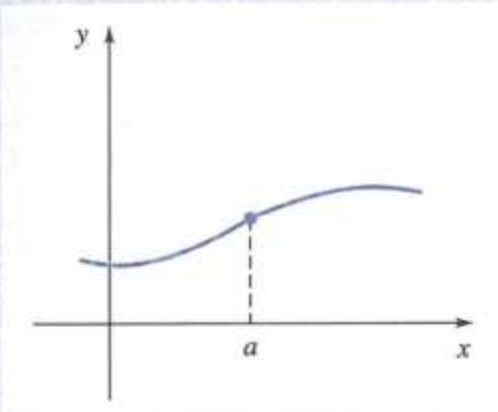
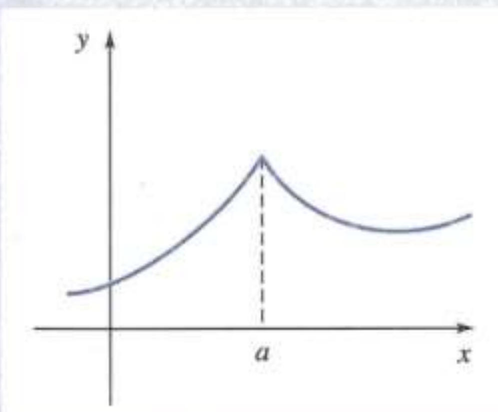
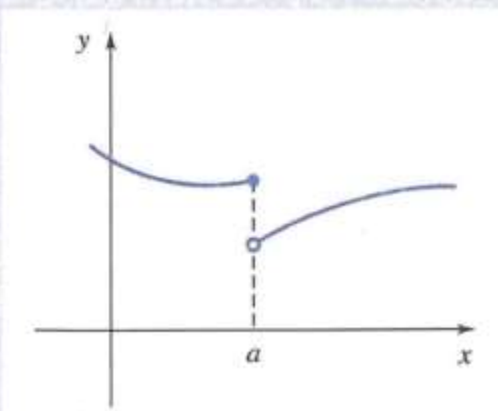
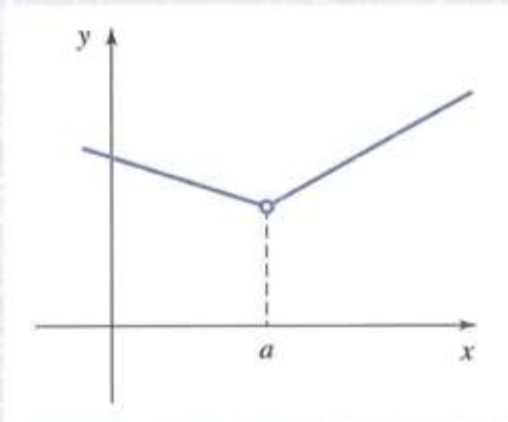
Calcul 42S
La Continuité : Exercice

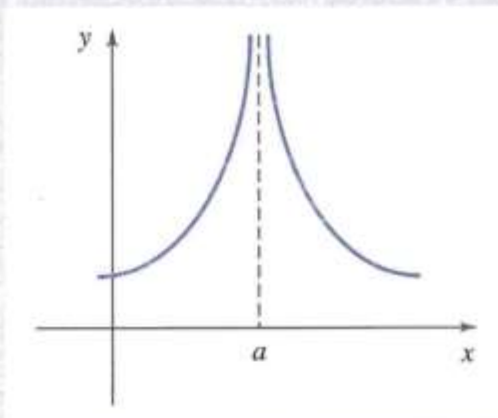
Pour chacune des fonctions des numéros 1 à 10 décrites par un graphique, dire si elle est continue au point d'abscisse $x = a$. Si elle est discontinue, qualifier la discontinuité.

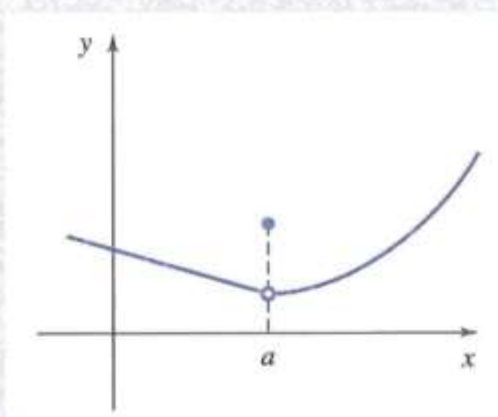
1


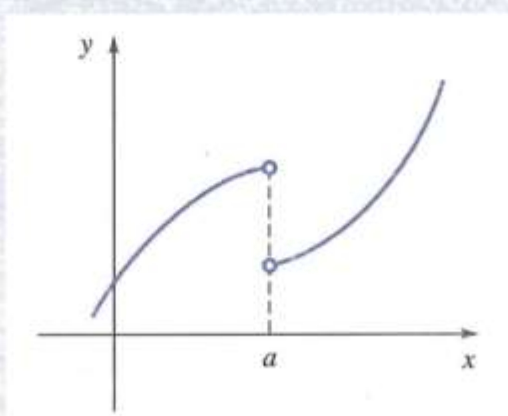
2


3


4


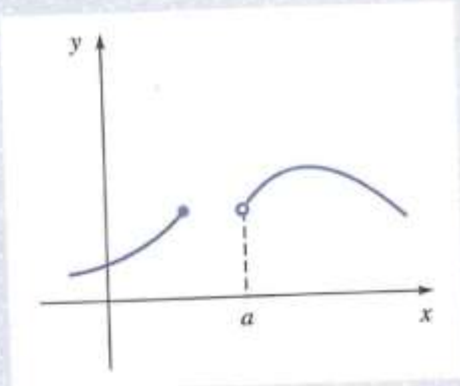
5


6


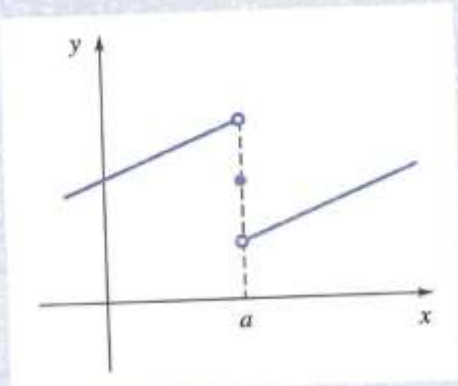
7


Calcul 42S
La Continuité : Exercice

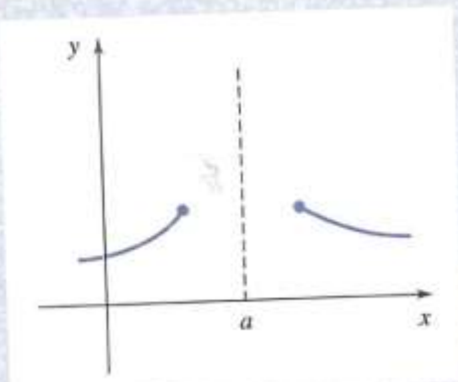
8



9



10



Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité au point donné. Si elle est discontinue, qualifier la discontinuité.

11 $f(x) = x^2 + 1$ au point d'abscisse $x = 2$

12 $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ au point d'abscisse $x = 0$

13 $f(x) = |x|$ au point d'abscisse $x = 0$

14 $f(x) = \sqrt{x-2}$ au point d'abscisse $x = 2$

15 $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x}$ au point d'abscisse $x = 1$

16 $f(x) = \sin x$ au point d'abscisse $x = \pi/4$

17 $f(x) = \ln x$ au point d'abscisse $x = 1$

18 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^3 - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ au point d'abscisse $x = 1$

19 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$ au point d'abscisse $x = 1$

20 $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ au point d'abscisse $x = 2$

21 $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1}$ au point d'abscisse $x = 1$

22 $f(x) = \sqrt{5x - 3}$ au point d'abscisse $x = 0$

23 $f(x) = \sqrt[3]{2x - 1}$ au point d'abscisse $x = 1/2$

24 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 - 7x + 12}$ au point d'abscisse $x = 3$

25 $f(x) = \ln(x-2)^2$ au point d'abscisse $x = 2$

26 $f(x) = \sec x$ au point d'abscisse $x = \pi/2$

27 $f(x) = [\![x + 4]\!]$ au point d'abscisse $x = 2$

Solutions :

1. Continue.
2. Continue.
3. Discontinuité essentielle par saut.
4. Discontinuité non essentielle par trou.
5. Discontinuité essentielle infinie.
6. Discontinuité non essentielle par déplacement.
7. Discontinuité essentielle par saut
8. Discontinuité essentielle par manque.
9. Discontinuité essentielle par saut.
10. Discontinuité essentielle par manque.

11. f est définie partout sur $\mathbb{R}$. $f(2)=5$.
$\lim_{x\to 2} f(x)=5$ et $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$.
Donc, f est continue au point d'abscisse $x=2$.

12. f est définie dans le voisinage de $x=0$.
$f(0)\ \nexists$; $\lim_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas car
$\lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x}=\frac{2}{0^+}=\infty$ et $\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{x}=\frac{2}{0^-}=-\infty$
Donc, en $x=0$ on a une discontinuité essentielle infinie.

13. Continuité en $x=0$.
14. Discontinuité essentielle par manque car $f(2^-)\ \nexists$.
15. Continuité en $x=1$.
16. Continuité en $x=\pi/4$
17. Continuité en $x=1$.
18. Discontinuité essentielle par saut en $x=1$.
19. Continuité en $x=1$.
20. Discontinuité non essentielle par trou.
21. Continuité en $x=1$.

22. f est définie sur $\left[3/5,\infty\right[$; $f(0)\ \nexists$ et f n'est pas définie dans le voisinage de $x=0$. Donc, on a une discontinuité essentielle par manque.

23. Continue en $x=1/2$.

24. Discontinuité non essentielle par trou.

25. Discontinuité essentielle infinie.

26. Discontinuité essentielle infinie.

27. f est définie sur $\mathbb{R}$. $f(2)=6$. $\lim_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas car
$\lim_{x\to 2^-} [\![x+4]\!]=[\![6^-]\!]=5$ et $\lim_{x\to 2^+} [\![x+4]\!]=[\![6^+]\!]=6$
Donc, on a une discontinuité essentielle par saut.

Calcul 42S
La Continuité : Exercice

Pour chacune des fonctions des numéros 1 à 20, localiser, s'il y a lieu, le ou les points de discontinuité:

1. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5$
2. $f(x) = \dfrac{6x+15}{x-3}$
3. $f(x) = x^2 + \sin x$
4. $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{5}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2+4x}{2x-1}$
6. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2+1}$
7. $f(x) = \dfrac{3x^2-10x-8}{x^2+x-20}$
8. $f(x) = \dfrac{9x-4}{2x^3+5x^2+2x+5}$
9. $f(x) = [\![x+3]\!]$
10. $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$
11. $f(x) = x\,2^{x-2}$
12. $f(x) = \dfrac{5^x}{x-1}$
13. $f(x) = 4^{1/x}$
14. $f(x) = \cos\left(\dfrac{2}{x-3}\right)$
15. $f(x) = \left(\dfrac{3x+7}{x-8}\right)^3$
16. $f(x) = \sqrt{(2x+5)^2}$
17. $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & \text{si} \quad x < -1 \\ \dfrac{-12x}{x-3} & \text{si} \quad x \geq -1 \end{cases}$
18. $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si} \quad x < 2 \\ \dfrac{7x+6}{x+3} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$
19. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ e^x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
20. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+5} & \text{si} \quad x < 5 \\ 0 & \text{si} \quad x = 5 \\ \sqrt{x-5} & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$

Pour chacune des fonctions des numéros 21 à 31, analyser la continuité sur $\mathbb{R}$.

21. $y = 4x^3 - x + 2$
22. $y = \sin x + \cos 2x$
23. $y = \dfrac{3x+1}{2x-5}$
24. $y = \dfrac{4}{(x+1)^2}$
25. $y = [\![x+2]\!]$
26. $y = \dfrac{\sin 3x}{2x}$
27. $y = \cos(x^3 + 2x^2 - x + 2)$
28. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-10}{x-1} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 8 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$
29. $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{si} \quad x < 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 1 \\ 8x-3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
30. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5}{x-3} & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-3| & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$
31. $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ x^3+x^2+1 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$

Peut-on, par prolongement ou par déplacement, rendre les fonctions suivantes continues sur $\mathbb{R}$?

32. $f(x) = \begin{cases} 5x-4 & \text{si} \quad x < 3 \\ 5 & \text{si} \quad x = 3 \\ x^2+2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$
33. $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^2+x-6}$
34. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

Calcul 42S
La Continuité : Exercice

Solutions :

1. Il n'y a pas de discontinuité puisque c'est une fonction polynomiale.

2. Il y a une discontinuité en $x=3$, puisque $f(3)\ \nexists$. De plus, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\ \nexists$.

3. Fonction continue sur $\mathbb{R}$; donc aucune discontinuité.

4. Aucune discontinuité.

5. Discontinuité en $x=1/2$.

6. Aucune discontinuité.

7. Discontinuités en $x=-5$ et en $x=4$.

8. Discontinuité en $x=-5/2$.

9. Discontinuités en tout $x\in\mathbb{Z}$.

10. Aucune discontinuité.

11. Aucune discontinuité.

12. Discontinuité en $x=1$.

13. Discontinuité en $x=0$.

14. Discontinuité en $x=3$.

15. Discontinuité en $x=8$.

16. Aucune discontinuité; en effet, $\sqrt{(2x+5)^2}=|2x+5|$ et $f(x)=|2x+5|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

17. Discontinuité en $x=3$. La fonction est continue en $x=-1$ car elle est définie dans le voisinage de $x=-1$,

$$f(-1)=\frac{-12(-1)}{-1-3}=\frac{12}{-4}=-3$$

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}(x^2+4x)=-3 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{-12x}{x-3}\right)=-3$$

Donc, $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=-3=f(-1)$.

18. Aucune discontinuité.

19. Discontinuité en $x=0$.

20. Discontinuité en $x=5$.

21. Continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynomiale.

22. Continue sur $\mathbb{R}$.

23. Discontinue en $x=5/2$, car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur s'annule en $x=5/2$.

24. Discontinue en $x=-1$.

25. Discontinue en $x=n$, où $n\in\mathbb{Z}$.

26. Discontinue en $x=0$.

27. Continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une composition de deux fonctions continues, soit $y=\cos u$ et $u=x^3+2x^2-x+2$.

28. Discontinue en $x=1$.

29. Discontinue en $x=1$.

30. Continue sur $\mathbb{R}$.

31. Continue sur $\mathbb{R}$.

32. Déplacement; redéfinir le point $(3,11)$.

33. Prolongement : définir le point $(2,12/5)$. Il y a cependant une discontinuité essentielle en $x=-3$.

34. Discontinuité essentielle en $x=0$.