Calcule 42S : Exercices Concavité et points d'inflexion

Déterminer le sens de la concavité et les points d'inflexion de :

1. $y = 6x^2 - 5x + 3$
2. $y = -x^2 + 8x + 1$
3. $y = 5x + 8$
4. $y = 1/x^2$
5. $y = (x-3)^3$
6. $y = \sqrt{2x+5}$
7. $y = (x-4)^{2/3}$
8. $y = x^4 - 18x^3 + 84x^2 + 12x + 3$
9. $y = (x-2)(x-3)^3$
10. $y = \dfrac{x+1}{x+5}$
11. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
12. $y = x^4 - 6x^2 + 1$
13. $y = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5$
14. $y = x^5 - 20x^3 + 5x + 3$
15. $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$
16. $y = |3x - 4|$
17. $y = \dfrac{x}{x^2 + 16}$
18. $y = (x-2)^2(x-3)$
19. $y = \sqrt[3]{x-3}$
20. $y = \sqrt{16 - x^2}$
21. $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$
22. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$
23. $y = (2x-3)^{2/3}$
24. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

En utilisant le test de la dérivée seconde, trouver les extremums relatifs de :

25. $y = 2x^2 - x + 8$
26. $y = 5x + 9$
27. $y = x^3 - 1$
28. $y = (x-1)^{1/3} + 4$
29. $y = x^4 - 6x^2 + 1$
30. $y = (x-5)^2(2x+7)^2$
31. $y = x^3 - 15x^2 - 33x + 13$
32. $y = x^3 + 2$
33. $y = x^3 - 6x^2 - 63x$
34. $y = \dfrac{x+1}{x+5}$
35. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
36. $y = 1/\sqrt{x}$
37. $y = -\sqrt{4 - x^2}$
38. $y = 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
39. $y = 4x^3 + x^2 - 30x - 5$
40. $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$
41. $y = |3x - 4|$
42. $y = \dfrac{x}{x^2 + 16}$
43. $y = (x-2)^2(x-3)$
44. $y = \sqrt[3]{x-3}$
45. $y = \sqrt{16 - x^2}$
46. $y = \dfrac{x^2 + 8}{x - 1}$
47. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2}$
48. $y = (2x-3)^{2/3}$
49. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

Tracer les courbes suivantes en utilisant les cinq étapes décrites dans la section précédente :

50. $y = 2x + 11$
51. $y = x^2 + 3x + 5$

Calcule 42S : Exercices Concavité et points d'inflexion

Déterminer le sens de la concavité et les points d'inflexion.

1. $y = 6x^2 - 5x + 3$
2. $y = -x^2 + 8x + 1$
3. $y = 5x + 8$
4. $y = 1/x^2$
5. $y = (x-3)^3$
6. $y = \sqrt{2x+5}$
7. $y = (x-4)^{2/3}$
8. $y = x^4 - 18x^3 + 84x^2 + 12x + 3$
9. $y = (x-2)(x-3)^3$
10. $y = \dfrac{x+1}{x+5}$
11. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
12. $y = x^4 - 6x^2 + 1$
13. $y = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5$
14. $y = x^5 - 20x^3 + 5x + 3$
15. $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$
16. $y = |3x-4|$
17. $y = \dfrac{x}{x^2+16}$
18. $y = (x-2)^2(x-3)$
19. $y = \sqrt[3]{x-3}$
20. $y = \sqrt{16 - x^2}$

22. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$
23. $y = (2x-3)^{2/3}$
24. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

26. $y = 5x + 9$
27. $y = x^3 - 1$
28. $y = (x-1)^{1/3} + 4$
29. $y = x^4 - 6x^2 + 1$
30. $y = (x-5)^2(2x+7)^2$
31. $y = x^3 - 15x^2 - 33x + 13$
32. $y = x^3 + 2$
33. $y = x^3 - 6x^2 - 63x$
34. $y = \dfrac{x+1}{x+5}$
35. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$
36. $y = 1/\sqrt{x}$
37. $y = -\sqrt{4 - x^2}$
38. $y = 4x^3 + 7x^2 - 6x + 1$
39. $y = 4x^3 + x^2 - 30x - 5$
40. $y = \dfrac{2x^2 + x + 8}{x}$
41. $y = |3x-4|$
42. $y = \dfrac{x}{x^2+16}$
43. $y = (x-2)^2(x-3)$
44. $y = \sqrt[3]{x-3}$
45. $y = \sqrt{16 - x^2}$
46. $y = \dfrac{x^2+8}{x-1}$
47. $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+2}$

48. $y = (2x-3)^{2/3}$
49. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

Calcule 42S : Exercices Concavité et points d'inflexion

Réponses :

1.
$y' = 12x - 5$
$y'' = 12$

x	$-\infty$				∞
y''		$+$	$+$	$+$	
y		$\cup$	$\cup$	$\cup$	

La courbe est toujours concave vers le haut. Il n'y a pas de point d'inflexion.

2. Concavité vers le bas sur $\mathbb{R}$; pas de P.I.

3. Droite; pas de concavité ou concavité nulle.

4. Concavité vers le haut $]-\infty, 0[$, $]0, \infty[$; pas de P.I.

5. Concavité vers le haut $[3, \infty[$; concavité vers le bas $]-\infty, 3]$; P.I.: $(3, 0)$

6. Concavité vers le bas $[-5/2, \infty[$; pas de P.I.

7. Concavité vers le bas $]-\infty, 4]$, $[4, \infty[$; pas de P.I.

8. Concavité vers le haut $]-\infty, 2]$, $[7, \infty[$; concavité vers le bas $[2, 7]$;
P.I: $(2, 235)$ et $(7, 430)$

9.
$y' = 1\,(x-3)^3 + (x-2)\,3\,(x-3)^2 = (x-3)^2(4x-9)$
$y'' = 2\,(x-3)\,(4x-9) + (x-3)^2\,4 = (x-3)\,(12x-30)$
$= 6\,(x-3)\,(2x-5)$

x	$-\infty$		$5/2$		3		∞
y''		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

La courbe est concave vers le haut sur $]-\infty, 5/2]$ et sur $[3, \infty[$; elle est concave vers le bas sur $[5/2, 3]$. Il y a deux points d'inflexion : $(5/2, -1/16)$ et $(3, 0)$.

10. Concavité vers le haut $]-\infty, -5[$; concavité vers le bas $]-5, \infty[$; pas de P.I.

11. Concavité vers le haut $]-1, \infty[$; concavité vers le bas $]-\infty, -1[$; pas de P.I.

12. Concavité vers le haut $]-\infty, -1]$, $[1, \infty[$; concavité vers le bas $[-1, 1]$;
P.I.: $(-1, -4)$ et $(1, -4)$.

13. Concavité vers le haut $]-\infty, -1]$, $[4, \infty[$; concavité vers le bas $[-1, 4]$;
P.I.: $(-1, -12)$ et $(4, -507)$

14. Concavité vers le haut $[-\sqrt{6}, 0]$, $[\sqrt{6}, \infty[$; concavité vers le bas $]-\infty, -\sqrt{6}]$, $[0, \sqrt{6}]$; P.I.: $(-\sqrt{6}\,; 196{,}5)$, $(0, 3)$, $(\sqrt{6}\,; -190{,}5)$

15.
$y' = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$
$y'' = \dfrac{16}{x^3}$

x	$-\infty$		0		∞
y''		$-$	$\nexists$	$+$	
y		$\cap$		$\cup$	

La courbe est concave vers le haut sur $]0, \infty[$ et concave vers le bas sur $]-\infty, 0[$. Il n'y a pas de point d'inflexion.

16.
$$y = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si} \quad x \geq 4/3 \\ -3x + 4 & \text{si} \quad x < 4/3 \end{cases}$$
$$y' = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x > 4/3 \\ \nexists & \text{si} \quad x = 4/3 \\ -3 & \text{si} \quad x < 4/3 \end{cases}$$
$$y'' = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x > 4/3 \\ \nexists & \text{si} \quad x = 4/3 \\ 0 & \text{si} \quad x < 4/3 \end{cases}$$

Ainsi, on a une concavité nulle sur $]-\infty, 4/3]$ (c'est une demi-droite) et une concavité nulle sur $[4/3, \infty[$ (c'est une autre demi-droite). Il n'y a pas de point d'inflexion.

17.
$y' = \dfrac{16 - x^2}{(x^2 + 16)^2}$
$y'' = \dfrac{2x^3 - 96x}{(x^2+16)^3} = \dfrac{2x\,(x - \sqrt{48})\,(x + \sqrt{48})}{(x^2+16)^3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{48}$		0		$+\sqrt{48}$		∞
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\cap$	P.I.	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$	

La concavité est dirigée vers le haut sur $[-\sqrt{48}, 0]$ et sur $[\sqrt{48}, \infty[$ et vers le bas sur $]-\infty, -\sqrt{48}]$ et $[0, \sqrt{48}]$.

Il y a trois points d'inflexion : $\left(-\sqrt{48}, \dfrac{-\sqrt{3}}{16}\right)$; $(0, 0)$; $\left(\sqrt{48}, \dfrac{\sqrt{3}}{16}\right)$.

18. Concavité dirigée vers le haut sur $\left[\dfrac{7}{3}, \infty\right[$ et vers le bas sur $\left]-\infty, \dfrac{7}{3}\right]$.
Il y a un point d'inflexion : $\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{-2}{27}\right)$.

19. Concavité dirigée vers le haut sur $]-\infty, 3]$ et dirigée vers le bas sur $[3, \infty[$.
P.I.: $(3, 0)$.

20. Concavité dirigée vers le bas sur $[-4, 4]$. Pas de P.I.

Calcule 42S : Exercices Concavité et points d'inflexion

21. Concavité dirigée vers le haut sur $]1,\infty[$ et dirigée vers le bas sur $]-\infty,1[$. Pas de P.I..

22. Concavité dirigée vers le haut sur $\left[-\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et dirigée vers le bas sur $\left]-\infty,-\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$ et sur $\left[\sqrt{\frac{2}{3}},\infty\right[$.

Il y a deux P.I.: $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{8}\right)$ et $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{1}{8}\right)$

23.

$$y' = \frac{4}{3\,(2x-3)^{1/3}}$$

$$y'' = \frac{-8}{9\,(2x-3)^{4/3}}$$

x	$-\infty$		$3/2$		∞
y''		$-$	$\nexists$	$-$	
y		$\cap$		$\cap$	

La concavité est dirigée vers le bas sur $]-\infty,3/2]$ et sur $[3/2,\infty[$. Il n'y a pas de P.I.

24. Concavité dirigée vers le haut sur $]2,\infty[$. Pas de P.I.

25.

Étape 1:

$y' = 4x-1$

$y'' = 4$

Étape 2: valeur critique : $x = 1/4$

Étape 3:

$f'(1/4) = 0$ et $f''(1/4) = 4 > 0$

Donc, on a un MIN relatif en $x = 1/4$. C'est le point $(1/4, 63/8)$.

26. Aucun extremum relatif.

27. Aucun extremum relatif.

28. Aucun extremum relatif.

29. MIN relatifs : $(-\sqrt{3},-8)$ et $(\sqrt{3},-8)$; MAX relatif : $(0,1)$.

30. MIN relatifs : $(-7/2,0)$ et $(5,0)$; MAX relatif : $(3/4\,;1\,305{,}02)$.

31. MIN relatif : $(11,-834)$; MAX relatif : $(-1,30)$.

33. MIN relatif : $(7,-392)$; MAX relatif : $(-3,108)$.

34. Aucun extremum relatif.

35. MIN relatif : $(0,0)$; MAX relatif : $(-2,-4)$.

36. Aucun extremum relatif.

37. MIN relatif : $(0,-2)$.

38. MIN relatif : $\left(\frac{1}{3},\frac{-2}{27}\right)$; MAX relatif : $\left(\frac{-3}{2},\frac{49}{4}\right)$.

39. MIN relatif : $\left(\frac{3}{2},\frac{-137}{4}\right)$; MAX relatif : $\left(\frac{-5}{3},\frac{790}{27}\right)$.

40.

Étape 1:

$$y' = \frac{2x^2-8}{x^2}$$

$$y'' = \frac{16}{x^3}$$

Étape 2: valeurs critiques : $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$

Étape 3:

$f'(2) = 0$ et $f''(2) > 0$ $\therefore$ MIN relatif: $(2,9)$

$f'(-2) = 0$ et $f''(-2) < 0$ $\therefore$ MAX relatif: $(-2,-7)$

41. MIN relatif : $\left(\frac{4}{3},0\right)$

42. MIN relatif : $\left(-4,-\frac{1}{8}\right)$; MAX relatif : $\left(4,\frac{1}{8}\right)$

43. MIN relatif : $\left(\frac{8}{3},-\frac{4}{27}\right)$; MAX relatif : $(2,0)$

44. Aucun extremum relatif.

45. MAX relatif : $(0,4)$.

46. MIN relatif : $(4,8)$; MAX relatif : $(-2,-4)$.

47. MIN relatif : $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

48. MIN relatif : $\left(\frac{3}{2},0\right)$.

32.

Étape 1:

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

Étape 2: valeur critique : $x = 0$

Étape 3:

$f'(0) = 0$ et $f''(0) = 0$

Donc, on ne peut conclure par ce test de la dérivée seconde; il faut revenir au test de la dérivée première.

x	$-\infty$		0		∞
y'		$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$		$\nearrow$	

Ce n'est donc pas un extremum relatif.