

1. Simplifie et rationalise chaque expression.

a) $\frac{\sqrt{24x^2}}{\sqrt{3x}}$, où $x > 0$

b) $\frac{4\sqrt{5n}}{3\sqrt{2}}$, où $n \geq 0$

c) $\frac{11}{\sqrt{5}+7}$

d) $\frac{4\sqrt{11}}{y\sqrt[3]{6}}$, où $y \neq 0$

Pratique :

1. Effectue les multiplications et simplifie le produit quand c'est possible.

a) $5\sqrt{3}(\sqrt{6})$

b) $-2\sqrt[3]{11}(4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{3})$

c) $(4\sqrt{2} + 3)(\sqrt{7} - 5\sqrt{14})$

d) $-2\sqrt{11c}(4\sqrt{2c^3} - 3\sqrt{3}$, où c ≥ 0

2. Simplifie chaque quotient. Détermine les valeurs de la variable pour lesquelles l'expression est un nombre réel.

a) $\frac{2\sqrt{51}}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{-7}{2\sqrt[3]{9p}}$

c) $\frac{2}{3\sqrt{5} - 4}$

d) $\frac{6}{\sqrt{4x} + 1}$

Leçon 3 : Résous algébriquement les équations contenant des radicaux.

Équation contenant un ou des radicaux :

- Une équation (alors signe =) où il y a un ou des radicaux dont le radicande comporte au moins une variable.

Lorsqu'on résout une équation contenant des radicaux :

- Nous devons isoler le radical
- Mettre le tout au carré afin d'éliminer la racine.
- Il faut toujours **vérifier** nos **solutions** en cas qu'elles sont des **racines étrangères.**

Revue :

Quelles sont les valeurs non permises (les restrictions) pour l'expression :

a) $\sqrt{x}$? b) $\sqrt{x-3}$ c) $\sqrt{4x+6}$ d) $\sqrt{-x}$

A) Résoudre une équation contenant un seul radical.

1. a) Indique les restrictions sur les valeurs de x dans l'équation

$5+\ \sqrt{2x-1}=12$

Si le radical est nombre réel.

b) Résous l'équation $5+\ \sqrt{2x-1}=12$.

2. Résous l'équation $3\sqrt{x+5} - 6 = 6$.

B) <u>**Résoudre une équation contenant deux radicaux.**</u>

3. Résous l'équation $7 + \sqrt{3x} = \sqrt{5x+4} + 5$, où x ≥ 0. Vérifie ta réponse.

4. Résous l'équation $-2\sqrt{46m^3 - 10m^2 + 18m - 132} + 8 = 88$

C) Les équations qui comportent une racine étrangère.

5. Quelles sont les restrictions sur les valeurs de n si l'équation $n - \sqrt{5-n} = -7$ présente des nombres réels ? Résous l'équation.

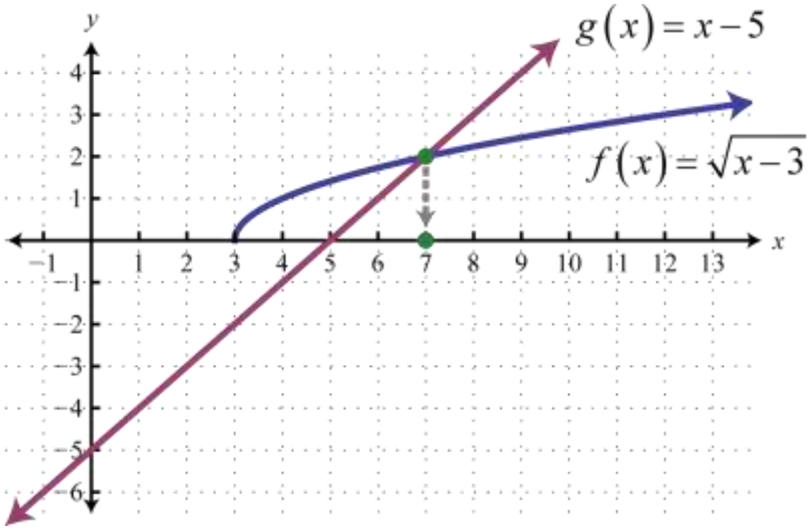
Pratique :

1. Détermine toute restriction sur les valeurs de y dans l'équation $-8 + \sqrt{\frac{3y}{5}} = -2$ si le radical est un nombre réel. Ensuite, résous l'équation.

2. Résous l'équation $\sqrt{3+j} + \sqrt{2j-1} = 5$, où j $\geq \frac{1}{2}$.

3. Détermine les restrictions sur les valeurs de m dans $m - \sqrt{2m+3} = 6$ si l'équation présente des nombres réels. Ensuite, résous l'équation.

Leçon 4 : Résous graphiquement les équations contenant des radicaux.



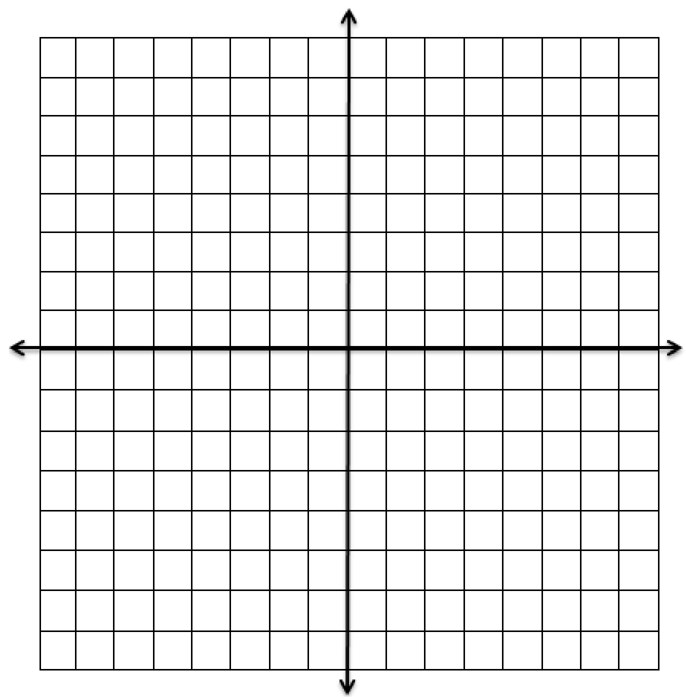
A) Le graphique d'une racine carré.

1. Trace graphique de :

y = f(x)

f(x) = $\sqrt{x}$

x	f(x)
0	0
1	1
4	2
9	3
16	4

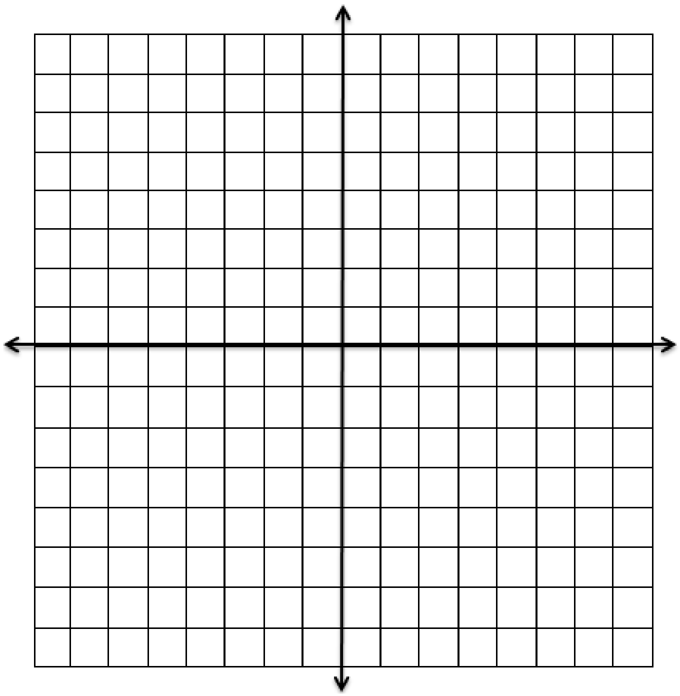


f(x) = $\sqrt{x}$

est le graphique de base pour une racine carré. Il peut subir des transformations

B) Le graphique d'une racine carré qui subit une translation horizontale. f(x) = $\sqrt{x-h}$

2. Trace le graphique de f(x) = $\sqrt{x-2}$



y = $\sqrt{x}$ f(x) = $\sqrt{x-2}$

(x, y) → (x + 2, y)

(0, 0) → (2, 0)
(1, 1) → (3, 1)
(4, 2) → (6, 2)
(9, 3) → (11, 3)
(16, 4) → (18, 4)

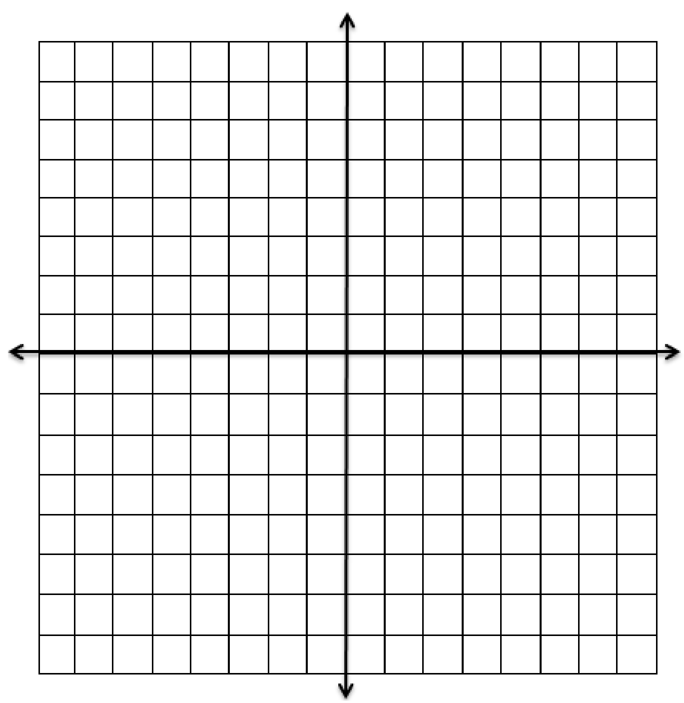
C) Le graphique d'une racine carré qui subit une translation verticale. f(x) = $\sqrt{x}+k$

3. Trace le graphique de f(x) = $\sqrt{x}+3$

y = $\sqrt{x}$ f(x) = $\sqrt{x}+3$

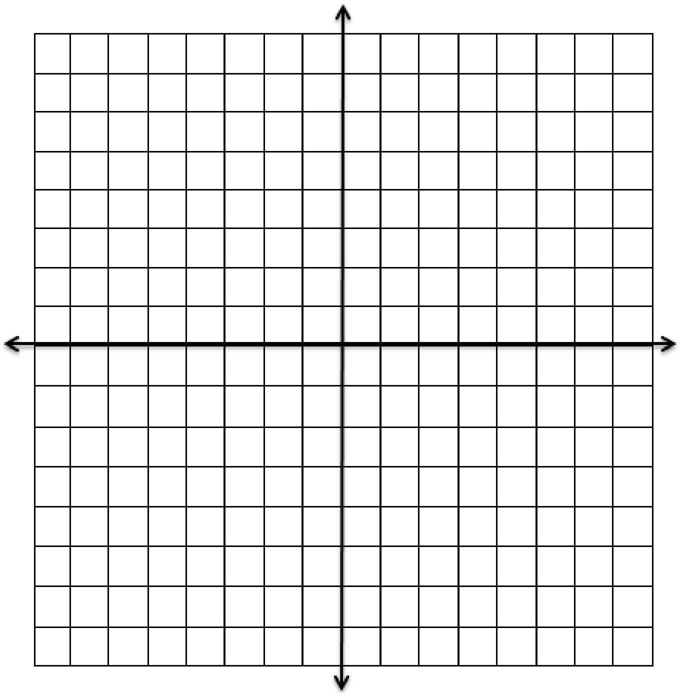
(x, y) → (x, y + 3)

(0, 0) → (0, 3)
(1, 1) → (1, 4)
(4, 2) → (4, 5)
(9, 3) → (9, 6)
(16, 4) → (16, 7)



D) Le graphique d'une racine carré qui subit un étirement vertical.

4. a) Trace le graphique de f(x) = $2\sqrt{x+1}$ – 3



y = $\sqrt{x}$ f(x) = $2\sqrt{x+1} - 3$

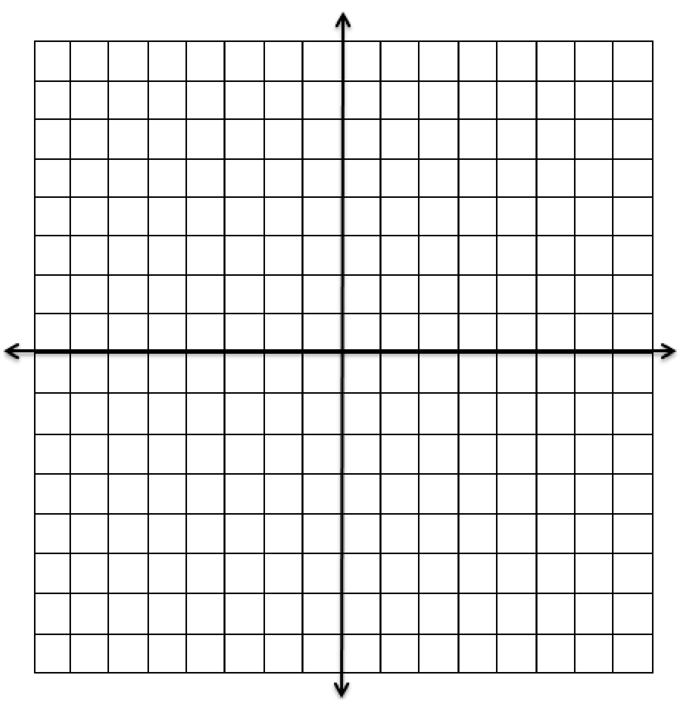
(x, y) → (x – 1, 2y – 3)

(0, 0) → (-1, -3)
(1, 1) → (0, -1)
(4, 2) → (3, 1)
(9, 3) → (8, 3)
(16, 4) → (15, 5)

E) Résoudre graphiquement l'équation radical.

5. Trace les graphiques et résous le système.

$$\sqrt{x+4} = 3$$

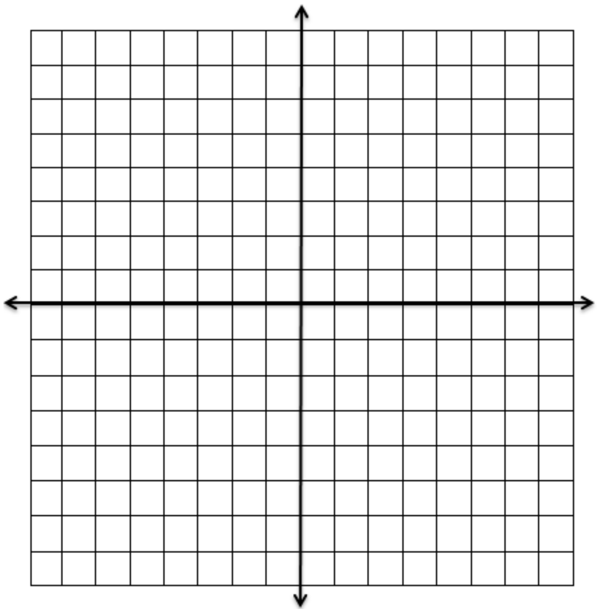


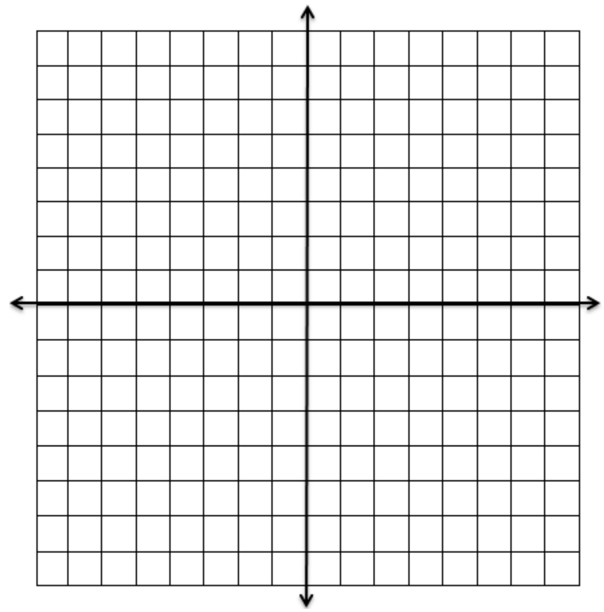
6. Résous graphiquement

a) $2\sqrt{x} - 2 = 2x - 6$

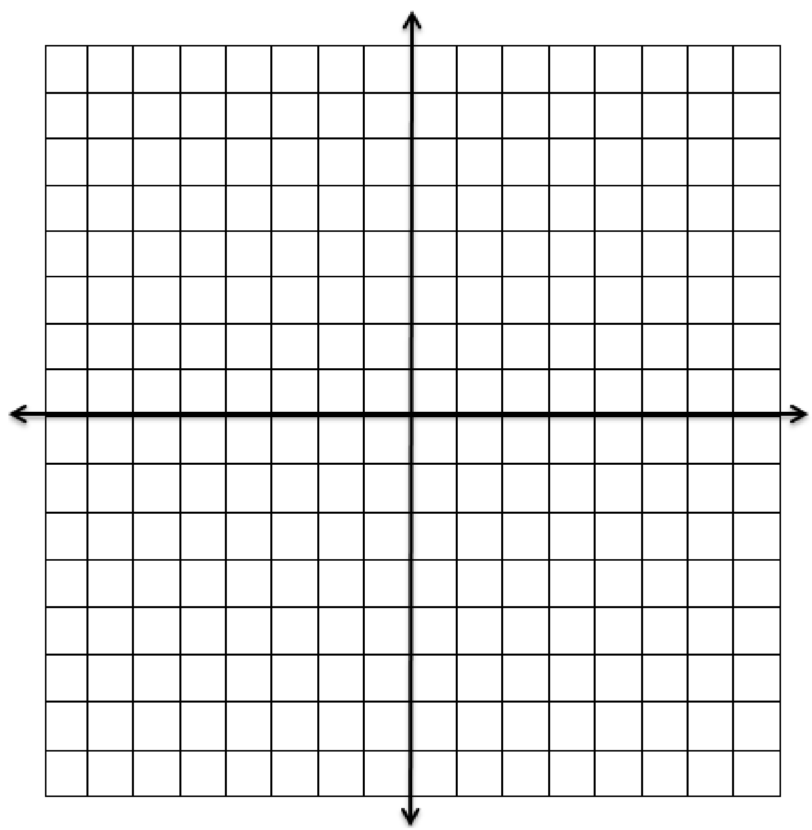
Méthode 1

Méthode 2 :





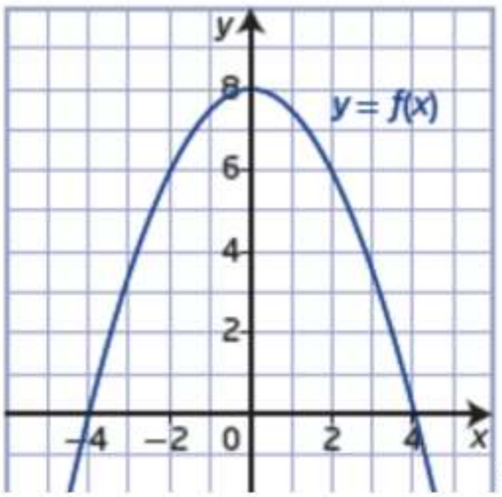
b) $2\sqrt{x+3} - 2 = 4$



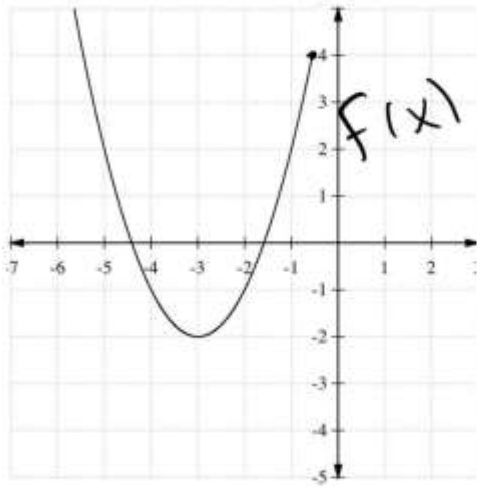
En plus :

Étant donné les graphiques de y = f(x) ci-dessous, trace les graphiques de y = $\sqrt{f(x)}$.

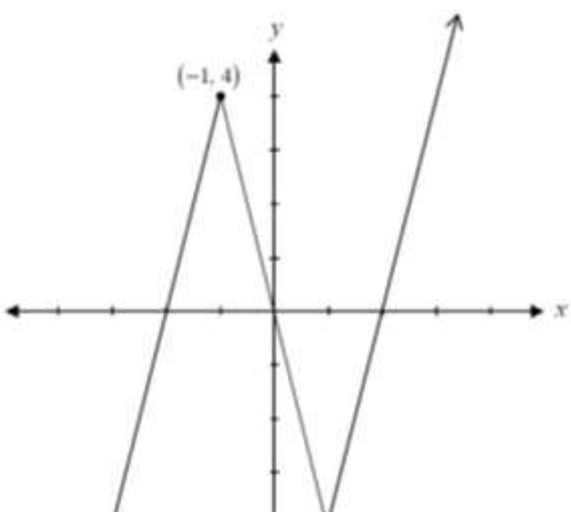
a)



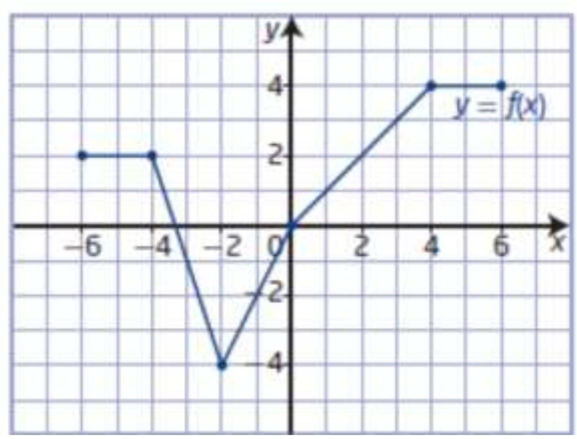
b)



c)



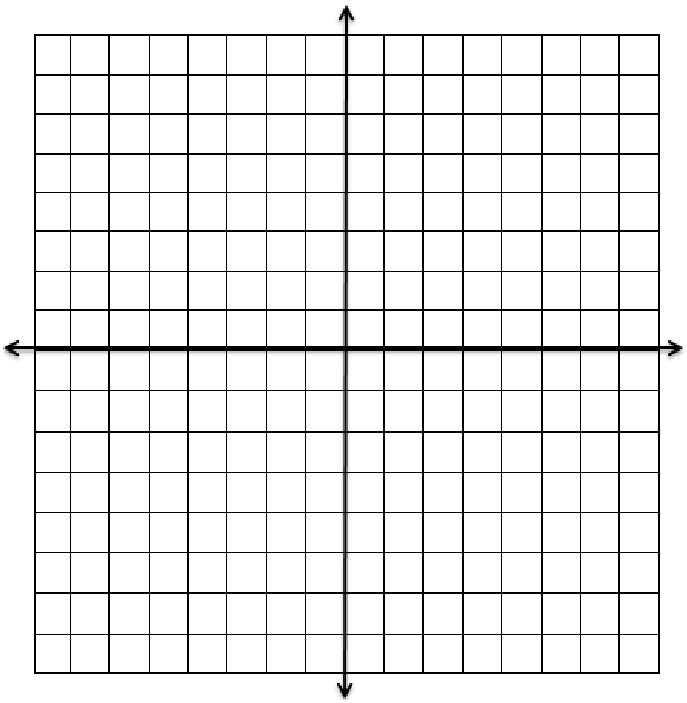
d)



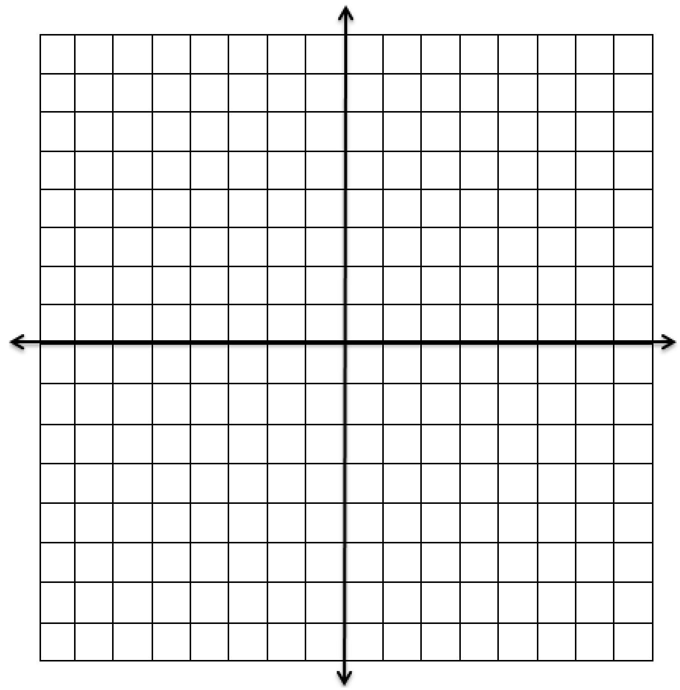
Pratique :

1. Trace les graphiques.

a) $f(x) = \sqrt{x+3} - 2$

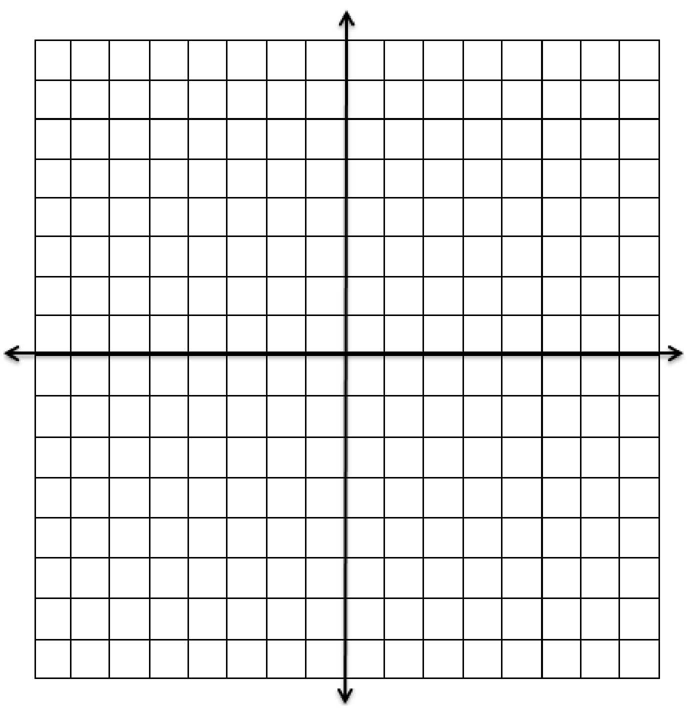


b) $f(x) = \sqrt{x-1} + 3$

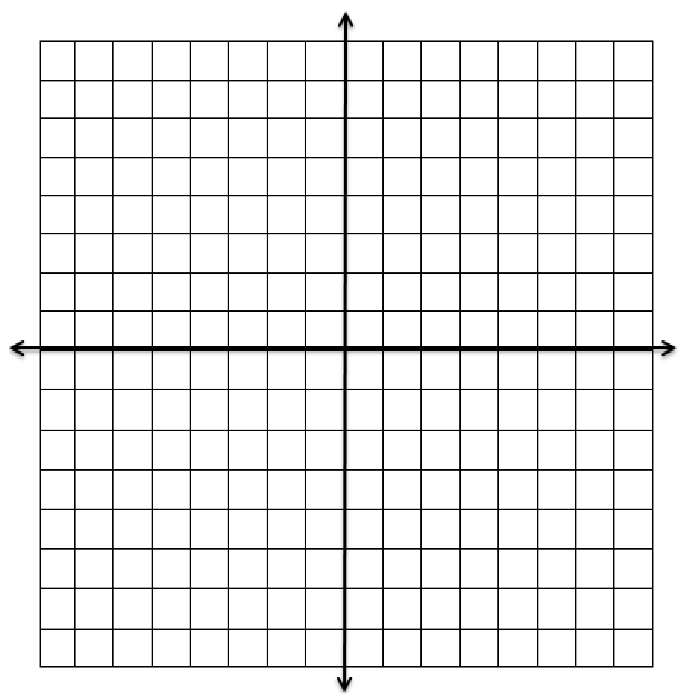


2. Trace les graphiques.

a) $f(x) = -\sqrt{x+2} + 3$

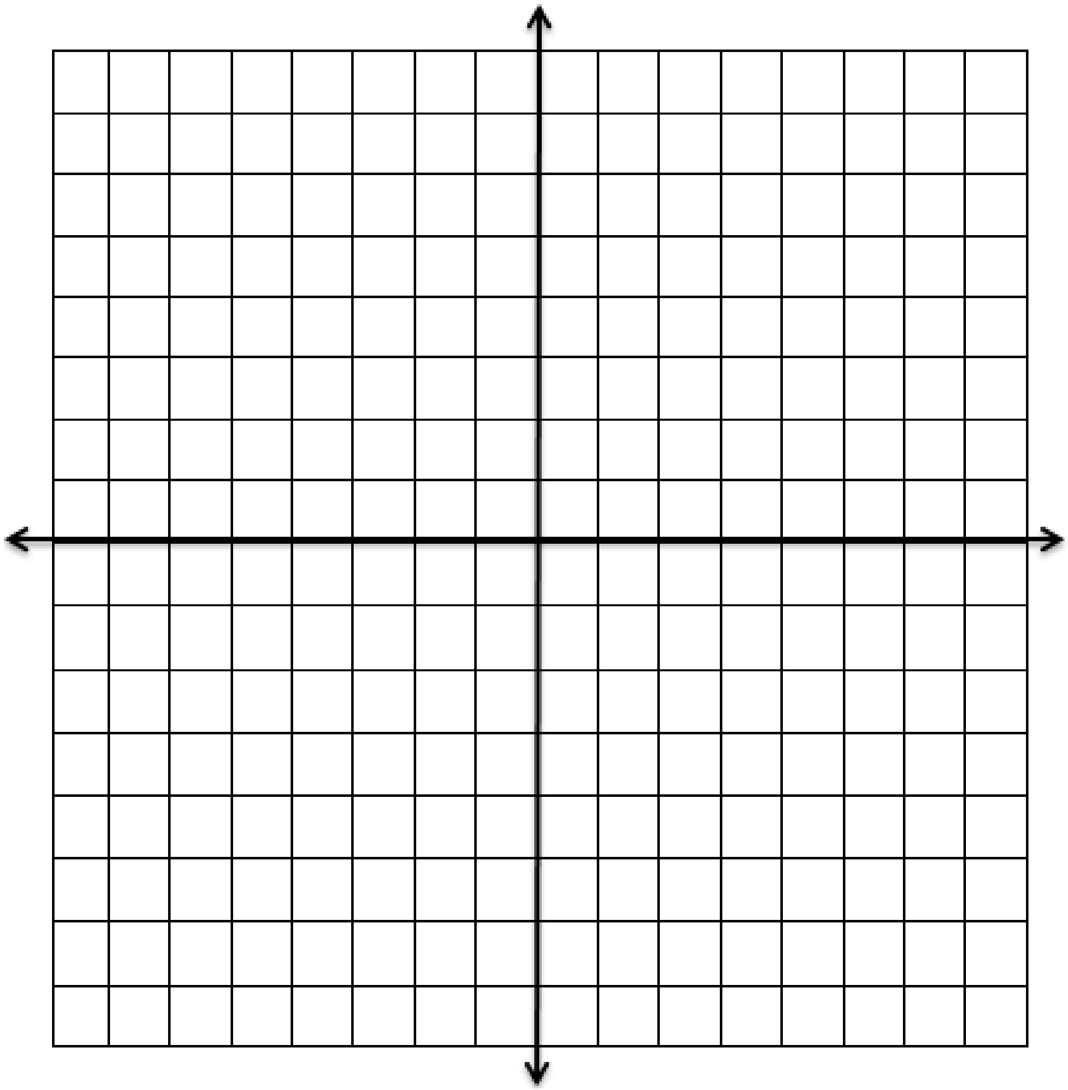


b) $f(x) = 2\sqrt{x-1} - 4$



3. Résous graphiquement.

$$\sqrt{x+5} = -2\sqrt{x+1} + 2$$



Unité

Les Fonctions Rationnelles

Leçon 1 : Les Expressions Rationnelles

Expression Rationnelle :

- Une fraction algébrique dont le numérateur, le dénominateur ou les deux sont des polynômes.
- Ex :

$$\frac{1}{x}, \frac{m}{m+1} \text{ et } \frac{y^2-1}{y^2+2y+1}$$

Les valeurs non permises

- Toute valeur d'une variable qui rend une expression non définie.
- Dans une expression rationnelle, toute valeur qui rend le dénominateur égale à 0.
- Ex : $\frac{1}{x-2}$ $x \neq 2$ pcq : $2 - 2 = 0$ qui donne une solution non-définie (impossible).
- $\frac{x-2}{x+3}$ $x \neq -3$ pcq : $-3 + 3 = 0$ qui donne une solution non-définie (impossible).

Chaque fois que tu utilises une expression rationnelle, tu dois déterminer les valeurs à exclure de la ou des variables, c'est-à-dire les valeurs non permises.

A) Les Valeurs non permises/restrictions (On ne peut pas diviser par 0!)

1. Quelles sont les valeurs non permises des expressions :

a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{1}{2x+6}$ c) $\frac{x+2}{4x-9}$

Il est possible de simplifier des expressions rationnelles mais nous devons tenir compte des valeurs non permises que nous avons simplifié.

2. Simplifie l'expression et nomme les restrictions.

a) $\frac{3(x+1)}{(x+1)(x+2)}$ b) $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

1. Détermine toutes les valeurs non permises dans chaque expression rationnelle (n'oubliez pas : rationnelle signifie qu'il y a un dénominateur).

a) $\frac{5t}{4sr^2}$ b) $\frac{3x}{x(2x-3)}$ c) $\frac{2p-1}{p^2-p-12}$

B) Multiplier et diviser des expressions rationnelles

Quand tu multiplies des expressions rationnelles, tu effectues les mêmes étapes que dans la multiplication de nombres rationnels (fractions).

Multiplication :

Ex : $\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{4}{15}\right) = \frac{(5)(4)}{(8)(15)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

OU

Avec les facteurs en commun :

$$= \frac{(5)(4)}{(2)(4)(3)(5)} = \frac{\cancel{(5)(4)}}{(2)\cancel{(4)}(3)\cancel{(5)}} \quad \frac{1}{(2)(3)}$$

$$= \frac{1}{6}$$

Division :

Ex : $\left(\frac{5}{8}\right) \div \left(\frac{4}{15}\right) = \left(\frac{5}{8}\right) \times \left(\frac{15}{4}\right) = \left(\frac{75}{32}\right)$

2. Effectue la multiplication. Écris la réponse sous forme irréductible. Indique toutes les valeurs non permises.

a)

$$\frac{(x-3)(2x+5)}{(3x-1)} \times \frac{(3x-1)}{(x-3)}$$

b)

$$\frac{a^2-a-12}{a^2-9} \; x \; \frac{a^2-4a+3}{a^2-4a}$$

3. Effectue la division. Écris la réponse sous forme irréductible. Indique toutes les valeurs non permises.

a)

$$\frac{(x+5)(x+2)}{(2x-1)} \div \frac{(x+5)(x-2)}{(2x-1)}$$

b)

$$\frac{x^2-4}{x^2-4x} \div \frac{x^2+x-6}{x^2+x-20}$$

4. Effectue les calculs et indique les valeurs non permises.

$$\frac{2m^2-7m-15}{2m^2-10m} \div \frac{4m^2-9}{6} x(3-2m)$$

C) Additionner ou Soustraire des expressions rationnelles

Pour additionner ou soustraire des expressions rationnelles, suis les mêmes étapes que pour additionner ou soustraire des nombres rationnels.

Cas 1 : Les dénominateurs sont identiques

- Si deux expressions rationnelles ont le même dénominateur, additionne ou soustrais les numérateurs. Écris la réponse sous la forme d'une expression rationnelle simplifiée constituée du nouveau numérateur et du dénominateur commun.

5. a)

$$\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

b)

$$\frac{4}{x+3}+\frac{2x+1}{x+3}=\frac{4+2x+1}{x+3}=\frac{2x+5}{x+3}$$

Cas 2 : Les dénominateurs sont différents

- Pour additionner ou soustraire des nombres rationnels ayant des dénominateurs différents, tu dois écrire des nombres rationnels équivalents qui ont le même dénominateur.

6. a)

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{4\,(3)}{5\,(3)}-\frac{2(5)}{3(5)}=\frac{12}{15}-\frac{10}{15}=\frac{2}{15}$$

b)

$$\frac{3}{4}-\frac{x-1}{4x+4}$$

$$\frac{3}{4}-\frac{x-1}{4(x+1)}$$

$$\frac{3(x+1)}{4(x+1)}-\frac{x-1}{4(x+1)}$$

$$\frac{3x+3-(x-1)}{4(x+1)}$$

$$\frac{2x+4}{4x+4}=\frac{\cancel{2}(x+2)}{\cancel{2}(2x+2)}=\frac{x+2}{2x+2}$$

Pratique :

1. Détermine-la ou les valeurs non permises dans chaque expression rationnelle.

a) $\frac{x-1}{(x+2)(x-3)}$

b) $\frac{2y^2}{y^2-4}$

2. Simplifie chaque expression rationnelle. Indique les valeurs non permises.

a) $\frac{3x-6}{2x^2+x-10}$

b) $\frac{1-t}{t^2-1}$

3. Effectue les calculs et indique les valeurs non permises.

a) $\frac{y^2-9}{r^3-r} \; x \; \frac{r^2-r}{y+3}$

b) $\frac{c^2-6c-7}{c^2-49} \div \frac{c^2+8c+7}{c^2+7c}$

c)

$$\frac{3x+12}{3x^2-5x-12} \div \frac{12}{3x+4} \, x \, \frac{2x-6}{x+4}$$

4. Détermine chaque somme ou différence. Exprime chaque réponse sous sa forme la plus simple. Indique toutes les valeurs non permises.

a) $\frac{2a}{b} - \frac{a-1}{b}$ b) $\frac{2x}{x+4} + \frac{8}{x+4}$ c) $\frac{x^2}{x-2} + \frac{3x}{x-2} - \frac{10}{x-2}$

5. Additionner ou soustraire des expressions rationnelles ayant des dénominateurs différents. Simplifie le plus possible chaque expression.

a) $\frac{2x}{xy} + \frac{4}{x^2} - 3$, où $x \neq 0$ et $y \neq 0$ b) $\frac{y^2-20}{y^2-4} + \frac{y-2}{y+2}$, où $y \neq \pm 2$

6. Simplifie chaque expression. Quelles sont les valeurs non permises ?

a) $\frac{4}{p^2-1} + \frac{3}{P+1}$ b) $\frac{x-1}{x^2+x-6} - \frac{x-2}{x^2+4x+3}$

Leçon 2 : Résous les Équations Rationnelles

Équation Rationnelle :

- Une équation qui contient au moins une expression rationnelle.
- Ex :

$$x = \frac{x-3}{x+1} \quad \text{et} \quad \frac{x}{4} - \frac{7}{x} = 3$$

A) Équations simples :

1. Résous et détermine la valeur non permise.

$$\frac{3}{x+4} = 8$$

B) Équations plus complexes : il faut multiplier par le plus petit dénominateur commun (PPCD). Attention aux valeurs étrangères !

Étape 1 : Décompose chaque dénominateur en facteurs

Étape 2 : Détermine les valeurs non permises.

Étape 3 : Multiplie les deux membres de l'équation par le plus petit dénominateur commun (PPDC).

C'est le même concept que le plus petit commun multiple en mathé 11^e.

(Ceci te permet d'annuler les dénominateurs.)

Étape 4 : Isole la variable dans un membre de l'équation pour déterminer sa valeur.

Étape 5 : Vérifie ta réponse

2. Résous et détermine les valeurs non permises.

a) $\frac{x}{4} - \frac{7}{x} = 3$

b) $\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{10}{6x+12} = \frac{1}{x-2}$

3. Résous l'équation. Quelles sont les valeurs non permises ?

$$\frac{4k-1}{k+2} - \frac{k+1}{k-2} = \frac{k^2-4k+24}{k^2-4}$$

Pratique :

1. Résous l'équation. Quelles sont les valeurs non permises ?

$$\frac{9}{y-3}-\frac{4}{y-6}=\frac{18}{y^2-9y+18}$$

2. Résous l'équation. Quelles sont les valeurs non permises ?

$$\frac{3x}{x+2}-\frac{5}{x-3}=\frac{-25}{x^2-x-6}$$

Leçon 3 : Les Fonctions Rationnelles/ Les Fonctions inverses

Une fonction inverse :

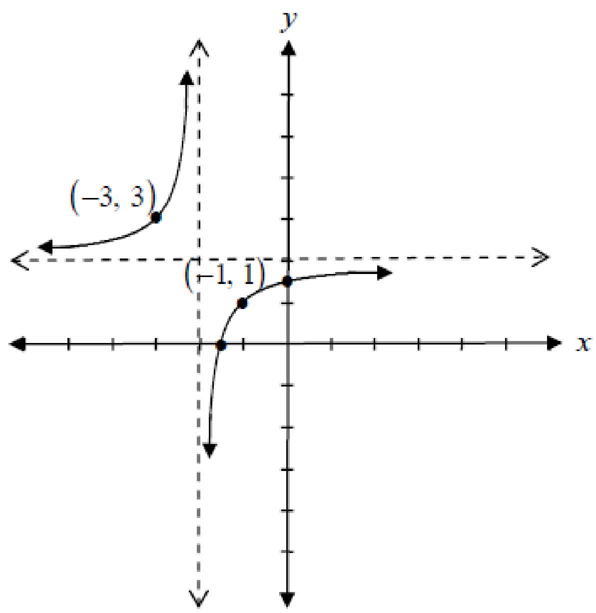
- Une fonction $y = \frac{1}{f(x)}$ définie par $y = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{b}\ si\ f(a) = b. f(a) \neq 0 et\ b \neq 0$

- y = x est une fonction linéaire. $y = \frac{1}{x}$ est une fonction rationnelle.

Asymptote : une droite telle que la distance d'une courbe à cette droite tend vers zéro. Le graphique ne peut pas toucher la valeur de l'asymptote.

Asymptote verticale :

- Pour les fonctions inverses, une asymptote qui correspond aux valeurs non permises de la fonction.
- La droite x = a est une asymptote verticale si la courbe s'en approche de plus en plus lorsque x tend vers a et si les valeurs de la fonction augmentent ou diminuent sans limite lorsque x tend vers a.

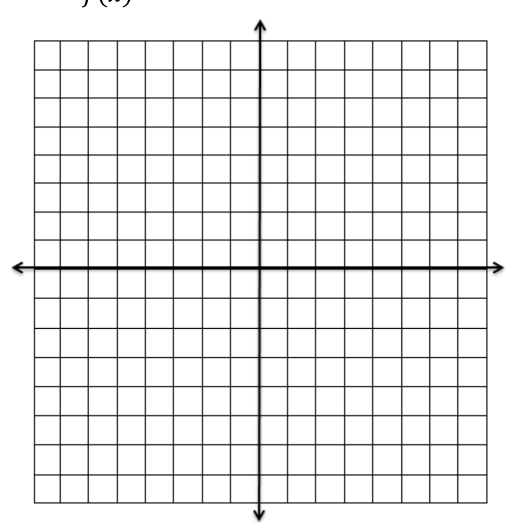


Asymptote horizontale :

- Une asymptote qui décrit le comportement d'un graphique pour de très grandes valeurs absolues de x.
- La droite y = b est une asymptote horizontale si les valeurs de la fonction tendent vers b lorsque x à une très grande valeur absolue.

A) Trace la fonction inverse à partir d'une équation originale.

1. a) Trace le graphique de f(x) = x et celui de la fonction inverse $y = \frac{1}{f(x)}$. Examine la relation entre les fonctions.



b) Indique les asymptotes

Asymptote vertical : x =

Asymptote horizontal y =

c) Détermine le domaine et l'image.

Domaine : ____________________

Image : _________________________

d) Indique les points invariants.

e) Détermine les coordonnées à l'origine.

Directives pour représenter graphiquement des fonctions rationnelles.

Si p(x) et q(x) sont des polynômes n'ayant aucun facteur commun.

1. **Trouvez** et marquez **l'ordonnée** à l'origine « y » en évaluant **f(0)**. N'oubliez pas que l'ordonnée à l'origine y est un point sur l'axe des y et que par conséquent x est 0.

2. **Trouvez** les **zéros** du numérateur en résolvant l'équation **p(x) = 0.** Marquez alors les abscisses à l'origine x correspondantes.

3. Il peut être difficile de représenter graphiquement des fonctions rationnelles uniquement par des points de marquage. Si vous **identifiez** les discontinuités, y compris les **asymptotes**, avant de faire la représentation graphique, cela peut vous aider à trouver les principales caractéristiques de sorte que vous pouvez faire une esquisse raisonnable.

4. **Tracez** les **asymptotes verticales** correspondantes en résolvant l'équation du dénominateur q(x) = 0 pour trouver les **zéros du dénominateur** (valeurs non permises). La représentation graphique de f(x) a une asymptote verticale à chaque zéro réel de q(x).

5. **Trouvez et tracez l'asymptote horizontale** (le cas échéant) en utilisant la règle suivante pour trouver l'asymptote horizontale : $y = \frac{\boldsymbol{p(x)}}{\boldsymbol{q(x)}}$.

La représentation graphique de f(x) a au maximum une asymptote horizontale.

a) **Si le degré de p(x) est inférieur au degré de q(x), alors la droite y = 0 est l'asymptote horizontale. Exemple :** $\boldsymbol{y = \frac{x}{2x^2-4}}$. **Asymptote horizontal y = 0**

b) **Si le degré de p(x) = degré de q(x), alors la droite y = a/b est une asymptote horizontale où a est le coefficient principal de p(x) et b est le coefficient principal de q(x).**
Exemple : $\boldsymbol{y = \frac{6x}{3x-4}}$. **Asymptote horizontal y = 6/3 = 2 y = 2**

c) **Si le degré de p(x) est supérieur au degré de q(x), la représentation graphique ne comporte aucune asymptote horizontale. Exemple :** $\boldsymbol{y = \frac{3x^2}{x-4}}$.

6. **Utilisez l'analyse des signes** pour illustrer là où la portion de la fonction est négative et là où elle est positive.

7. **Utilisez des courbes lisses** pour compléter la représentation graphique entre les asymptotes verticales et au-delà.

2. Soit f(x) = 2x + 5.

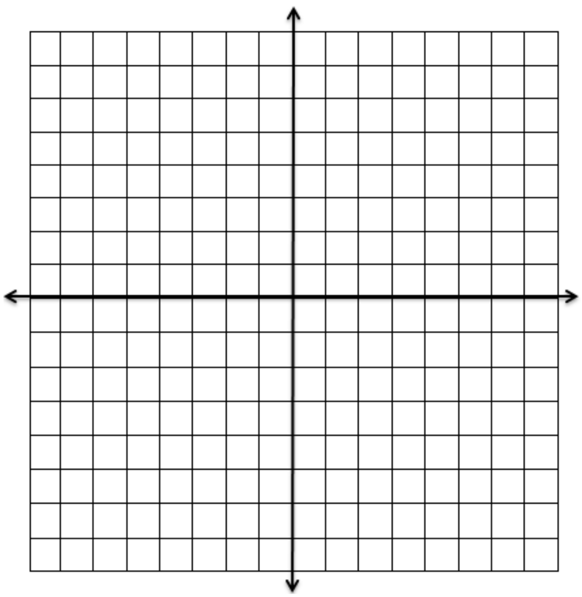
a) Détermine la fonction inverse, $y = \frac{1}{f(x)}$.

b) Détermine l'équation de l'asymptote verticale et horizontale de la fonction inverse.

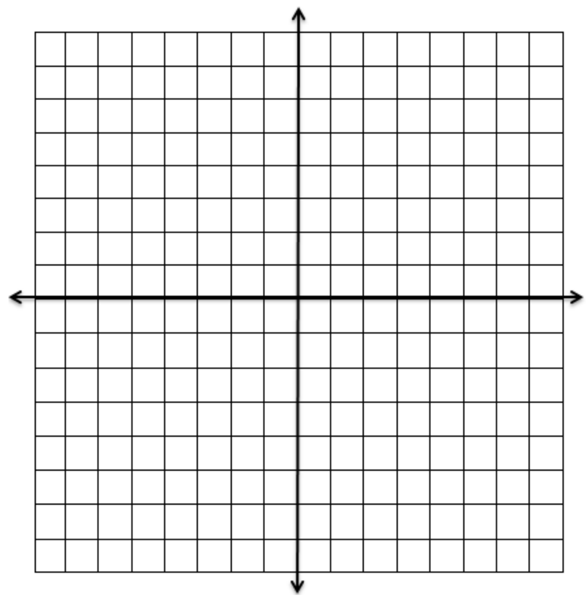
c) Trace le graphique de la fonction f(x) = 2x + 5 et celui de son inverse $y = \frac{1}{f(x)}$.

d) Détermine le domaine et l'image.

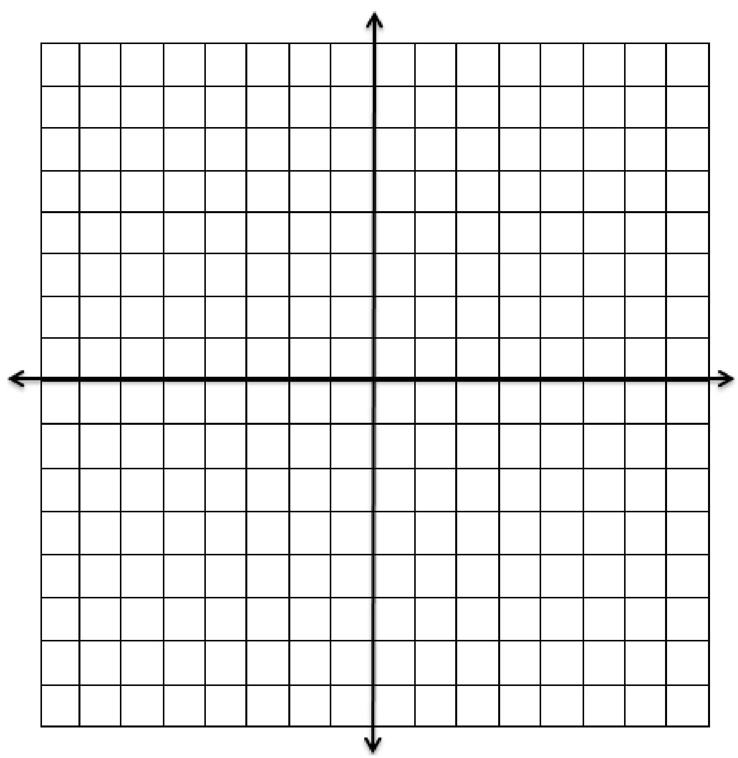
Méthode 1 :



Méthode 2 :



3. a) Trace le graphique de $y = \frac{1}{f(x)}$.
Si f(x) = $x^2 - 4$



b) Détermine la fonction inverse, $y = \frac{1}{f(x)}$.

c) Détermine l'équation de l'asymptote verticale et horizontale de la fonction inverse.

d) Détermine le domaine et l'image.

Domaine : ________________________

Image : __________________________

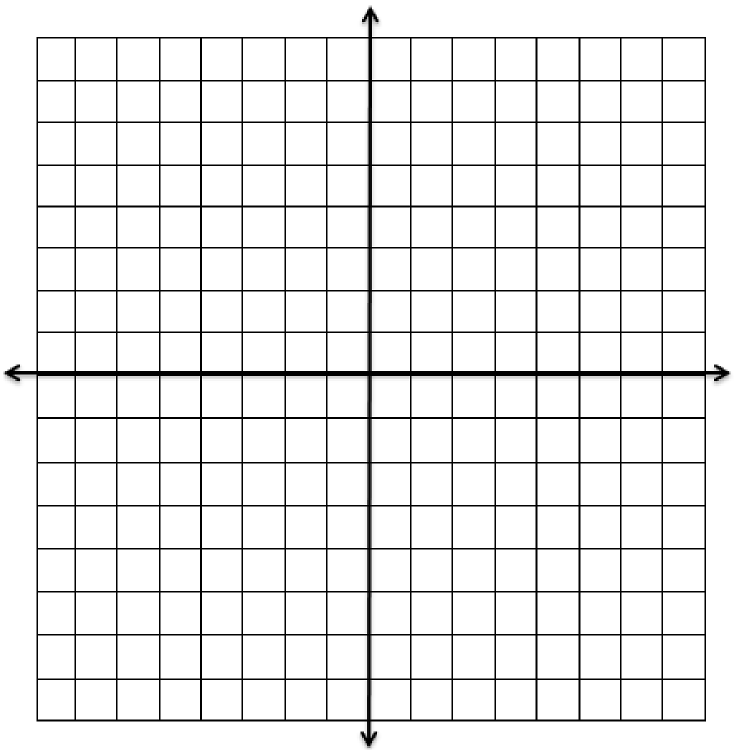
4. Soit $f(x) = x^2 + 1$

a) Détermine la fonction inverse, $y = \frac{1}{f(x)}$.

b) Détermine l'équation de l'asymptote verticale et horizontale de la fonction inverse.

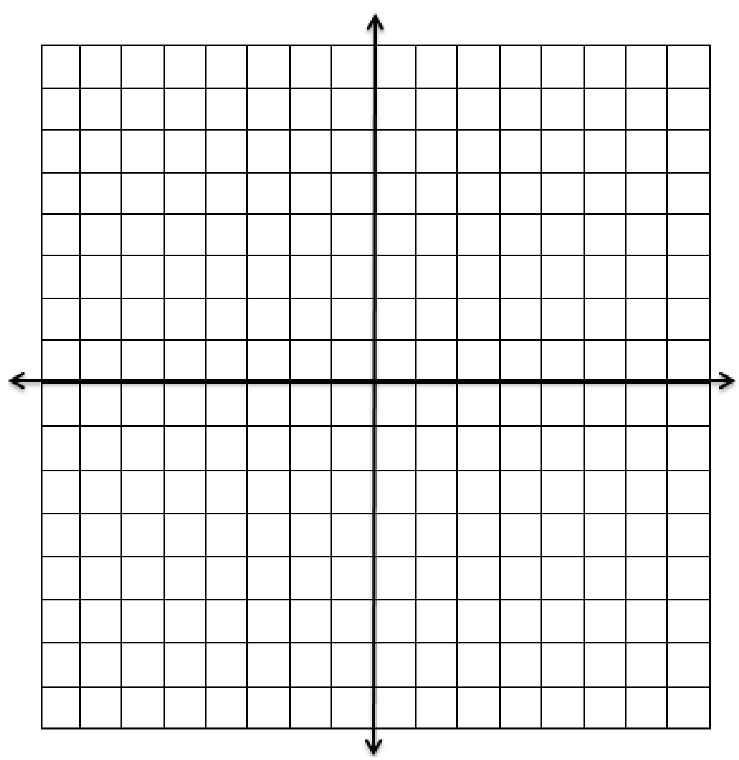
c) Trace le graphique de la fonction $f(x) = 2x + 5$ et celui de son inverse $y = \frac{1}{f(x)}$.

d) Détermine le domaine et l'image.



En plus :

5. a) Trace le graphique de $y = \frac{4x+1}{2x-6}$

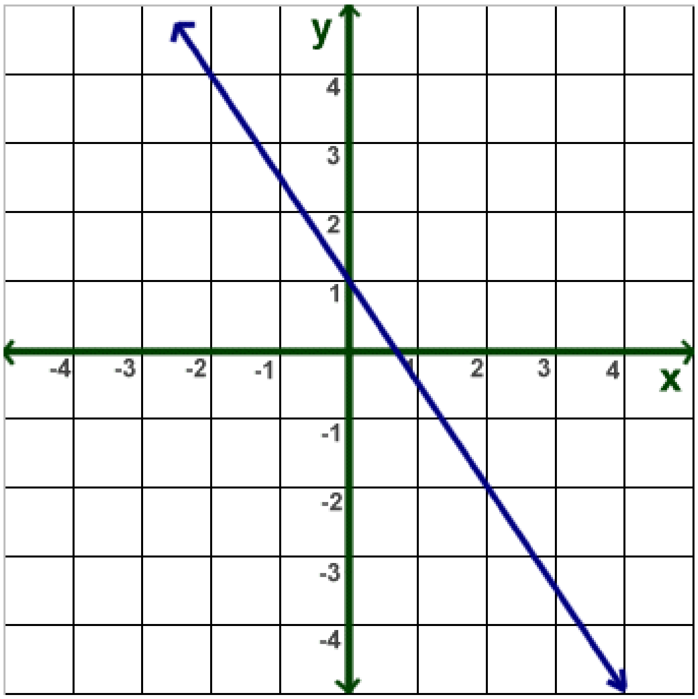


b) Détermine les asymptotes.

c) Détermine le domaine et l'image.

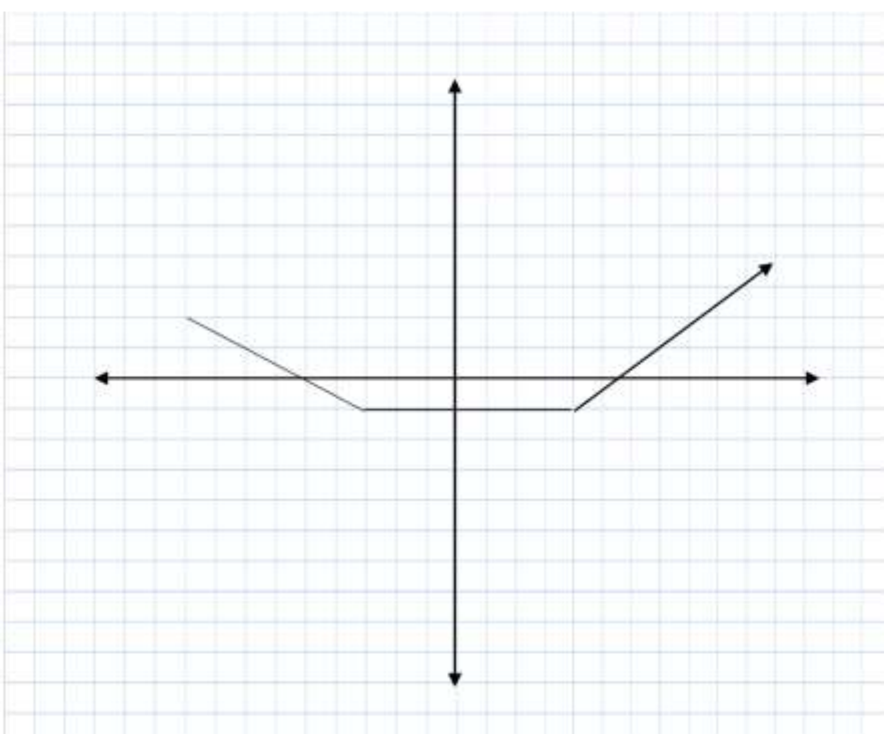
B) Trace la fonction inverse à partir d'un graphique.

6. Soit le graphique de la fonction y = f(x) ci-dessous.



Trace un graphique clairement étiqueté de $y = \frac{1}{f(x)}$.

7. a) Étant donné le graphique de f(x) ci-dessous, trace le graphique de $y = \frac{1}{f(x)}$.

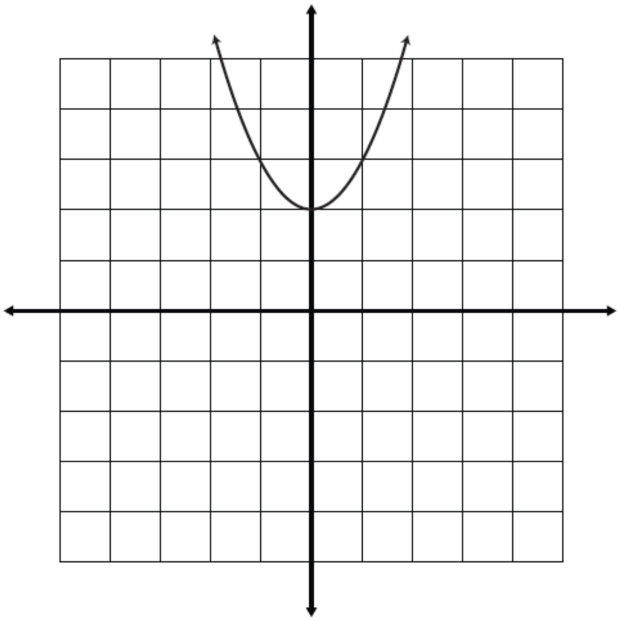


b) Détermine le

Domaine : ____________________

Image : ____________________

8. Soit le graphique de la fonction y = f(x) ci-dessous.



a) Trace un graphique clairement étiqueté de $y = \frac{1}{f(x)}$.

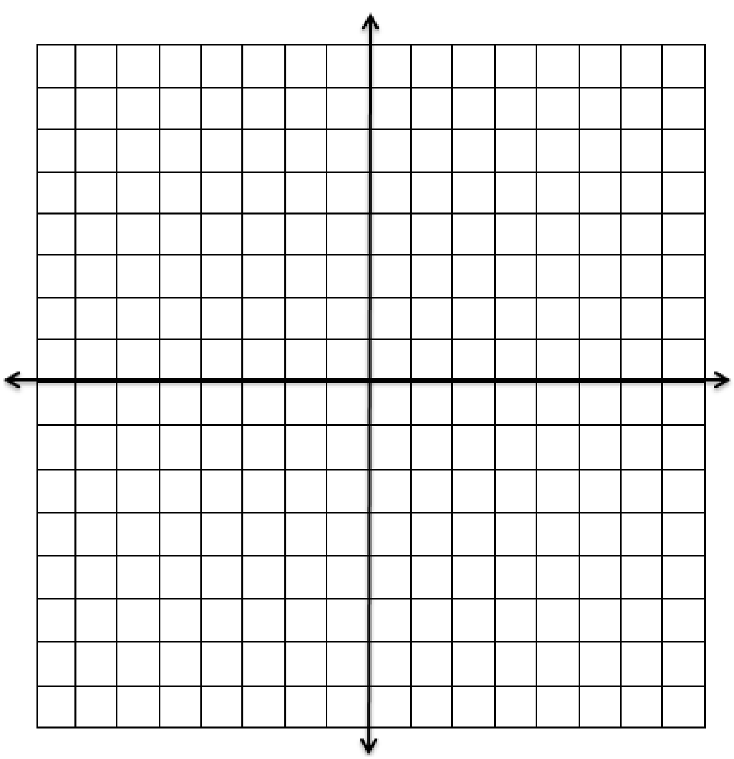
b) Détermine le :

Domaine : ______________________

Image : ______________________

Pratique

1. Trace le graphique de f(x) = x et celui de son inverse $y = \frac{1}{f(x)}$. Examine la relation entre les fonctions.



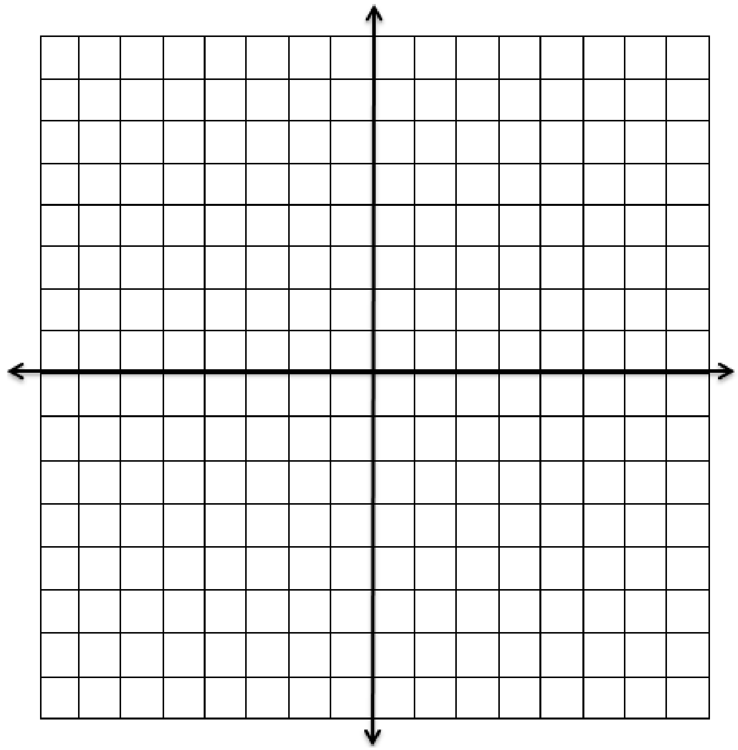
2. Soit f(x) = 3x – 9.

a) Détermine la fonction inverse, $y = \frac{1}{f(x)}$.

b) Détermine l'équation de l'asymptote verticale et horizontale de la fonction inverse.

c) Trace le graphique de la fonction y = f(x) et celui de son inverse $y = \frac{1}{f(x)}$.

d) Détermine le domaine et l'image de la fonction inverse.

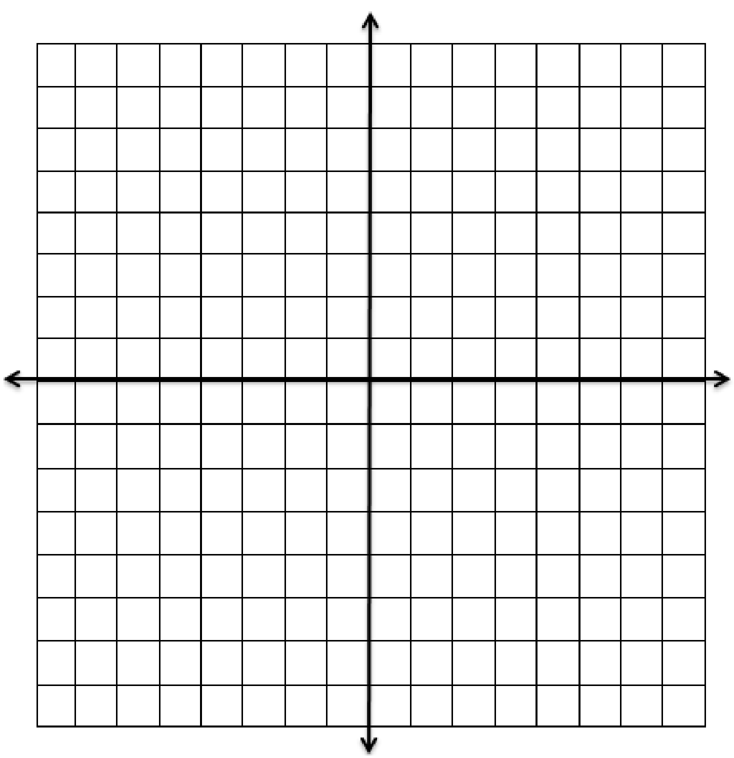


3. Soit $f(x) = x^2 + x - 6$.

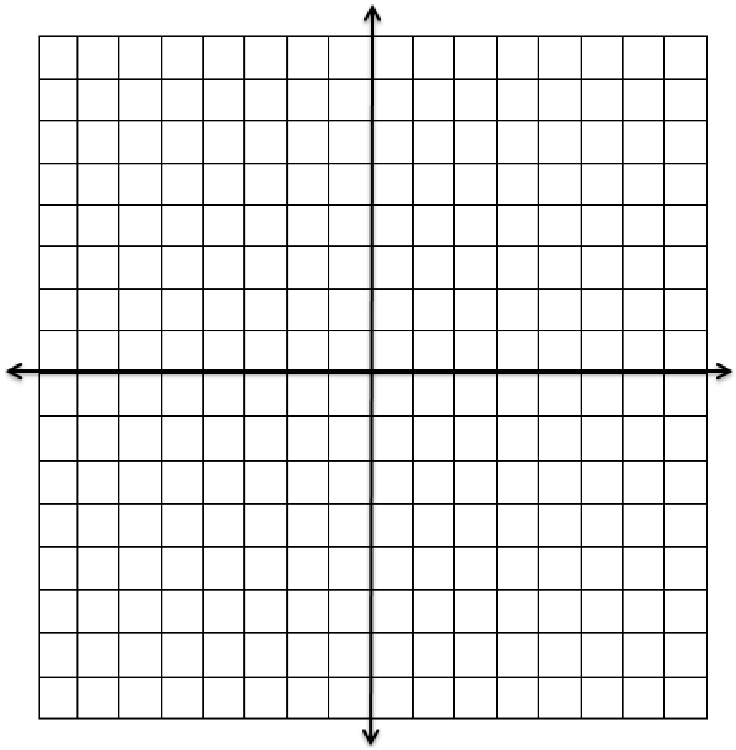
a) Quelle est la fonction inverse de f(x) ?

b) Détermine les valeurs non permises de x, ainsi que l'équation de toute asymptote verticale et horizontale de la fonction inverse.

c) Quelles sont les abscisses à l'origine et l'ordonnée à l'origine du graphique de la fonction inverse ?



4. a) Trace le graphique de $y = \frac{2x+3}{-x+4}$

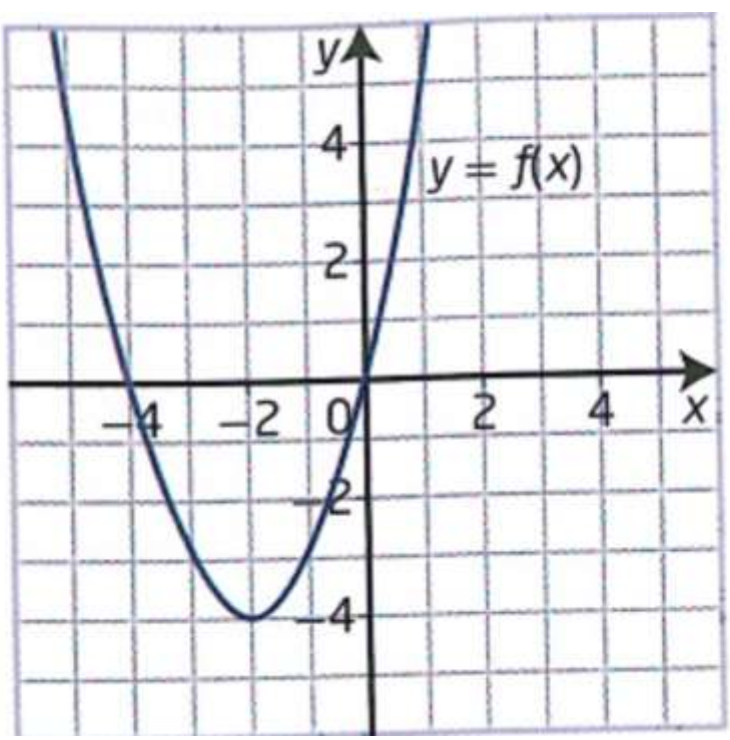


b) Détermine les asymptotes.

c) Détermine l'ordonnée et l'abscisse à l'origine.

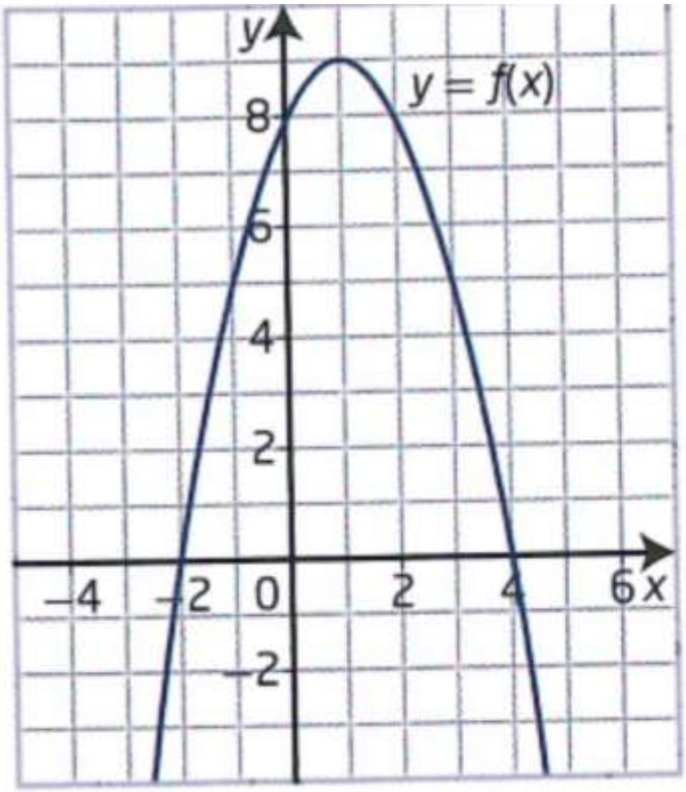
d) Détermine le domaine et l'image.

5. Soit le graphique de la fonction y = f(x) ci-dessous.



Trace un graphique clairement étiqueté de $y = \frac{1}{f(x)}$.

6. Soit le graphique de la fonction y = f(x) ci-dessous.



a) Trace un graphique clairement étiqueté de $y = \frac{1}{f(x)}$.

b) Détermine le domaine et l'image.

Domaine : ___________________________

Image : _____________________________

Unité
Les Systèmes d'inéquations linéaires et quadratiques

Inéquation :

- Un énoncé qui comporte une relation d'inégalité et contient au moins une inconnue (ou variable)

- $Ax + By < C$
- $Ax + By \leq C$
- $Ax + By > C$
- $Ax + By \geq C$

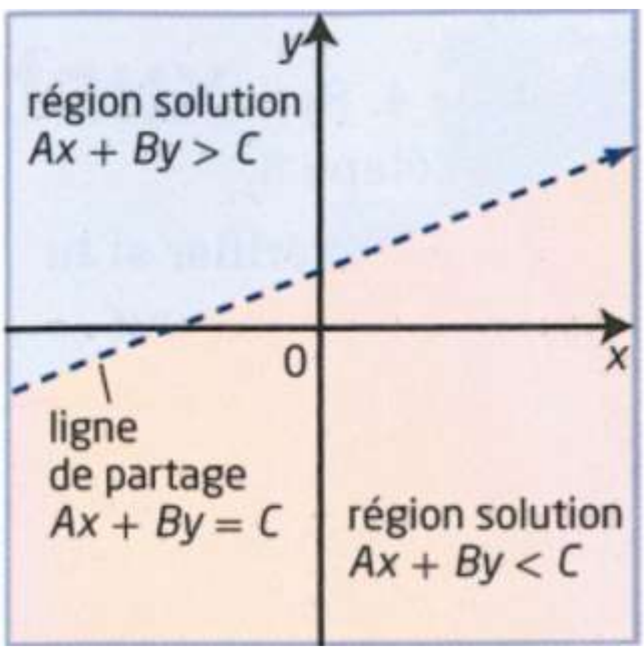
où A, B et C sont des nombres réels.

Région solution :

- Tous les points du plan cartésien qui satisfont une inéquation.
- Aussi appelée ensemble solution.
- Dans le cas d'une inéquation linéaire, la région solution est un demi-plan

Ligne de partage :

- Une droite ou une courbe qui divise le plan cartésien en deux régions.
- Elle peut faire partie ou non de la région solution.
- La ligne de partage est une ligne continue et fait partie de la région solution si le signe d'inégalité est $\leq ou \geq$.
- La ligne de partage est une ligne pointillée et ne fait pas partie de la région solution si le signe d'inégalité est $< ou >$.



- Le graphique d'une droite sépare le plan en trois zones distinctes : deux demi-plans et la droite elle-même. La droite elle-même est la droite de délimitation de chaque demi-plan. Elle divise le plan des coordonnées en deux demi-plans.

- Une inéquation linéaire à une droite de délimitation qui peut être exprimée sous la forme y= mx + b. La solution d'une inéquation linéaire est l'ensemble de tous les points qui rendent l'inégalité vraie.

- Quand l'inégalité est $\leq$ ou $\geq$ la solution comprend les points de la droite de délimitation et le graphique comportera une droite de délimitation continue.

- Quand l'inégalité est $<$ ou $>$, la solution ne comprend pas les points de la droite de délimitation et le graphique comportera une droite de délimitation pointillée.

Leçon 1 : Résolutions des inéquations linéaires et quadratiques à une variable par la méthode algébrique

A) Les inéquations linéaires à une variable (résolution algébrique).

1. Résoudre les inéquations suivantes.

a) $-2x + 7 \leq 11$

b) $2x + \frac{3}{5} > 1 - \frac{x-3}{2}$

B) Les inéquations quadratiques de la forme $ax^2 + bx + c \leq 0$.

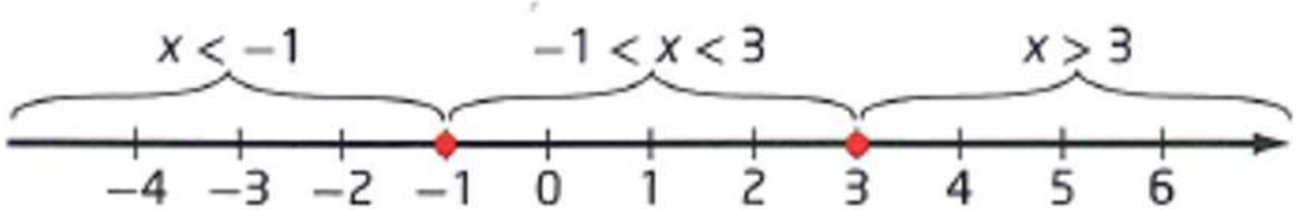
2. Résous $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

Méthode 1 : Utilise les racines et des points d'essai.

Étape 1 : Détermine les racines.

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$(x + 1)(x - 3) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -1 \qquad\qquad x = 3$$

Étape 2 : Créer une droite numérique et trouve les intervalles des racines.



Étape 3 : Choisir les points de x qui se trouvent entre les intervalles pour voir ou l'inéquation est vrai ou faux.

$(x + 1)(x - 3) \leq 0$	$(x + 1)(x - 3) \leq 0$	$(x + 1)(x - 3) \leq 0$
$(-2 + 1)(-2 - 3) \leq 0$	$(0 + 1)(0 - 3) \leq 0$	$(4 + 1)(4 - 3) \leq 0$
$(-1)(-5) \leq 0$	$(1)(-3) \leq 0$	$(5)(1) \leq 0$
$5 \not\leq 0$	$-3 \leq 0$	$5 \not\leq 0$

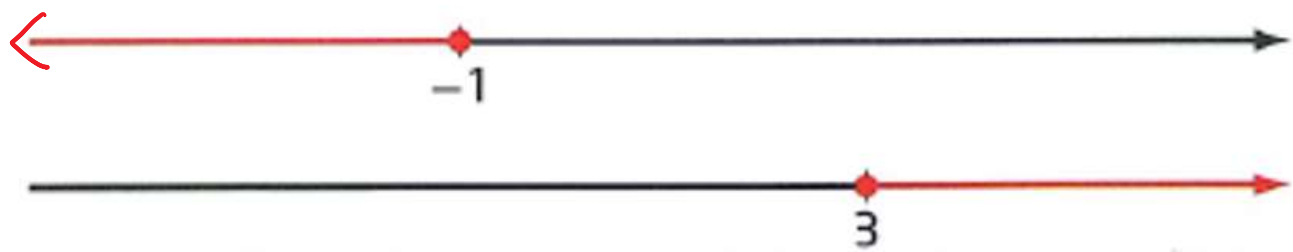
Ces inéquations sont vraies pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et 3 inclusivement.

Méthode 2 : Utilise l’analyse de cas

Étape 1 : Décompose l’expression de degré 2 en facteurs et réécris l’inéquation sous la forme factorisée.
$(x + 1)(x - 3) \leq 0$

Étape 2 : Décider les signes de chaque facteur pour que l’inéquation soit vrai.

Le produit de deux facteurs est négatif lorsque les facteurs ont des signes opposés.
Cas 1 : Le premier facteur est négatif et le second est positif.
Alors :
$(x + 1) \leq 0$ et $(x - 3) \geq 0$
$x \leq -1$ et $x \geq 3$



Toute valeur de x qui satisfait ces deux conditions fait partie de l’ensemble solution.
Il n’y a aucune valeur de x qui satisfait ces deux inéquations.

Cas 2 : Le premier facteur est positif et le second est négatif.
Alors :
$(x + 1) \geq 0$ et $(x - 3) \leq 0$
$x \geq -1$ et $x \leq 3$

Étape 3 : Choisir l’intervalle qui donne une inéquation qui est vraie.

Ces inéquations sont vraies pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et 3 inclusivement.

L’ensemble solution est donc $\{x \in R | -1 \leq x \leq 3\}$.

C) Les inéquations linéaires et quadratiques rationnelle.

3. Résous.

a) $\frac{2x+3}{x+2} \leq 0$

b) $\frac{(x-2)(x+3)}{x-4} > 0$

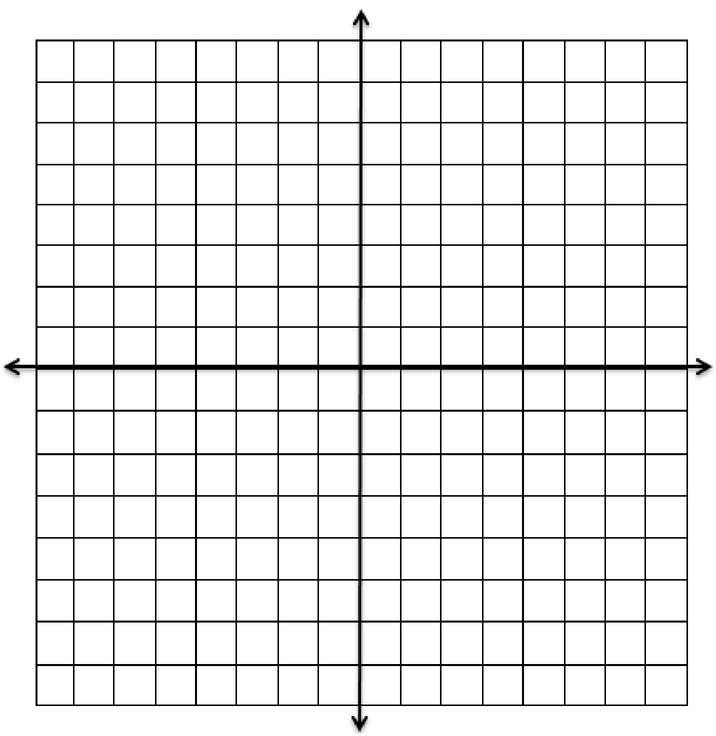
Leçon 2 : Les inéquations linéaires à deux variables

A) Les inéquations linéaires à deux variables sous la forme $Ax + By \leq C$

Point d'essai :

- Un point qui n'appartient pas à la ligne de partage du graphique d'une inéquation et qui est représentatif de tous les points d'une région.
- Un point qui sert à déterminer si les coordonnées des points d'une région satisfont l'inéquation.

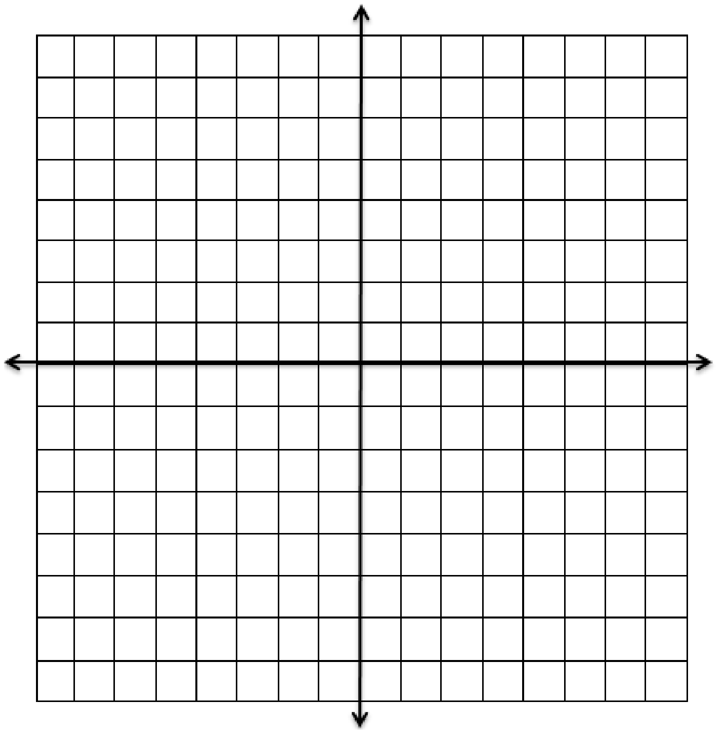
1. Représente graphiquement $2x + 3y \leq 6$



b) Détermine si le point (-2, 4) fait partie de la région solution.

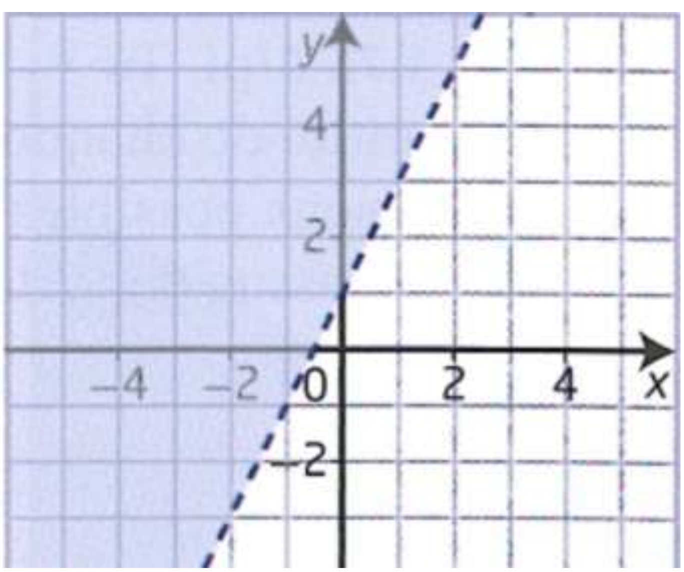
B) Les inéquations linéaires à deux variables sous la forme $Ax + By > C$

2. Représente graphiquement $10x - 5y > 0$. b) Détermine si le point (2, 4) fait partie de la région solution



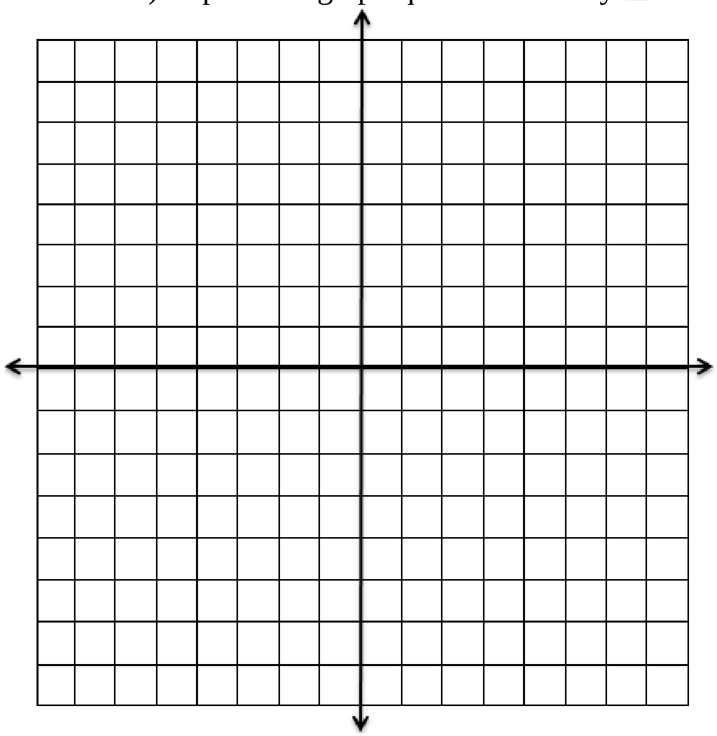
C) Écrire une inéquation à partir de son graphique.

3. Écris une inéquation qui correspond au graphique ci-dessous.

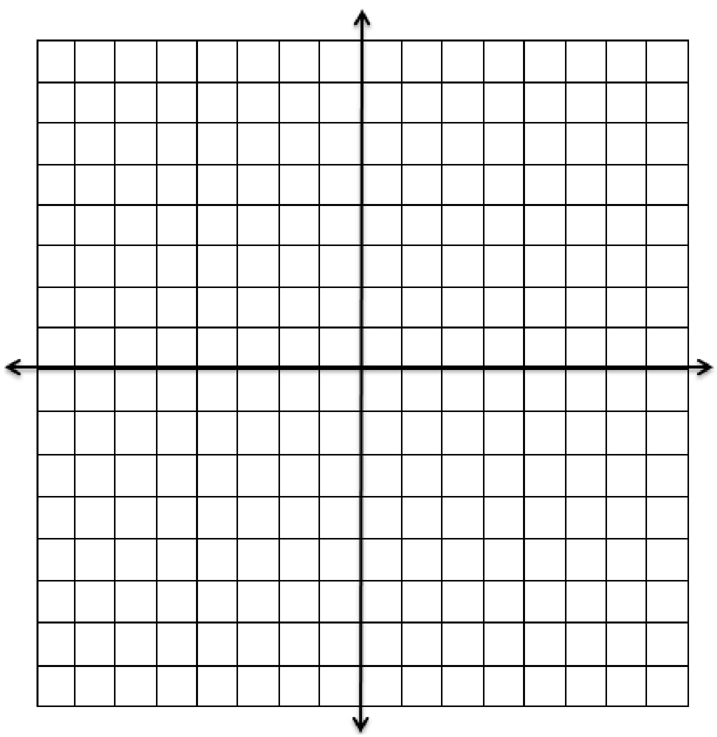


Pratique :

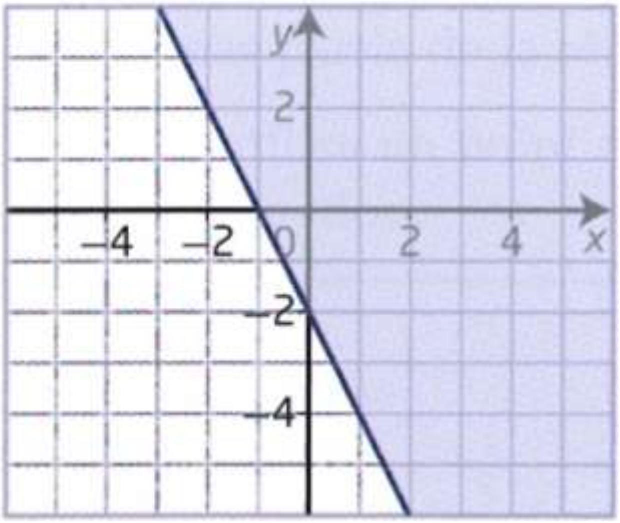
1. a) Représente graphiquement $4x + 2y \geq 10$. b) Détermine si le point (1, 3) fait partie de la région solution.



2. a) Représente graphiquement $5x - 20y < 0$. b) Détermine si le point (8, 2) fait partie de la région solution.



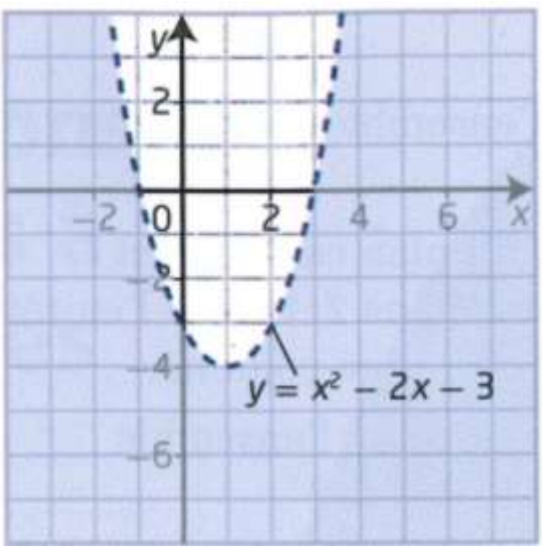
3. Écris une inéquation qui correspond au graphique ci-dessous.



Leçon 3 : Les inéquations quadratiques à deux variables (graphiquement)

Une inéquation quadratique à une variable peut prendre l'une ou l'autre des quatre formes suivantes

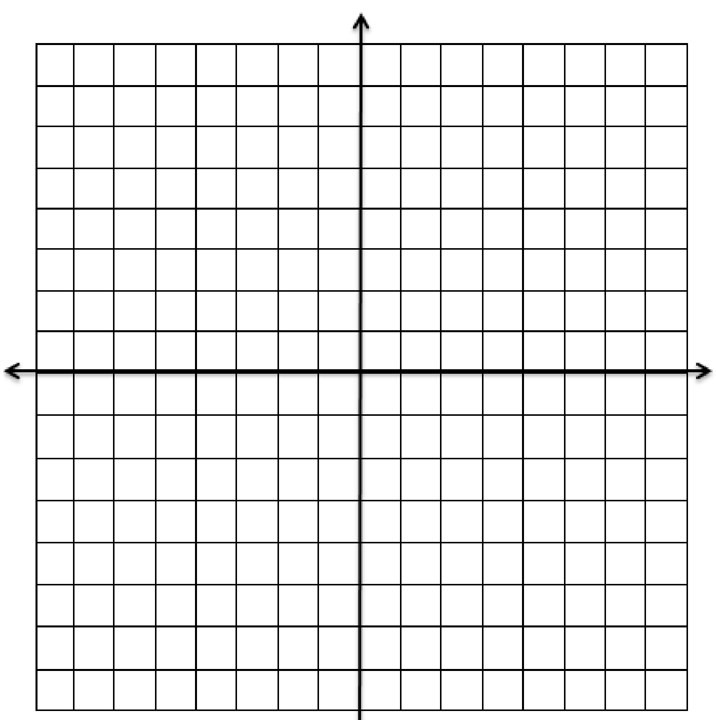
Exemple : $y < x^2 - 2x - 3$



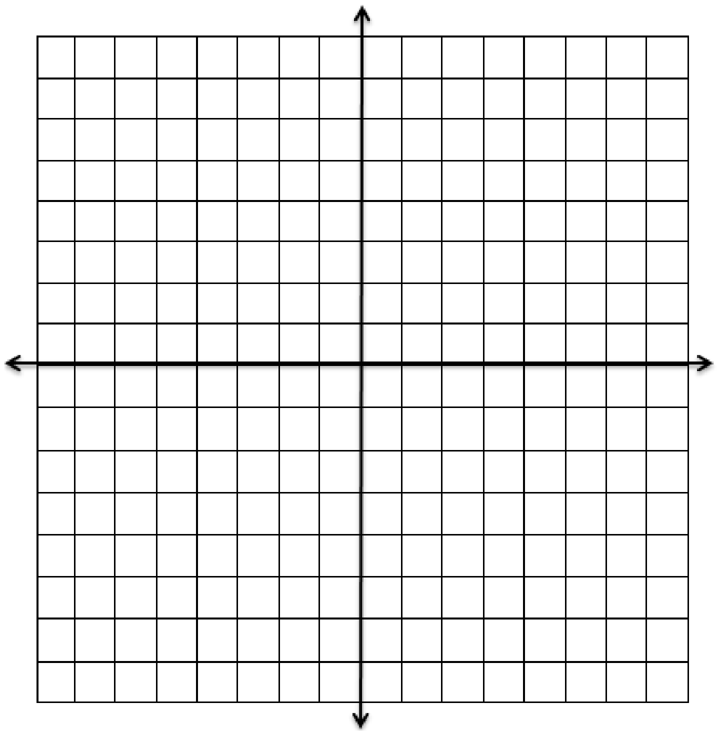
M.G.	M.D.
y	$x^2 - 2x - 3$
$= 0$	$= 0^2 - 2(0) - 3$
	$= -3$

M.G. $\nless$ M.D.

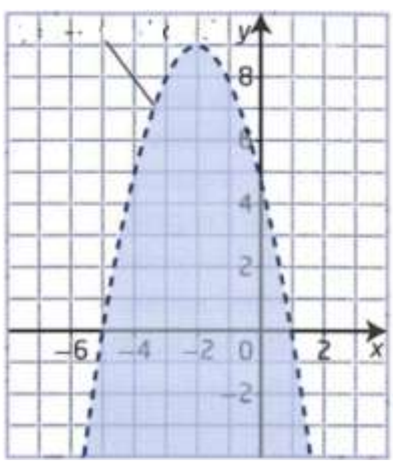
1. a) Représenter graphiquement $y < -2(x-3)^2 + 1$ b) Détermine si (2, -4) est une solution de l'inéquation.



2. Représente graphiquement $y \geq x^2 - 4x - 5$.

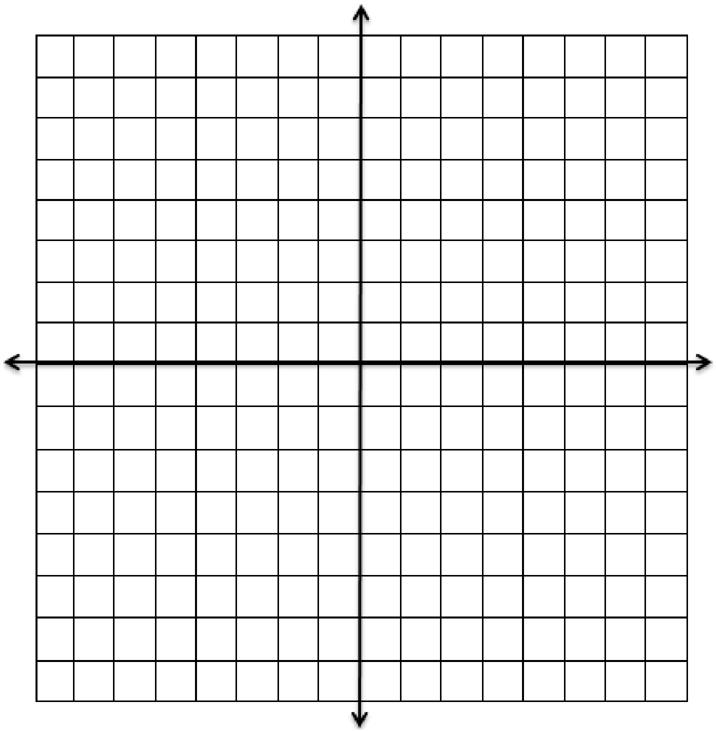


3. Écris une inéquation qui correspond au graphique.



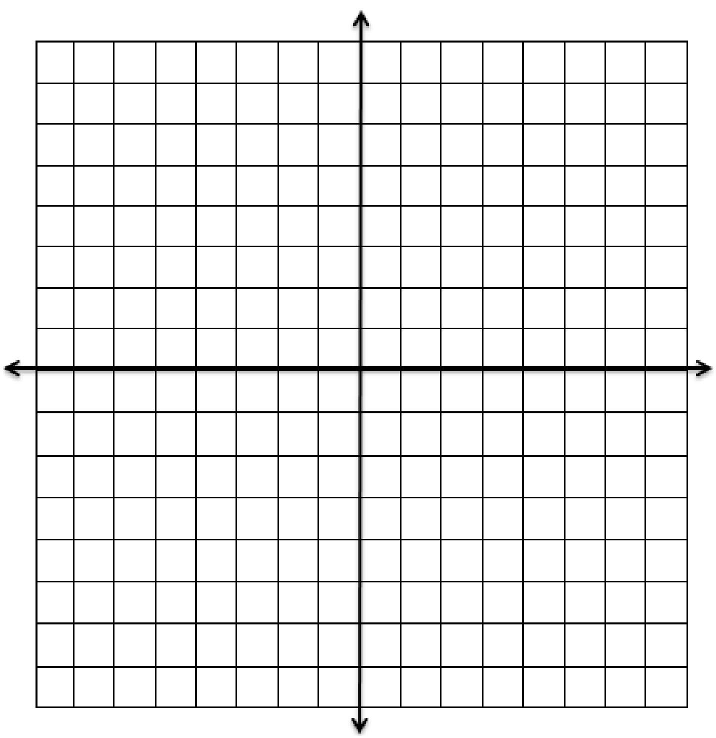
Pratique :

1. a) Représenter graphiquement $y < (x - 4)^2 - 2$

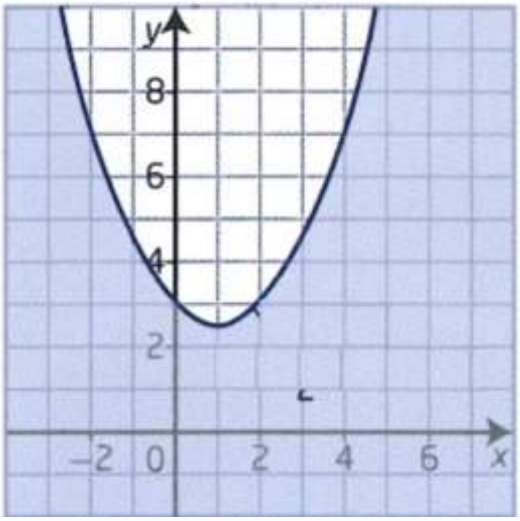


b) Détermine si (2, 1) est une solution de l'inéquation.

2. Représente graphiquement $y \leq x^2 + 2x + 4$



3. Écris une inéquation qui correspond au graphique.



Unité
Les Suites et les Séries

Leçon 1 : Suite Arithmétique (SA)

Une suite est une liste ordonnée d'objets. Ses éléments, appelés « termes », respectent une régularité ou une règle qui permet de déterminer le terme suivant. Les termes d'une suite comportent un indice qui indique leur rang dans la suite.

Suite Arithmétique :

- Une suite dans laquelle la différence entre deux termes consécutifs est constante.

Raison Arithmétique :

- La différence entre deux termes consécutifs d'une suite arithmétique.
  - $d = t_n - t_{n-1}$
- Peut être positive ou négative.
- Par exemple, la raison arithmétique de la suite 10, 16, 22, 28 ….. est 6

Terme général :

- Une expression qui permet de déterminer un terme quelconque d'une suite.
- Son symbole est t_n.
- Peut être, par exemple, $t_n = 3n + 2$

Exemple :

3, 7, 11, … est une suite (un ensemble de nombres ordonnés)

$t_1 = 3$ $t_2 = 7$ $t_3 = 11$ t_n = le n^e terme ou terme général.

$d = t_2 - t_1$ ou $t_3 - t_2$ ou $t_4 - t_3$ etc…
$d = 7 - 3 = 4$

Le nombre de termes d'une suite est n.
t_n dépend de la valeur de n (combien de terme vous avez).

La suite arithmétique générale est t_1, $t_1 + d$, $t_1 + 2d$, $t_1 + 3d$, …
où t1 est le premier terme et d est la raison arithmétique.

$t_1 = t_1$ $t_2 = t_1 + d$ $t_3 = t_1 + 2d$ … $\boldsymbol{t_n = t_1 + (n - 1)d}$

Le terme général d'une suite arithmétique correspond à $\boldsymbol{t_n = t_1 + (n - 1)d}$

<u>Suite finie</u> a toujours un dernier terme.

Exemples a) 2, 5, 8, 11, 14 b) 5, 10, 15, 20 …, 100

<u>Suite infinie</u> n'a pas de dernier terme. Chaque terme est suivi d'un autre et il termine par des points.

Exemples a) 5, 10, 15, 20, … b) 1, 4, 7, 10, 13, …
c) 5, -1, -7, -13, -19,… d) ½, ¾, 1, 1¼, …

1. a) Quelle est la formule du terme général de la suite 5, 2, -1, -4….. ?

t_1 =
t_2 =

d =

$t_n = t_1 + (n – 1)d$

b) Trouve t_{25}

2. Soit la **S.A** définie par son terme général $t_n = 7n – 12$.

a) Calcule les quatre premiers termes de la S.A. b) Quelle est la raison arithmétique ?

3. Soit la suite finie : 2, 7, 12, …., 147.
Combien y a-t-il de termes dans cette suite ?

4. Dans une S.A : $t_5 = 100$ et $t_{35} = 10$

a) Quel est le premier terme de la suite ? b) Que vaut t_{50}.

5. $2x - 5$, 17, $4x + 3$ sont les termes consécutifs d'une S.A

a) Détermine x.

b) Détermine les trois termes.

6. Un groupe d'arts visuels et de la scène désire engager une ou un responsable des activités communautaires. Cette personne recevra 12 $ pour une heure du travail, 19 $ pour deux heures, 26 $ pour trois heures et ainsi de suite.

a) Définis le terme général qui permet de déterminer le salaire pour tout nombre d'heures travaillées.

b) Combien d'argent la personne recevra-t-elle pour 6 heures du travail ?

7. Les fourmis charpentières sont de grosses fourmis, souvent noires, qui font leurs nids dans le bois. Ces fourmis sont nuisibles pour les maisons, mais elles jouent un rôle important dans les écosystèmes forestiers. Les fourmis charpentières forment d'abord une colonie mère. Une fois cette colonie bien établie, elles forment des colonies satellites constituées uniquement d'ouvrières. Une colonie bien établie peut compter jusqu'à 3 000 fourmis. Suppose que la croissance d'une colonie présente une suite arithmétique et que le nombre de fourmis augmente d'environ 80 chaque mois. S'il y a 40 fourmis au départ, dans **combien de mois la population atteindra-t-elle 3 000 fourmis** ?

8. Les expressions $5x + 2$, $7x - 4$ et $10x + 6$ sont des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Détermine la valeur de x évalue les trois termes.

Pratique :

1. Soit la S.A -5, -1, 3

a) Donne l'expression du terme général. b) Calcule t_{20}

2. Soit la S.A définie par son terme général $t_n = 5n – 9$.

a) Calcule les quatre premiers termes de la S.A. b) Quel est la raison ?

3. Soit la suite finie : 23, 17, 11, …. -271.

Combien y a-t-il de termes dans cette suite ?

4. Dans une S.A : t_{20} et $t_{30} = 82$. Calcule le premier terme de la suite ainsi que t_{50}.

5. La croissance d'un enfant dépend de nombreux facteurs. Les médecins recommandent aux parents de noter la croissance de leur enfant. On estime qu'entre l'âge de 3 et 10 ans, la taille d'un enfant augmente de 5 cm par année en moyenne. Suppose qu'un enfant de 3 ans mesure 70 cm.

a) Définis le terme général qui permet d'estimer la taille de cet enfant à tout âge entre 3 et 10 ans.

b) Quelle devrait être la taille de l'enfant à 10 ans ?

Leçon 2 : Séries (somme) Arithmétique

Carl Friedrich Gauss (né en 1777) a découvert une méthode plus rapide pour trouver la somme des termes individuels de 1 à 100 au lieu de les additionner ensemble un par un.

Série Arithmétique :

- La somme des termes d'une suite arithmétique.
- Pour la suite arithmétique 2, 4,6, 8, la série arithmétique est représentée par 2 + 4 + 6 + 8.

$$Sn = \frac{n}{2}(2t_1 + (n-1)d)$$

Ou

$$Sn = \frac{n}{2}(t_1 + t_n)$$

1. Calcule la somme des 20 premiers termes de : 6 + 9 + 12 + ….

2. Calcule la somme : 3 + 10 + 17 + … + 136

3. a) Calcule le nombre de termes de la somme : -7 + -4 + -1 + …. + 83

a) Calcule la somme.

4. Dans une somme, le quatrième terme est 11 et le vingtième terme est 59 calcule la somme des 50 premiers termes.

5. Calcule la somme de tous les multiples de 13 compris entre 1 et 10000.

6. La somme des deux premiers termes d'une série arithmétique est 13 et la somme de ses quatre premiers termes est 46. Détermine les six premiers termes de la série et leur somme.

Pratique :

1. Détermine la somme arithmétique.

$14 + 10 + 6 + \ldots + (-86)$

2. Détermine la somme arithmétique indiquée :

$4 + 9 + 14 + \ldots$;   12 premiers termes

3. Détermine le nombre de termes de chaque somme arithmétique.

$3 + 7 + 11 + \ldots + 59$

4. Détermine la somme arithmétique à partir du premier et du n^e terme.

$t_1 = -3$ et $t_{14} = 62$

5. Détermine la somme de tous les multiples de 7 compris entre 1 et 1000.

6. Dans une suite arithmétique, le troisième terme est 24 et le sixième terme est 51. Quelle est la somme des 25 premiers termes.

7. La somme des deux premiers termes d'une série arithmétique est 19 et la somme de ses quatre premiers termes est 50. Détermine les six premiers termes de la série et la somme de ses 20 premiers termes.

Leçon 3 : Les suites géométriques (SG)

Suite géométrique :

- Une suite dans laquelle le rapport entre deux termes consécutifs est constant.
- Par exemple, 3, 12, 48.

Raison géométrique :

- Le rapport entre deux termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$r = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

- Par exemple, la raison géométrique de la suite 2, 4, 8, 16, … est 2

La suite géométrique générale est $t_1, t_1r, t_1r^2, t_1r^3, \ldots$, où t1 est le premier terme et r est la raison géométrique.

$t1 = t1$

$t2 = t_1r$

$t3 = t_1r^2$

$t4 = t_1r^3$ …

$tn = t_1r^{n-1}$

Le terme général d'une suite géométrique où n est un nombre entier positif correspond à

$$\mathbf{t_n = t_1r^{n-1}}$$

où t1 est le premier terme de la suite,
n est le nombre de termes,
r est la raison géométrique, et
tn est le terme général (ou le n^e terme).

1. Soit la SG : 4, 12, 36, …

a) Donne l'expression du terme général. b) Calcule t_7.

2. Soit la SG définie par son terme général : $t_n = (-7)2^{n-1}$

a) Calcule les trois premier termes b) Quelle est la raison de cette SG.

3. Soit la SG finie : 5, 20, 80, …, 20480.

Combien y a-t-il de termes dans cette suite ?

4. Dans une SG : $t_3 = 9$ et $t_6 = 1125$

a) Quel est le premier terme de la suite ?

b) Que vaut t_9 ?

5. $x - 6$, x, $x + 8$ sont trois termes consécutifs d'une SG

a) Détermine x

b) Détermine les trois termes.

6. Monsieur X a acheté une maison à St. Vital pour 150 000 $ il y a 11 ans. Le taux d'appréciation est de 7 % par année. Quelle est la valeur actuelle de la maison.

7. Dans la nature, de nombreux organismes unicellulaires, comme les bactéries, se reproduisent en se divisant en deux. Ainsi, une cellule produit 2, puis 4, puis 8 cellules, et ainsi de suite, ce qui forme une suite géométrique. Suppose qu'un échantillon contient 10 bactéries au départ.

a) Détermine le terme général qui représente la relation entre le nombre de bactéries et leur période de division.

b) Indique les valeurs de t1 et de r dans la suite géométrique générée.

8. Le troisième terme d'une suite géométrique est 54 et son sixième terme est -1 458. Détermine les valeurs de t1 et de r, puis indique les trois premiers termes de la suite.

Pratique :

1. Détermine les quatre premiers termes de chaque suite géométrique.

a) $t1 = 2$ et $r = 3$

b) $t1 = 2$ et $4 = 0,5$

2. Détermine les termes manquants, t2, t3 et t4, de la suite géométrique dans laquelle $t1 = 8,1$ et $t5 = 240,1$

3. Écris une formule du terme général de chaque suite géométrique.

a) $r = 2$ et $t1 = 3$

b) 192, -48, 12, -3 …

c) $t3 = 5$ et $t6 = 135$

4. La couleur de certains vêtements s’estompe au lavage avec le temps. La couleur d’un jean s’estompe de 5 % à chaque lavage.

a) Quel pourcentage de couleur reste-t-il après un lavage ? __________

b) Si $t_1 = 100$, quels sont les quatre premiers termes de la suite ?

c) Quelle est la valeur de r pour la suite géométrique trouvée en b) ?

d) Quel pourcentage de couleur reste-t-il après 10 lavages ?

e) Après combien de lavages reste-t-il seulement 25 % de la couleur initiale du jean ? Quelles suppositions as-tu faites ?

Leçon 4 : Les Séries (somme) géométriques

Une série géométrique est une expression qui représente la somme des termes d'une suite géométrique.

Série géométrique :

- La somme des termes d'une suite géométrique.
- Par exemple, la Série 3 + 6 + 12 + 24 est géométrique.

$$S_n = \frac{t_1(r^n - 1)}{r - 1}, \qquad r \neq 1$$

1. Quelle est la somme des 7 premiers termes de la série 6 + 12 + 24 + …

2. Détermine la somme des séries géométriques dont le nombre de termes n'est pas connu.

a) 1/27 + 1/9 + 1/3 + … + 729

b) 4 - 16 + 64 - … - 65 536

3. Dans une SG : $t_4 = 30$ et $t_9 = 960$, calcule la somme des neuf premiers termes.

4. Célia s'entraîne pour un marathon. Elle parcourt 25 km la première semaine, puis elle augmente la distance parcourue de 10% chaque semaine. La série 25 + 25(1,1) + 25(1,1)2 + … représente cette situation. Célia désire poursuivre cette régularité pendant 15 semaines. Quelle distance totale aura-t-elle parcourue à la fin de la 15e semaine?

Pratique :

1. Détermine la somme des 10 premiers termes de chaque série géométrique.

a) $4 + 12 + 36 + \ldots$ b) $t_1 = 5$, et $r = \frac{1}{2}$

2. Détermine la somme de chaque série géométrique.

a) $1/64 + 1/16 + \frac{1}{4} + \ldots + 1024$ b) $-2 + 4 - 8 + \ldots -8\,192$

3. Le Western Scrabble Network est un organisme dont le but est de promouvoir le jeu de scrabble. Toute l'année, il organise des tournois en ligne à l'intention de ses membres. Dans ces tournois, les perdants de chaque ronde sont éliminés et n'atteignent donc pas la rond8e suivante. Les gagnants continuent à jouer jusqu'à ce qu'un match final détermine la championne ou le champion. S'il y a 256 personnes inscrites à un tournoi de scrabble en ligne, combien de matchs y aura-t-il en tout durant le tournoi?

4. Une balle est lâchée d'une hauteur de 10 m. Quelle distance parcourt-elle après 6 rebonds sachant qu'elle rebondit au ¾ de sa hauteur précédente ?

Leçon 5 : Les Séries géométrique convergente

Les séries géométriques infinies

Formule pour une série géométrique infinie convergente :

$$S_\infty = \frac{t_1}{1-r}, \text{ où } -1 < r < 1$$

Série convergente :

- Est une série infinie dont la suite des sommes partielles tend vers une valeur donnée par exemple, 1 + ½ + ¼ + 1/8 + …

Ex : Série 4 + 2 + 1 + 0,5 + 0,25 **r =1/2 = 0,5**
S4 = 7,5 **S9 = 7,9844** **S17 = 7,9999**

Cette série semble converger vers 8. Vérifie avec la formule d'une série géométrique infinie convergente.

$$S_\infty = \frac{t_1}{1-r}, \text{ où } -1 < r < 1$$

$$S_\infty = \frac{4}{1-0{,}5}$$

$$S_\infty = \frac{4}{0{,}5}$$

$$S_\infty = 8$$

Série divergente :

- Est une série infinie dont la suite des sommes partielles ne tend pas vers une valeur donnée par exemple, 2 + 4 + 8 + 16 + …

S4 = 60 S7 = 508 S10 = 4092

La série continue à croire, alors la série ne va pas converger vers un numéro.

1. Détermine si chaque série géométrique infinie est convergente ou divergente. Calcule la somme, si elle existe.

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \ldots \qquad\qquad 4 + 8 + 16 + \ldots$$

2.

On peut exprimer $0,\overline{584}$ sous la forme d'une série géométrique infinie :

$$0,\overline{584} = 0{,}584\,584\,584\ \ldots$$
$$= 0{,}584 + 0{,}000584 + 0{,}000000584 + \ldots$$

Détermine la somme exacte de cette série.

3. Calcule la somme de la série géométrique : 1 + ½ + ¼ + …

4. Calcule la somme de la série géométrique : 5 + 10/3 + 20/9 + …

Pratique :

1. Détermine si chaque série géométrique infinie est convergente ou divergente. Indique la somme de la série, s'il y a lieu.

a) 1 – 1/3 + 1/9 - … b) 2 – 4 + 8 - …

2. Écrit 0,777… sous la forme d'une série géométrique.

3. Détermine la somme de la série géométrique.

T1 = -4 et r = 4/5