1 Trouver l'accroissement de la fonction $f(x) = x^3 + 2x - 4$ sur l'intervalle $[1,3]$.

2 Trouver l'accroissement de la fonction

$$f(x) = \frac{2x+4}{x^2}$$

sur l'intervalle $[1,3]$.

3 Soit :

$$f(x) = \frac{x-2}{x-3}.$$

Trouver le taux de variation moyen de cette fonction sur l'intervalle $[4,8]$.

4 Pour la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+5}$, trouver le taux de variation moyen sur l'intervalle $[0,2]$.

5 Soit la fonction $h(x) = \dfrac{x^2+x-3}{2x+3}$

a) trouver $h(3) - h(1)$
b) trouver $h(2+\Delta x) - h(2)$

6 Pour chacune des fonctions suivantes, trouver le taux de variation moyen sur l'intervalle $[1,2]$.

a) $f_1(x) = x^2 + 7x - 11$

b) $f_2(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$

c) $f_3(x) = \sqrt{x+17}$

7 Pour chacune des fonctions du numéro précédent, trouver le taux de variation instantané au point d'abscisse $x = 1$.

8 Trouver la pente de la sécante passant par les points d'abscisse $x = 1$ et $x = 4$ de la courbe de $f(x) = 2^x$.

9 Trouver la pente de la tangente au point d'abscisse $x = 1$ de la courbe de $f(x) = 3x^2 + 8$

10 Trouver la pente de la sécante passant par les points d'abscisse $x = 0$ et $x = 3$ des courbes suivantes :

a) $y = 2x^3 - 1$

b) $y = \dfrac{3x+7}{x-4}$

c) $y = \sqrt{2x+5}$

11 Trouver la pente de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ des courbes du numéro précédent.

Pour chacun des numéros 12 à 19, trouver les nombres dérivés indiqués.

12 $f'(2)$ si $f(x) = x^4 - 3$

13 $g'(1)$ si $g(x) = \dfrac{1}{8x+1}$

14 $h'(0)$ si $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

15 $i'(-1)$ si $i(x) = x^2 - x$

16 $j'(3)$ si $j(x) = \dfrac{5x+1}{2x+1}$

17 $k'(2)$ si $k(x) = 4x^2 + 8x + 7$

18 $m'(-2)$ si $m(x) = \sqrt{x^2+2}$

19 $n'(0)$ si $n(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Solutions :

1. Accroissement = $\Delta y = f(3) - f(1) = 29 - (-1) = 30$

2. $\dfrac{-44}{9}$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(8) - f(4)}{8-4} = \dfrac{\frac{6}{5} - 2}{8-4} = \dfrac{-1}{5}$

4. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

5.

a) $\dfrac{6}{5}$

b) $\dfrac{3 + 5\Delta x + (\Delta x)^2}{7 + 2\Delta x} - \dfrac{3}{7}$

6.

a) 10

b) $\dfrac{1}{21}$

c) $\sqrt{19} - \sqrt{18}$

7.

a)

Le taux de variation instantané est

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_1(1+\Delta x) - f_1(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(1+\Delta x)^2 + 7(1+\Delta x) - 11\right] - (-3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 + 7\Delta x - 11 + 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (9 + \Delta x) = 9$$

b) $\dfrac{1}{18}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$

8. $m_{sec} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(4) - f(1)}{4-1} = \dfrac{2^4 - 2^1}{4-1} = \dfrac{14}{3}$

9.

$$m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[3(1+\Delta x)^2 + 8\right] - 11}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + 6\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 8 - 11}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (6 + 3\Delta x) = 6$$

10.

a) 18

b) $\dfrac{-57}{12}$

c) $\dfrac{\sqrt{11} - \sqrt{5}}{3}$

11.

a) 0

b) $\dfrac{-19}{16}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

12.

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(2+\Delta x)^4 - 3\right] - 13}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{16 + 32\Delta x + 24(\Delta x)^2 + 8(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 - 3 - 13}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{32\Delta x + 24(\Delta x)^2 + 8(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4}{\Delta x} = 32$$

13.

$$g'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(1+\Delta x) - g(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{8(1+\Delta x)+1} - \dfrac{1}{9}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{9 - (9 + 8\Delta x)}{(9 + 8\Delta x)9}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-8\Delta x}{(9 + 8\Delta x)9(\Delta x)} = \frac{-8}{81}$$

14.

$$h'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(0 + \Delta x) - h(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{0 + \Delta x + 1}} - \dfrac{1}{\sqrt{0 + 1}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \sqrt{\Delta x + 1}}{\Delta x(\sqrt{\Delta x + 1})} \times \frac{(1 + \sqrt{\Delta x + 1})}{(1 + \sqrt{\Delta x + 1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - (\Delta x + 1)}{\Delta x(\sqrt{\Delta x + 1})(1 + \sqrt{\Delta x + 1})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x\sqrt{\Delta x + 1}(1 + \sqrt{\Delta x + 1})} = \frac{-1}{2}$$

15. -3

16. $\frac{3}{49}$

17. 24

18. $\frac{-2}{\sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{6}}{3}$

19. 1

En utilisant la méthode des accroissements, trouver la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 7x$
2. $f_2(x) = 4x - 1$
3. $f_3(x) = x^2 + x - 14$
4. $f_4(x) = x^3 + 1$
5. $f_5(x) = \dfrac{1}{x+1}$
6. $f_6(x) = \sqrt{x+12}$
7. $f_7(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
8. $f_8(x) = \dfrac{5}{x^2}$
9. $f_9(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
10. $f_{10}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$
11. $f_{11}(x) = 6x^2 + x - \sqrt{3}$
12. $f_{12}(x) = \dfrac{4}{x+3}$
13. $f_{13}(x) = x^4$
14. $f_{14}(x) = \dfrac{2}{3x+2}$
15. $f_{15}(x) = \sqrt{5x+7}$

Solutions

1.

$$f_1'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7(x+\Delta x) - 7x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{7\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 7 = 7$$

2. 4

3. $2x+1$

4.

$$f_4'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[(x+\Delta x)^3 + 1\right] - (x^3+1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$= 3x^2$$

5. $\frac{-1}{(x+1)^2}$

6. $\frac{1}{2\sqrt{x+12}}$

7. $\frac{-5}{(x-3)^2}$

8. $\frac{-10}{x^3}$

9. $\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$

11. $12x+1$

12. $\frac{-4}{(x+3)^2}$

13. $4x^3$

14. $\frac{-6}{(3x+2)^2}$

15. $f_{15}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{5x+5\Delta x+7} - \sqrt{5x+7}}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{5x+5\Delta x+7} - \sqrt{5x+7}}{\Delta x} \times \frac{(\sqrt{5x+5\Delta x+7} + \sqrt{5x+7})}{(\sqrt{5x+5\Delta x+7} + \sqrt{5x+7})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x+5\Delta x+7-(5x+7)}{\Delta x(\sqrt{5x+5\Delta x+7} + \sqrt{5x+7})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x(\sqrt{5x+5\Delta x+7} + \sqrt{5x+7})}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5\Delta x+7} + \sqrt{5x+7}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+7}}$$

10.

$$f_{10}'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x+\Delta x+1}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+1)\sqrt{x} - (x+1)(\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+1)\sqrt{x} - (x+1)(\sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x}$$

$$\times \frac{\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}{\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+1)^2 x - (x+1)^2 (x+\Delta x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta x + 2x + 1)x - (x^2 + 2x + 1)(x+\Delta x)}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 2x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 + 2x\Delta x + 2x^2 + x - x^3 - x^2\Delta x - 2x^2 - 2x\Delta x - x - \Delta x}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2\Delta x + x(\Delta x)^2 - \Delta x}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + x\Delta x - 1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\left[(x+\Delta x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x+\Delta x}\right]}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x\left[(x+1)\sqrt{x} + (x+1)\sqrt{x}\right]} = \frac{(x-1)(x+1)}{x\,2(x+1)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$