Calcul 42S : Exercice L'équation d'une tangent et la normale

Trouver l'équation de la tangente à la courbe au point donné:

1. $y = x^2 + x + 1$ au point $(0,1)$
2. $y = \dfrac{1}{x+2}$ au point $(1,1/3)$
3. $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ au point $(3,0)$
4. $x^2 y + x + y - 1 = 0$ au point $(-1,1)$
5. $x = \dfrac{y^2+1}{y-1}$ au point $(5,2)$

Trouver l'équation de la normale à la courbe au point donné:

6. $y = x^3 - x + 1$ au point $(1,1)$
7. $y = \dfrac{2x-1}{3x+2}$ au point $(-1,3)$
8. $x^2 + y^2 = 4$ au point $(-1,\sqrt{3})$
9. $x^2 + y^2 = 25$ au point $(3,-4)$
10. $x^2 y + xy^2 - x = 4$ au point $(2,1)$

11. Montrer que la tangente à la courbe de
$$y = \frac{x^2+3}{2x-5}$$
au point $(2,-7)$ passe par le point $(1,11)$.

12. Trouver l'ordonnée à l'origine de la droite tangente à la courbe $x^2 y^2 - 3x + 4xy = 0$ au point $(-1,3)$.

13. Trouver l'équation de la (ou des) tangente(s) à la courbe $y = 3x - x^2$ si cette tangente passe par le point $(1,3)$.

14. Montrer que la normale à la courbe de
$$y = \frac{5}{x^2+1}$$
au point $(2,1)$ passe par le point $(-2,-4)$.

15. Trouver l'ordonnée à l'origine de la droite normale à la courbe $y = \sqrt{6x+1}$ au point $(4,5)$.

16. Trouver la tangente à la courbe $x^2 + y^2 = 9$ qui est parallèle à $y - 3x + 4 = 0$ (deux solutions).

17. Trouver la normale à la courbe $xy = 3$ qui est parallèle à la droite $y = 4x$ (deux solutions).

18. Trouver l'angle d'intersection des courbes

22. Trouver l'angle d'intersection des courbe
$$y = x^2 - 6x + 10 \quad \text{et} \quad y = \frac{x+2}{x-1}$$

Trouver l'angle entre les courbes suivantes e leurs points d'intersection.

23. $y = x^2$ et $y = x^2 + x + 1$
24. $y = 8 - x^2$ et $y = x^2 + 2x - 4$
25. $y = \sqrt{x}$ et $4y - 3x + 4 = 0$

26. Trouver l'angle d'intersection des deu hyperboles suivantes :
$$xy = 1 \quad \text{et} \quad xy + 2y + 1 = 0$$

27. Trouver l'angle d'intersection des courbes
$$y = \sqrt{x+1} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{2-x}$$

28. Trouver l'angle d'intersection des courbes
$$y = x^3 - 5 \quad \text{et} \quad y = 5x^2 - x$$

29. Trouver l'angle entre les courbes suivantes en leurs points d'intersection :
$$y = 3x^2 + 6x - 1 \quad \text{et} \quad y = 3x + 5$$

30. Trouver l'angle entre les courbes suivantes en leurs points d'intersection :
$$y = 2x^2 + 3x \quad \text{et} \quad y = x^2 + 2x + 2$$

Calcul 42S : Exercice L'équation d'une tangent et la normale

18 Trouver l'angle d'intersection des courbes
$$y = x^2 \quad \text{et} \quad y = 2x - x^2$$

19 Trouver l'angle d'intersection des courbes
$$y = \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad y = x^3$$

20 Trouver l'angle d'intersection des courbes
$$y = \frac{4}{x^2+3} \quad \text{et} \quad y = 2x - 1$$

21 Trouver l'angle d'intersection des courbes
$$y = \sqrt{6-x} \quad \text{et} \quad y = \sqrt{2x+3}$$

31 Trouver l'angle d'intersection entre les courbes
$$y = 2x^2 \quad \text{et} \quad y = x^2 + \frac{1}{x}$$

32 Trouver l'angle selon lequel les courbes de $x^2 + y^2 = 16$ et $y^2 = 6x$ se coupent au point d'intersection situé dans le premier quadrant.

33 Trouver l'angle d'intersection entre les courbes $y = x^4$ et $y = (x-1)^2(x+1)^2$ au point d'intersection situé dans le premier quadrant.

Réponses :

1.
$y' = 2x + 1$
$[y']_{(0,1)} = 1 =$ pente de la tangente
Équation de la tangente : $\dfrac{y-1}{x-0} = 1$
c'est-à-dire $y = x + 1$

2. $9y + x - 4 = 0$

3. $y - x + 3 = 0$

4. $2y - x - 3 = 0$

5. $y + x - 7 = 0$

6. $2y + x - 3 = 0$

7. $7y + x - 20 = 0$

8.
$x^2 + y^2 = 4$. Faisons une dérivation implicite
$2x + 2yy' = 0$
$y' = -\dfrac{x}{y}$
$[y']_{(-1,\sqrt{3})} = -\dfrac{(-1)}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
La pente de la normale est alors $-\sqrt{3}$.
Équation de la normale $\dfrac{y-\sqrt{3}}{x+1} = -\sqrt{3}$ ou $y = -\sqrt{3}\,x$

9. $3y + 4x = 0$

10. $y - 2x + 3 = 0$

11.
$y' = \dfrac{2x\,(2x-5) - 2\,(x^2+3)}{(2x-5)^2} = \dfrac{2x^2 - 10x - 6}{(2x-5)^2}$
$[y']_{(2,-7)} = -18$
L'équation de la tangente à la courbe en ce point est
$\dfrac{y+7}{x-2} = -18$ ou $y = -18x + 29$
Cette droite passe par le point $(1,11)$ comme on peut aisément le vérifier :
$11 = -18\,(1) + 29$

12.
$x^2y^2 - 3x + 4xy = 0$
$2xy^2 + 2x^2yy' - 3 + 4y + 4xy' = 0$
$y' = \dfrac{3 - 4y - 2xy^2}{2x^2y + 4x}$
$[y']_{(-1,3)} = \dfrac{3 - 12 + 18}{6 - 4} = \dfrac{9}{2}$
Équation de la tangente : $\dfrac{y-3}{x+1} = \dfrac{9}{2}$ ou $y = \dfrac{9}{2}x + \dfrac{15}{2}$
L'ordonnée à l'origine (faisant $x = 0$) de cette droite est $\dfrac{15}{2}$.

13.

Soit $(a, 3a - a^2)$ le point de tangence.

$y' = 3 - 2x$ et $\left[y'\right]_{x=a} = 3 - 2a$

La pente de la tangente passant par $(a, 3a - a^2)$ et $(1, 3)$ est

$$\frac{(3a - a^2) - 3}{a - 1} = 3 - 2a$$

$$3a - a^2 - 3 = 3a - 2a^2 - 3 + 2a$$

$$a^2 - 2a = 0$$

$$a(a - 2) = 0$$

Il y a donc deux points de tangence possibles : $(0, 0)$ et $(2, 2)$.

Il y a donc deux tangentes possibles :

$$\frac{y - 3}{x - 1} = 3 \text{ ou } \frac{y - 3}{x - 1} = -1$$

$$y = 3x \text{ ou } y = -x + 4$$

14. La normale a pour équation $4y = 5x - 6$. Il est immédiat de constater qu'elle passe par $(-2, -4)$.

15. 35/3

16.

Soit a l'abscisse du point de tangence. Alors, $\pm\sqrt{9 - a^2}$ sera l'ordonnée de ce point de tangence. En dérivant implicitement, on a $2x + 2yy' = 0$. D'où

$$\left[y'\right]_{x=a} = \left[\frac{-x}{y}\right]_{x=a} = \frac{-a}{\pm\sqrt{9 - a^2}}$$

Cette pente doit être la même que celle de la droite, soit 3.

$$\frac{-a}{\pm\sqrt{9 - a^2}} = 3$$

$$\frac{a^2}{9 - a^2} = 9$$

$$a^2 = 81 - 9a^2$$

$$a = \pm\frac{9}{\sqrt{10}}$$

Deux points de tangence sont possibles :

$$\left(\frac{9}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right) \text{ et } \left(\frac{-9}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Notons que l'abscisse et l'ordonnée sont de signes contraires puisque la pente est positive.

Deux tangentes sont donc possibles :

$$\frac{y + \frac{3}{\sqrt{10}}}{x - \frac{9}{\sqrt{10}}} = 3 \text{ ou } \frac{y - \frac{3}{\sqrt{10}}}{x + \frac{9}{\sqrt{10}}} = 3$$

$$y = 3x - \frac{30}{\sqrt{10}} \text{ ou } y = 3x + \frac{30}{\sqrt{10}}$$

$$y = 3x - 3\sqrt{10} \text{ ou } y = 3x + 3\sqrt{10}$$

17. $y - 4x \pm \frac{15\sqrt{3}}{2} = 0$

18.
Le (les) point(s) d'intersection se trouvent en faisant :
$x^2 = 2x - x^2$
$2x^2 - 2x = 0$
$2x(x-1) = 0$
$x_1 = 0$ et $x_2 = 1$
Les deux points d'intersection sont $(0,0)$ et $(1,1)$. Au point $(0,0)$:
calcul de m_1 :
$\left[y' = 2x\right]_{(0,0)} = 0$
calcul de m_2 :
$\left[y' = 2 - 2x\right]_{(0,0)} = 2$
$$\tan\phi = \left|\frac{0-2}{1+(0)\,(2)}\right| = 2$$
$\phi = \arctan 2 \approx 63{,}43° \approx 1{,}11$ radian
Au point $(1,1)$, on obtient le même résultat.

19.
Le point d'intersection :
$\frac{1}{x^2} = x^3$
$1 = x^5$
$x = 1$
Le seul point d'intersection est le point $(1,1)$
calcul de m_1 :
$\left[y' = \frac{-2}{x^3}\right]_{(1,1)} = -2$
calcul de m_2 :
$\left[y' = 3x^2\right]_{(1,1)} = 3$
$$\tan\phi = \left|\frac{-2-3}{1+(-2)\,(3)}\right| = 1$$
$\phi = \arctan 1 = 45° = \frac{\pi}{4}$ radian

20.
Le point d'intersection :
$\frac{4}{x^2+3} = 2x - 1$
$4 = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$
$2x^3 - x^2 + 6x - 7 = 0$
$(x-1)\,(2x^2 + x + 7) = 0$ (voir annexe B)
$x = 1$
Le seul point d'intersection est le point $(1,1)$.
calcul de m_1 :
$\left[y' = \frac{-8x}{(x^2+3)^2}\right]_{(1,1)} = \frac{-1}{2}$
calcul de m_2 :
$\left[y' = 2\right]_{(1,1)} = 2$
$$\tan\phi = \left|\frac{-\frac{1}{2} - 2}{1 + \left(\frac{-1}{2}\right)(2)}\right| = \frac{+5/2}{0} = \infty$$
$\phi = \arctan\infty = 90° = \frac{\pi}{2}$ radian
D'ailleurs, $m_1 m_2 = -1$ indique que les courbes se coupent perpendiculairement.

21.
Le point d'intersection
$\sqrt{6-x} = \sqrt{2x+3}$
$6 - x = 2x + 3$
$x = 1$
Le seul point d'intersection est le point $(1, \sqrt{5})$.
calcul de m_1 :
$\left[y' = \frac{-1}{2\sqrt{6-x}}\right]_{(1,\sqrt{5})} = \frac{-1}{2\sqrt{5}}$
calcul de m_2 :
$\left[y' = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}\right]_{(1,\sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
$$\tan\phi = \left|\frac{-\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}\right| = \frac{\frac{3}{2\sqrt{5}}}{\frac{9}{10}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$\phi = \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \approx 36{,}70° \approx 0{,}64$ radian

22.
Le point d'intersection:

$$x^2 - 6x + 10 = \frac{x+2}{x-1}$$

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 10 = x + 2$$

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 12 = 0$$

$(x-4)(x^2 - 3x + 3) = 0$ (voir annexe B)

$x = 4$

Le seul point d'intersection est le point $(4, 2)$.
calcul de m_1 :

$$\left[y' = 2x - 6\right]_{(4,2)} = 2$$

$$\left[y' = \frac{-3}{(x-1)^2}\right]_{(4,2)} = \frac{-1}{3}$$

$$\tan\phi = \left|\frac{2 + \frac{1}{3}}{1 + (2)\left(\frac{-1}{3}\right)}\right| = 7$$

$\phi = \arctan 7 \approx 81{,}87° \approx 1{,}43$ radian

23. arctan $(1/3) \approx 18{,}44° \approx 0{,}32$ radian

24. arctan $(10/23) \approx 23{,}50° \approx 0{,}41$ radian et ce, pour les deux points d'intersection.

25. arctan $(8/19) \approx 22{,}83° \approx 0{,}40$ radian

26. $\pi/2$ ou $90°$

27.
Point d'intersection $\left(1/2, \sqrt{3/2}\right)$

$$\phi = \arctan\frac{6\sqrt{2}}{5\sqrt{3}} \approx 44{,}42° \approx 0{,}78 \text{ rad}$$

28.
Point d'intersection $(5, 120)$

$$\phi = \arctan\frac{13}{1\,838} \approx 0{,}41° \approx 0{,}007 \text{ rad}$$

29.
Points d'intersection $(-2, -1)$ et $(1, 8)$

$$\phi_1 = \arctan\frac{9}{17} \approx 27{,}9° \approx 0{,}49 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \arctan\frac{9}{37} \approx 13{,}67° \approx 0{,}24 \text{ rad}$$

30.
Points d'intersection $(1, 5)$ et $(-2, 2)$

$$\phi_1 = \arctan\frac{3}{29} \approx 5{,}91° \approx 0{,}10 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \arctan\frac{3}{11} \approx 15{,}26° \approx 0{,}27 \text{ rad}$$

31.
Point d'intersection $(1, 2)$

$$\phi = \arctan\frac{3}{5} \approx 30{,}96° \approx 0{,}54 \text{ rad}$$

32.
Point d'intersection dans le premier quadrant $(2, 2\sqrt{3})$

$$\phi = \arctan\frac{5}{\sqrt{3}} \approx 70{,}89° \approx 1{,}24 \text{ rad}$$

33.
Point d'intersection dans le premier quadrant $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$

$$\phi = \arctan 2\sqrt{2} \approx 70{,}53° \approx 1{,}23 \text{ rad}$$