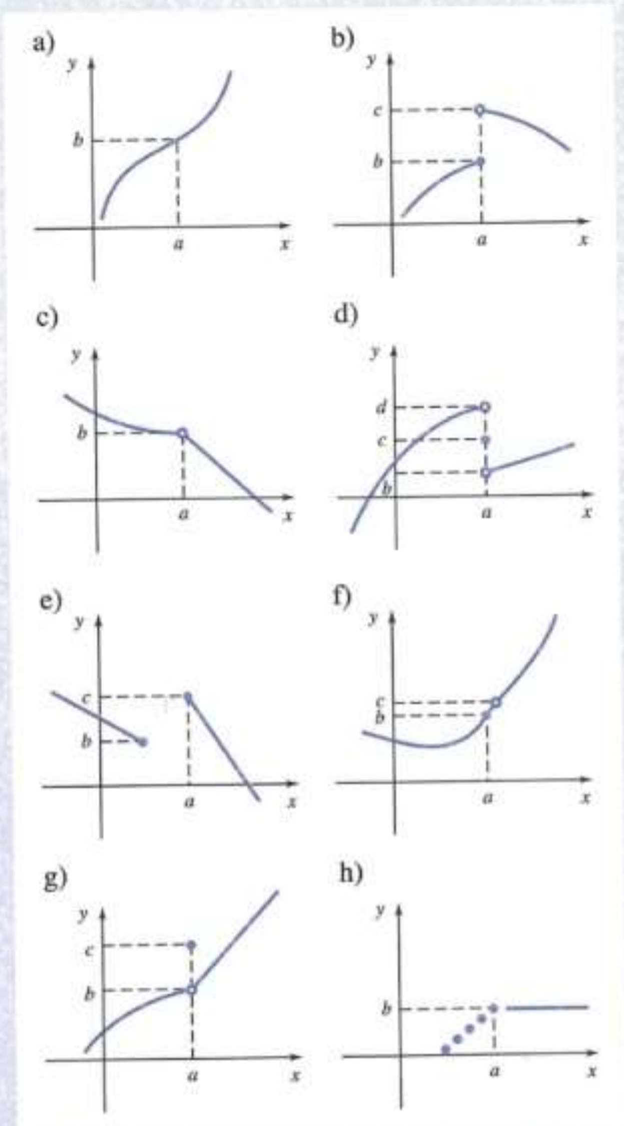
1 Considérons la fonction $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

a) Trouver $f(0{,}8)$, $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$ et $f(0{,}9999)$

b) Trouver $f(1{,}2)$, $f(1{,}1)$, $f(1{,}01)$, $f(1{,}001)$ et $f(1{,}0001)$

c) Sans autre calcul, peut-on prédire : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

2 Pour chacune des fonctions suivantes définies par un graphique, trouver $f(a)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)$



b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+8x}{2x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^3-x^2+2}{x^2+x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}|x-2|$

4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^5+x^3+2x+2}{x^4-x^2+2}$

5 $\lim\limits_{x\to 5}|x-1|$

6 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases}7x-1 & \text{si } x<2\\ x^2+8 & \text{si } x\geq 2\end{cases}$

7 $\lim\limits_{x\to 2}[\![x-1]\!]$

8 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{4x+x^3+1}$

9 $\lim\limits_{x\to -2} \log_{10}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)$

10 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{1}{2x+1}$

11 $\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x^2-1}$

12 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{x^2-1}$

13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(x^2+8)}{2x+5}$

14 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases}6x-5 & \text{si } x<1\\ 4x^2-3 & \text{si } x\geq 1\end{cases}$

15 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x+1}}$

16 $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+1}$

17 $\lim\limits_{x\to 4} \log_{10}(x-4)$

18 $\lim\limits_{x\to 3} x(x-3)$

19 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(x-7)}{2(x-7)}$

20 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases}2x+5 & \text{si } x<3\\ 4x^2-5 & \text{si } x\geq 3\end{cases}$

En citant les résultats 1 à 6, trouver, si elles existent, les limites suivantes :

3 a) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+2x+15)$

21 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-2x+1}{3x^2-5}$

22 $\lim\limits_{x\to \pi}\ \sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x-1}$

24 $\lim\limits_{x\to 3^+}\sqrt{x-3}$

25 $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-3}$

26 $\lim\limits_{x\to 2}(5x^3-x+2)^3$

27 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{6x^2-3}-\sqrt{x-1}\right)$

28 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x-1}\right)$

29 $\lim\limits_{x\to 2}\ \sin(4x^2+8x-|x|)$

30 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

32 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ 8 & \text{si } x=0 \\ 4x+3 & \text{si } x>0 \end{cases}$

33 $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2+6x-11}{4x-8}$

34 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{|2x-5|}$

35 $\lim\limits_{x\to 2}3^{x^2-4}$

36 $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

si $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si } x<0 \\ 3+\sin x & \text{si } 0<x\le 2 \\ 4x^2-7 & \text{si } 2<x<5 \\ 3x^2+5 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$

37 $\lim\limits_{x\to 3^+}\ \log_{10}(x^2-9)$

38 $\lim\limits_{x\to 0}\ \sin\left(\dfrac{x^3+x+1}{2x+3}\right)$

39 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^{3/2}$

40 $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt[3]{x^3-64}$

41 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

si $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & \text{si } x<-1 \\ x+2 & \text{si } -1\le x<3 \\ 8x+3 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

42 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{3x-8}$

43 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} 5x+7 & \text{si } x\le 1 \\ x^3-1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

44 $\lim\limits_{x\to 2}[\![x-2]\!]$

45 $\lim\limits_{x\to 1/2}[\![2x]\!]$

46 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{x-4}$

47 $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} 2x^2-6x & \text{si } x<5 \\ 12 & \text{si } x=5 \\ \dfrac{4x+15}{7} & \text{si } x>5 \end{cases}$

48 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{[\![x]\!]}{|x|}$

49 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x|}{[\![x]\!]}$

50 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{[\![x]\!]}$

Réponse :

1.

a)

$f(0{,}8) = 2{,}8$

$f(0{,}9) = 2{,}9$

$f(0{,}99) = 2{,}99$

$f(0{,}999) = 2{,}999$

$f(0{,}9999) = 2{,}9999$

b)

$f(1{,}2) = 3{,}2$

$f(1{,}1) = 3{,}1$

$f(1{,}01) = 3{,}01$

$f(1{,}001) = 3{,}001$

$f(1{,}0001) = 3{,}0001$

c)

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3$; $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$; $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$

2.

a)

$f(a) = b$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

b)

$f(a) = b$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = c$

$\lim_{x\to a} f(x) \quad \nexists$

c)

$f(a) \quad \nexists$

$\lim_{x\to a^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to a^+} f(x) = b$

$\lim_{x\to a} f(x) = b$

h)

$f(a) = b$

$\lim_{x\to a^-} f(x) \quad \nexists$

$\lim_{x\to a^+} f(x) \quad \nexists$

$\lim_{x\to a} f(x) \quad \nexists$

3.

a) $\lim_{x\to 3}(x^2 + 2x + 15) = 3^2 + 2(3) + 15 = 30$ (résultat 5)

b) 0

c) 4/3

d) 2

4. 1

5. 4

6.

Cette fonction fait partie des fonctions de la catégorie (B) mentionnée dans la technique de calcul d'une limite. On évalue alors la limite à gauche et la limite à droite.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(7x - 1) = 13$ (résultat 5)

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2 + 8) = 12$ (résultat 5)

Donc, $\lim_{x\to 2} f(x) \quad \nexists$.

7. $\nexists$

8. 1

9. $\log_{10} 2$

10. 1/5

11. $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{0^+} = 0$

12. $\lim_{x\to 1^-} \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{0^-} \quad \therefore \nexists$

13. 0

d)
$f(a) = c$
$\lim_{x \to a^-} f(x) = d$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$
$\lim_{x \to a} f(x)$ ∄

e)
$f(a) = c$
$\lim_{x \to a^-} f(x)$ ∄
$\lim_{x \to a^+} f(x) = c$
$\lim_{x \to a} f(x)$ ∄

f)
$f(a) = b$
$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$
$\lim_{x \to a} f(x) = b$

g)
$f(a) = c$
$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$
$\lim_{x \to a^+} f(x) = b$
$\lim_{x \to a} f(x) = b$

14. 1
15. $\sqrt{2}$
16. $\lim_{x \to -1} \sqrt{x+1}$
en appliquant les résultats connus, on retrouve une forme $\sqrt{0}$; c'est une situation où il faut considérer les limites à gauche et à droite :
$\lim_{x \to -1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0^+} = 0$ et $\lim_{x \to -1^-} \sqrt{x+1} = \sqrt{0^-}$ ∄
Donc, $\lim_{x \to -1} \sqrt{x+1}$ ∄
17. ∄
18. 0
19. 1/2
20. 9
21. 3
22. 1
23. −1
24. 0
25. ∄
26. 64 000
27. $\lim_{x \to 1} \sqrt{6x^2 - 3} = \sqrt{3}$ et $\lim_{x \to 1} \sqrt{x-1}$ ∄ ;
donc, globalement $\lim_{x \to 1} (\sqrt{6x^2 - 3} - \sqrt{x-1})$ ∄
28. $\sqrt{3}$
29. $\sin 30$
30. ∄
31. 0
32. ∄
33. 47/6
34. 1
35. 1
36. 9
37. $\lim_{x \to 3^-} \log_{10}(x^2 - 9) = \log_{10}(9^- - 9) = \log_{10}(0^-)$; donc ∄
38. $\sin\left(\frac{1}{3}\right)$

39.

$\lim_{x\to 1}(x-1)^{3/2} = \lim_{x\to 1}\sqrt{(x-1)^3}$ (forme $\sqrt{0}$)

$\lim_{x\to 1^-}\sqrt{(x-1)^3} = \sqrt{0^-}$ $\nexists$

$\lim_{x\to 1^+}\sqrt{(x-1)^3} = \sqrt{0^+} = 0$

Donc, $\lim_{x\to 1}(x-1)^{3/2}$ $\nexists$

40. 0

41. 0

42. $\sqrt[3]{-2}$

43. 7

44. $\nexists$

45. $\nexists$

46. $\nexists$

47. $\nexists$

48. 1

49. $\nexists$

50. $\nexists$

Mathématique Calcul 42S : Exercice 4B Limites

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)}$
2. $\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)}$
3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$
4. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}$
5. $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-8}$
6. $\lim_{x\to 1/3}\frac{3x^2-4x+1}{3x^2-10x+3}$
7. $\lim_{x\to -4}\frac{(x-1)(x^2-16)}{x^2+3x-4}$
8. $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$
9. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}$
10. $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$
11. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+13x}{x^2+x}$
12. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
13. $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$
14. $\lim_{x\to -1}\sqrt{\frac{2x^2+7x+5}{x+1}}$.
15. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-5x-14}{x^2+6x+8}$
16. $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+3x-4}$
17. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-13x+22}{x^2-10x+16}$
18. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x^2-x+3}{x^3-x^2-4x+4}$

19. $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{x-3}$
20. $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$
21. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+x-1}-1}{x-1}$
22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$
23. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 16x}{x}$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-2x)\tan 4x}{2x^2}$
37. $\lim_{x\to 0}\frac{x+5\tan x}{x}$
38. $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{|x|}$
39. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\sin 2x}$
40. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x\sin^2 2x}{3x^3}$

24 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 5x}{2x}$

25 $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+x}{x}$

26 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

27 $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 4x}{2x}$

28 $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}$

29 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cos 5x}{\sin 3x\cos 4x}$

30 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin^2 x}{x}$

31 $\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos x}{x^2}$

32 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}$

33 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\tan 5x}$

34 $\lim_{x\to \pi}\frac{\cos 2x}{\cos x}$

35 $\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{x^2\sec^2 x}$

41 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\sec x\tan x}{x^3}$

42 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin^3 x\cos x}{2x}$

43 $\lim_{x\to 0}\cot x\sin 3x$

44 $\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2 x\sec x}{x^2}$

45 $\lim_{x\to 0}\frac{\sec x\tan x}{x^2\operatorname{cosec} x}$

46 $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}$

47 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ si $f(x)=3x-2$

48 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$ si $f(x)=x^2+2$

49 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si $f(x)=x^2+x-3$

50 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$ si $g(x)=x^3+7$

51 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ si $f(x)=\sqrt{2x-7}$

Réponse :

1. 1
2. –1
3. 3
4. 0
5. $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x-1)(x-2)}{(x+4)(x-2)}$ $=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{x+4}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
6. 1/4
7. –8
8. $\lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}\right)\times\frac{(\sqrt{x+5}+2)}{(\sqrt{x+5}+2)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+5)-4}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{1}{\sqrt{x+5}+2}=\frac{1}{4}$

9.

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4}\right)\times\frac{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})}{(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(2x+1)-(x+5)}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})}=\lim_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5})}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{6}$$

10. $\sqrt{5}$

11. 13

12. 5/4

13. −1/4

14. $\sqrt{3}$

15. −9/2

16. 1

17. 3/2

18. 4/3

19. 108

20. 0

21. 3/2

22. $\sqrt{3}/6$

23. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 16x}{x}=\lim_{x\to0}(16)\frac{\sin 16x}{(16)x}=16(1)=16$

24.

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 5x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\cos 5x\ 2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{(5x)}\ \frac{1}{\cos 5x}\ \frac{(5x)}{2x}$$

$$=(1)\ (1)\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}$$

25. 1

26.

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\left(\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\ \frac{\sin x}{x}\ \frac{1}{1+\cos x}$$

$$=(1)\ (1)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

27. 6

28. $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}2\cos x=2\,(-1)=-2$

29. 2/3

30. 1

31. 3

32. $\sqrt{2}$

33. 7/5

34. $\lim_{x\to\pi}\frac{\cos 2x}{\cos x}=\frac{\cos 2\pi}{\cos\pi}=\frac{1}{-1}=-1$

35. 1

36. −4

43. 3

44. 4

45. 1

46. $2\sqrt{3}$

47. 2

48. $\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\left[(3+\Delta x)^2+2\right]-\left[3^2+2\right]}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{9+6\Delta x+(\Delta x)^2+2-9-2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}(6+\Delta x)=6$$

49. $2x+1$

37.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+5\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}+\frac{5\tan x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+5\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=1+5\,(1)\,(1)=6$$

38.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{|x|}\qquad (\text{forme } \frac{0}{0})$$

À cause de la fonction $|x|$ qui n'est pas définie de la même manière à gauche et à droite de 0, il faut considérer les limites à gauche et à droite.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x\sin x}{(-x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{-1}=\frac{0}{-1}=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sin x=0$$

Donc,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{|x|}=0$$

39.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{2\sin 2x}\times\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{2\sin 2x\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{2\,(2\sin x\cos x)\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{4\cos x(1+\cos x)}=\frac{0}{4\,(1)\,(2)}=0$$

40. 20/3

41. 1

42.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2\sin^3 x\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}-\frac{2\sin x\sin^2 x\cos x}{2x}\right)$$

$$=1-0=1$$

50. $3x^2$

51.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2(x+h)-7}-\sqrt{2x-7}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h-7}-\sqrt{2x-7}}{h}\times\frac{(\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7})}{(\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h-7)-(2x-7)}{h(\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h}{h(\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7})}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2}{(\sqrt{2x+2h-7}+\sqrt{2x-7})}=\frac{2}{\sqrt{2x-7}+\sqrt{2x-7}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2x-7}}=\frac{1}{\sqrt{2x-7}}$$

Trouver, si elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to -1} \frac{2}{x+1}$
2. $\lim_{x\to -2^-} \frac{4x+1}{x+2}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{6x^2+8x+7}{x^4+x^2}$
4. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x+3}{x-3}$
5. $\lim_{x\to 7^-} \frac{3x+8}{x-7}$
6. $\lim_{x\to 5^+} \frac{x^2+7x-13}{(x-5)(x+2)}$
7. $\lim_{x\to 2} \frac{(x+4)(2x-3)}{(x-2)^3}$
8. $\lim_{x\to 0^-} \frac{4x^3+5x^2-1}{x^7+2x^6+x^3}$
9. $\lim_{x\to 6^+} \frac{x^2-6x}{2x^2-11x-6}$
10. $\lim_{x\to 1} \frac{6x+7}{x^2-2x+1}$
11. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^4-1}{5x-x^2-6}$
12. $\lim_{x\to 3^+} \frac{4x+1}{x^3-3x^2-x+3}$
13. $\lim_{x\to 5^+} \frac{[\![x]\!]-5}{x-5}$
14. $\lim_{x\to 2} \left[8x+7+\frac{x}{x-2}\right]$

27. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3+7x^2-x-13}{5x^4+x^3-2x}$
28. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^5+x^3+x^2+6}{3x^5-x^2+x}$
29. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+8x^2+9}{x^2+x+1}$
30. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^4+x^3+x-7}{2x^5+x-3}$
31. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+3}$
32. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x}{\sqrt{2x^2+3}}$
33. $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+1}$
34. $\lim_{x\to -\infty} \frac{6x+7}{\sqrt{9x^2-x+5}}$

15 $\lim_{x\to 10} \ln\left(\frac{x-10}{7}\right)$

16 $\lim_{x\to 5} \log_{10}\left(\frac{x-5}{x+5}\right)$

17 $\lim_{x\to 3^-} \ln\left(\frac{3-x}{12}\right)$

18 $\lim_{x\to 2^+} \log_{10}\left(\frac{x-2}{3x-1}\right)$

19 $\lim_{x\to\infty}(3x^2+4x-7)$

20 $\lim_{x\to-\infty}(x^4+3x-1)$

21 $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^3+2x-1}$

22 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{x-4}$

23 $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+6}{2x-1}$

24 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+2x+7}{x^3+3}$

25 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^5-x^4+x^2-1}{x^5-x^3+2}$

26 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^3+x^2+1}{2x^3+x+7}$

35 $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-1)^8}{(x+3)^8}$

36 $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

37 $\lim_{x\to\infty}3^{-x}$

38 $\lim_{x\to\infty}\frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

39 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

40 $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+5}}{3x+7}$

41 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x$

42 $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

43 $\lim_{x\to 2^+}\left[\frac{3}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}\right]$

44 $\lim_{x\to 0^+} x\cot 2x$

45 $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}$

46 $\lim_{x\to\infty} e^{1/x}$

Pour chacune des fonctions suivantes, trouver les asymptotes et esquisser le graphique de la fonction.

47 $f_1(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}$

48 $f_2(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$

49 $f_3(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

50 $f_4(x) = \dfrac{x-1}{2x-3}$

51 $f_5(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

52 $f_6(x) = \dfrac{3x^2-4x+2}{x-1}$

53 $f_7(x) = \dfrac{x^2-5x+4}{x-5}$

54 $f_8(x) = \dfrac{x^2+x-5}{x+3}$

55 $f_9(x) = \dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^2-2x-3}$

56 $f_{10}(x) = \dfrac{3x^3+4x^2-5x-2}{2x^2+5x+2}$

Réponse

1.

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2}{x+1}$ (forme $\dfrac{2}{0}$)

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{2}{0^+} = +\infty$

Donc,

$\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2}{x+1}$ $\nexists$

2. $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{4x+1}{x+2} = \dfrac{-8+1}{-2^-+2} = \dfrac{-7}{0^-} = \infty$

3. ∞

4. $\nexists$

5. $-\infty$

6. ∞

7. $\nexists$

8. ∞

9.

$\lim\limits_{x \to 6^+} \dfrac{x^2-6x}{2x^2-11x-6} = \lim\limits_{x \to 6^+} \dfrac{x(x-6)}{(2x+1)(x-6)}$

$= \lim_{x\to 6^+} \frac{x}{2x+1} = \frac{6}{13}$

10. ∞

11. $-\infty$

12. ∞

13. $\lim_{x\to 5^+} \frac{[\![x]\!]-5}{x-5} = \frac{[\![5^+]\!]-5}{5^+-5} = \frac{5-5}{5^+-5} = \frac{0 \text{ exact}}{0^+} = 0$

14.

$\lim_{x\to 2}\left[8x+7+\frac{x}{x-2}\right] = \lim_{x\to 2}(8x+7) + \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}\right)$

$= 23 + \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{x-2}\right)$

Pour la deuxième partie de ce calcul, on a une forme $\frac{2}{0}$.

$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{2}{0^-} = -\infty$ et $\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{x-2}\right) = \frac{2}{0^+} = \infty$

Donc, $\lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$ n'existe pas et globalement,

$\lim_{x\to 2}\left[8x+7+\frac{x}{x-2}\right]$ n'existe pas.

15.

C'est une forme $\ln(0)$.

$\lim_{x\to 10^-} \ln\left(\frac{x-10}{7}\right) = \ln\left(\frac{0^-}{7}\right) = \ln(0^-) \quad \nexists$

$\lim_{x\to 10^+} \ln\left(\frac{x-10}{7}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{7}\right) = \ln(0^+) = -\infty$

Donc, $\lim_{x\to 10} \ln\left(\frac{x-10}{7}\right) \quad \nexists$

31.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x^2+2}}{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{2+0} = \frac{1}{2}$

32. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{2x^2+3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}} = \frac{5}{\sqrt{2+0}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

33. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3+1}}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x^4}+\frac{1}{x^4}}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{0+0}}{1+0} = 0$

34.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+7}{\sqrt{9x^2-x+5}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{6+\frac{7}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt{9x^2-x+5}}$

$= \lim_{x\to-\infty}\frac{6+\frac{7}{x}}{-\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}}$

N.B.: Puisque $x\to-\infty$, x est donc négatif, de sorte qu'on doit garder un signe $-$ devant le radical après avoir entré le $1/x$ à l'intérieur de ce radical.

$= \frac{6+0}{-\sqrt{9-0+0}} = \frac{6}{-3} = -2$

35. 2^8

16. $\nexists$

17. $-\infty$

18. $-\infty$

19. ∞

20. ∞

21. ∞

22. 1

23. 3/2

24. 1

25. 3

26. ∞

27. 0

28. 1/3

29. $-\infty$

30. 0

36. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x})\times\dfrac{(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{x}{x}}{\dfrac{x}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

$=\dfrac{\infty-1}{1+0}=\infty$

37. $\lim\limits_{x\to\infty}3^{-x}=3^{-\infty}=\dfrac{1}{3^{\infty}}=\dfrac{1}{\infty}=0$

38.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2^x}{2^x}-\dfrac{2^{-x}}{2^x}}{\dfrac{2^x}{2^x}+\dfrac{2^{-x}}{2^x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2^{-2x}}{1+2^{-2x}}$

$=\dfrac{1-2^{-\infty}}{1+2^{-\infty}}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$

39.

$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)\times\dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\dfrac{1}{\infty+\infty}=0$

40. 2/3

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{3}{2}\right)^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$

42. 0

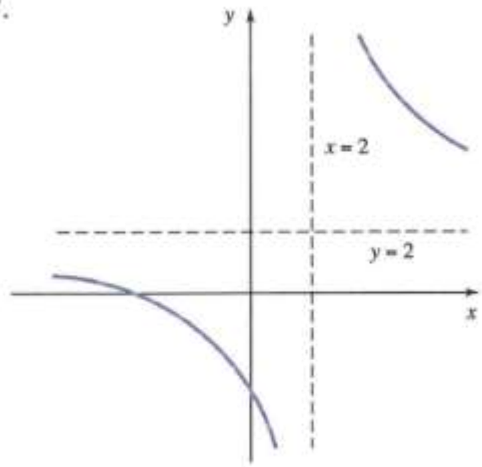
43. $-\infty$

44. 1/2

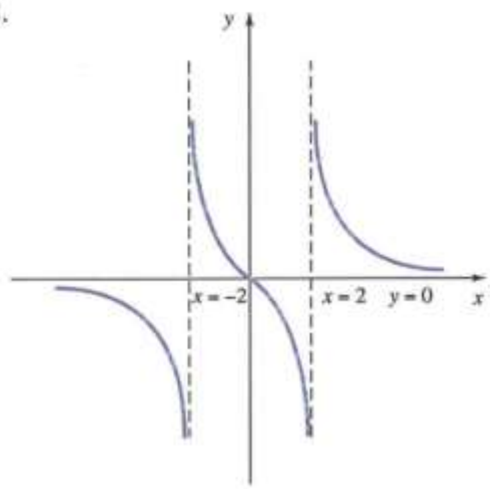
45. 0

46. 1

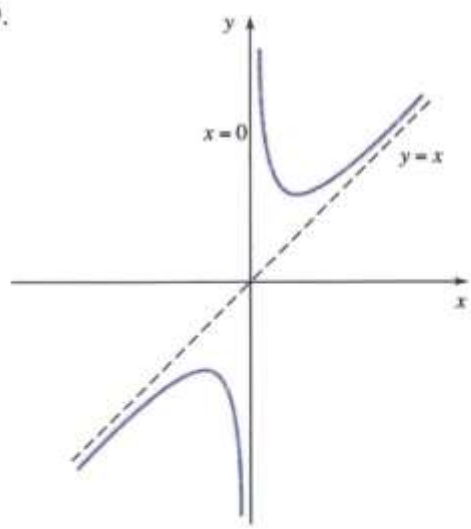
47.



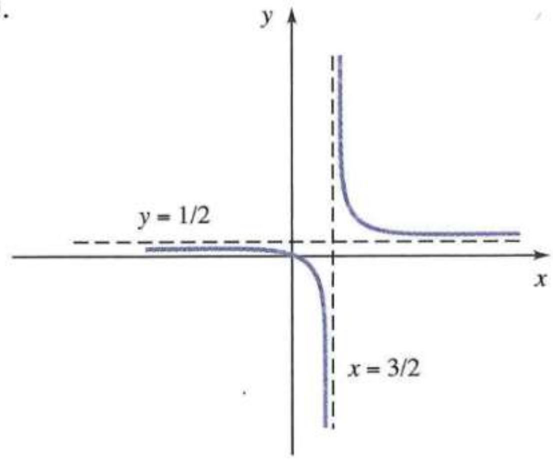
48.



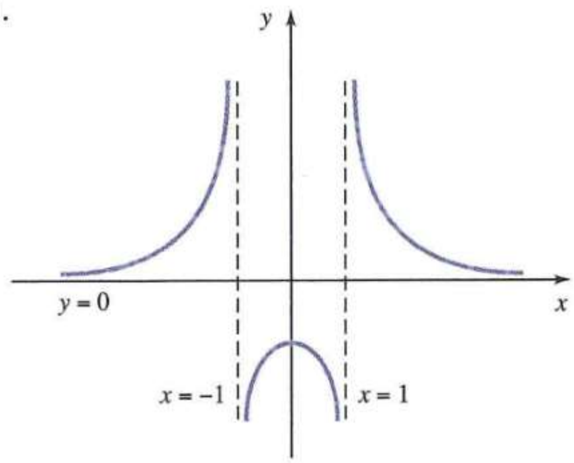
49.



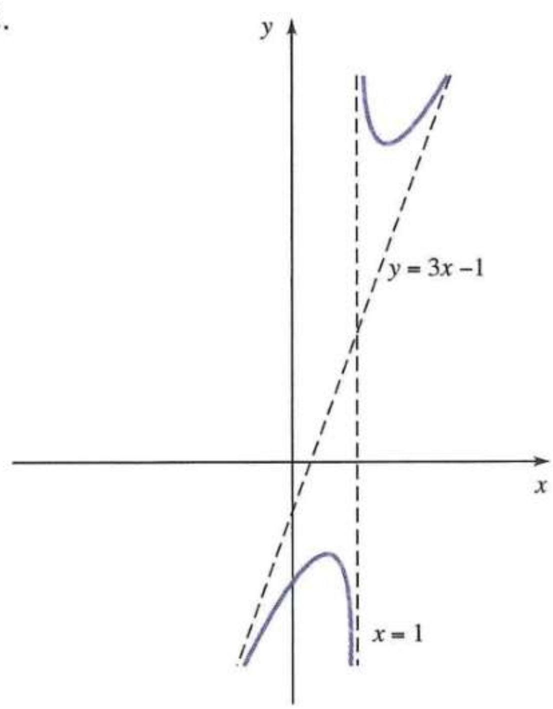
50.



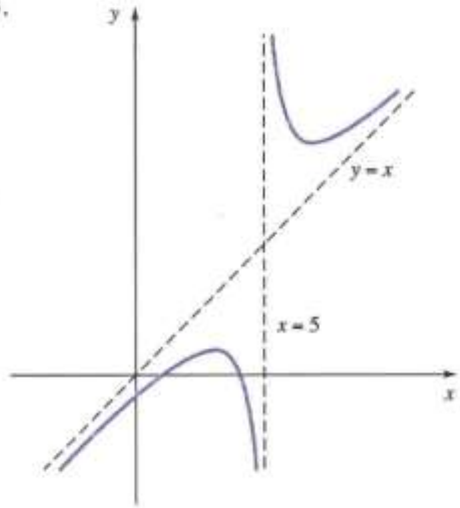
51.



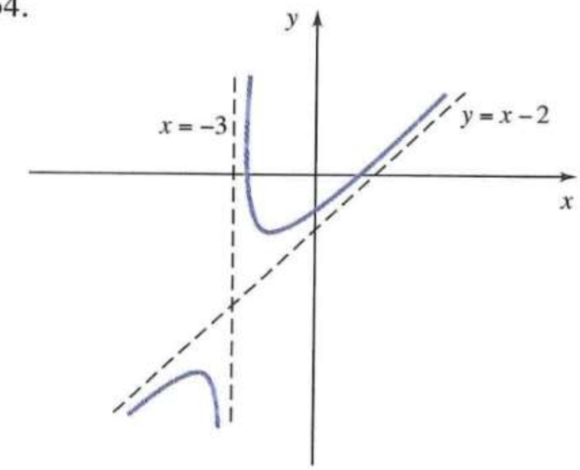
52.



53.



54.



55.

$f_9(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x - 3} = \dfrac{(x^2 + x + 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 3)}$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f_9(x) = \dfrac{(1)(-4)}{0^-(-4)} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f_9(x) = \dfrac{(1)(-4)}{0^+(-4)} = \infty$

Donc, $x = -1$ est une asymptote verticale.

$\lim\limits_{x \to 3} f_9(x) = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x^2 + x + 1)}{(x + 1)} = \dfrac{13}{4}$

Donc, il n'y a pas d'asymptote verticale à $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to \infty} f_9(x) = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f_9(x) = -\infty$

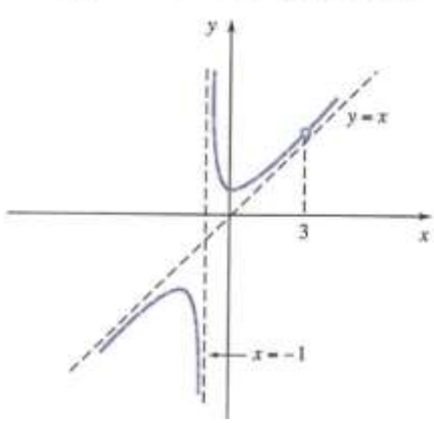
Donc, il n'y a pas d'asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f_9(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1$; donc, $m = 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f_9(x) - 1x \right] = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} - x \right]$

$= \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{1}{x + 1} \right) = 0$

Donc, $y = x$ est une asymptote oblique.



56.

$x = -\dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale.

$y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{4}$ est une asymptote oblique.